# MATHE-BRIEF

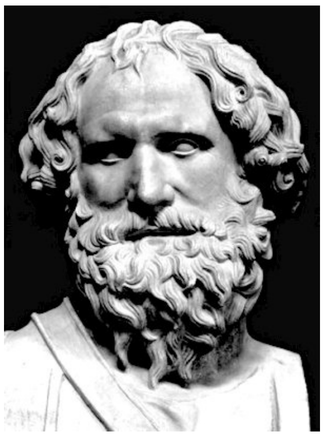
**Februar 2012 — Nr. 22**

*Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft*
*http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at*


## DIE BIBEL, ARCHIMEDES, UND LUDOLF VAN CEULEN ZU $\pi$

Die Vermessung des Kreises war seit ältester Zeit eine der größten Herausforderungen der Mathematik in den frühen Hochkulturen und in der Antike. Ägyptische Vermessungsbeamte fanden, wie der Papyrus Rhind berichtet, dass das Verhältnis vom Umfang zum Durchmesser des Kreises $4^4 : 3^4$ beträgt, was auf den Zahlenwert $\frac{256}{81} \approx 3,16$ hinausläuft. Die babylonischen Gelehrten schlugen $3 + \frac{1}{8} = 3,125$ als Wert dieses Verhältnisses vor. Ob die Erfinder dieser Werte glaubten, es handle sich um das exakte Verhältnis von Umfang zum Durchmesser des Kreises, oder nur um einen ungefähren Wert, wissen wir nicht.

In der Bibel findet man im siebenten Kapitel des ersten Buchs der Könige die Beschreibung eines kreisförmigen Brunnens, bei dem das Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser mit 30 : 10 angegeben ist. Der Umfang des Kreises wäre daher dreimal so groß wie sein Durchmesser. Dies entspricht einem nur sehr groben Näherungswert.



Archimedes von Syrakus

Erst Archimedes von Syrakus hatte gegen 250 v.Chr. mehr geleistet, als nur einen hinlänglich guten Näherungswert für das Verhältnis vom Umfang zum Durchmesser eines Kreises zu finden. Er entwickelte eine *Methode*, mit der man dieses Verhältnis so genau berechnen kann, wie man nur möchte. Erst im frühen 18. Jahrhundert kam die Bezeichnung $\pi$ für dieses Verhältnis auf: William Jones erfand dieses Symbol als Abkürzung des griechischen Wortes perímetros, das „Umfang“ bedeutet, und der Schweizer Mathematiker Leonhard Euler sorgte dafür, dass seitdem dieser Name für das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser des Kreises allgemein verwendet wird. Archimedes kannte diese Bezeichnung noch nicht, doch darauf kommt es selbstverständlich nicht an. Wichtig allein ist, dass er ein Verfahren fand, diese Größe $\pi$ so genau zu berechnen, wie man nur möchte. Er schrieb nämlich dem Kreis ein regelmäßiges Vieleck mit sehr vielen Ecken ein. Je mehr Ecken das Vieleck besitzt, umso besser ist die Näherung an $\pi$. Zwar hatte Archimedes noch nicht unsere Formelsprache zur Verfügung, doch wäre diese ihm geläufig gewesen, hätte er geschrieben, dass man $\pi$ dadurch erhält, dass man

$$2^3 \cdot 3 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \quad \text{oder} \quad 2^4 \cdot 3 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$$

berechnet. Noch genauere Resultate würde man erzielen, wenn man die Hochzahl des ersten Faktors 2 noch höher wählte, dafür aber entsprechend mehr ineinander geschachtelte Wurzeln anschriebe. Dabei stehen in den ineinander geschachtelten Wurzeln genau so viele Zahlen 2, wie die vorher geschriebene Hochzahl angibt, und bis auf das erste Minuszeichen kommen nur Pluszeichen vor.

Die erstgenannte der beiden oben geschriebenen Formeln nennt die Näherung an $\pi$, wenn man den Umfang des eingeschriebenen 48-Ecks berechnet, und die zweitgenannte, etwas bessere Näherung, wenn man den Umfang des eingeschriebenen 96-Ecks berechnet.

Welche Schlüsse zog Archimedes aus diesen Rechnungen? Einerseits sah er, dass er mit dieser Methode nie den endgültig richtigen Wert für $\pi$ erhalten wird, sondern immer bloß Näherungswerte. Andererseits erkannte er, dass die Berechnung dieser Näherungswerte ziemlich aufwendig ist: man muss oft Wurzeln ziehen. Natürlich hatte er damals keine elektronischen Rechenmaschinen zur Verfügung, ja nicht einmal das so flexible arabische Ziffern- und Dezimalsystem, sondern er musste mühsam mit den griechischen Zahlzeichen, die ähnlich wie die hebräischen Zahlzeichen auf den Buchstaben beruhten, rechnen. Zwar war das Ziehen der Wurzel bereits babylonischen Mathematikern geläufig, aber anstrengend war es allzumal. Darum hatte Archimedes nur den Näherungswert des eingeschriebenen 96-Ecks herangezogen und erkannt, dass $\pi$ ein wenig größer als $3 + \frac{10}{71}$ sein muss.

Um sicher zu gehen, hatte Archimedes nicht nur Vielecke dem Kreis eingeschrieben, sondern auch Vielecke dem Kreis umschrieben. Damit konnte er feststellen, wie groß $\pi$ höchstens ist. Aus der Berechnung des Umfangs vom regelmäßigen 96-Eck entnahm Archimedes das Resultat, dass $\pi$ ein wenig kleiner als $3 + \frac{1}{7}$ sein muss.

Die beiden Abschätzungen, die man in der Formel $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + 1/7$ zusammenfasst, hatten Archimedes gewiss davon überzeugt, dass es wenig Sinn macht, die Größe $\pi$ noch genauer zu berechnen. Denn einerseits reichen die beiden Näherungen für praktische Zwecke, andererseits ist nicht zu erwarten, dass sich plötzlich ein besonders „schöner" wahrer Wert für $\pi$ herausstellen wird. Höchstwahrscheinlich wird $\pi$ gar keine Bruchzahl, sondern eine irrationale Größe sein, wie dies die Pythagoräer schon vom Verhältnis der Diagonale zur Seite des Pentagramms und von der Wurzel aus 2 kannten. Erst 1761 wurde diese Vermutung vom schweizerisch-elsässischen Mathematiker Johann Heinrich Lambert bestätigt.

Um 1600, als das Rechnen mit den arabischen Zahlen bereits gang und gäbe war, hatte der Rechenmeister Ludolph van Ceulen den Ehrgeiz, eine möglichst genaue Näherung für $\pi$ zu ermitteln. In jahrzehntelanger mühevoller Arbeit ermittelte er die Umfänge eines dem Kreis eingeschriebenen und dem Kreis umgeschriebenen Vielecks mit mehr als vier Trillionen Ecken und kam mit der Methode, die schon Archimedes ersonnen hatte, zu dem Resultat, dass $\pi$ zwischen

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 und
3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50289

liegt. Fürs praktische Rechnen sind diese Zahlenmonster völlig wertlos. Viel wertvoller war die Einsicht des Archimedes, dass die gleiche, so eigenartige Größe $\pi$ auch für die Berechnung des Flächeninhalts des Kreises und des Rauminhaltes von Zylinder und Kugel sowie der Oberflächen von Zylinder und Kugel heranzuziehen ist. Dies ist tatsächlich eine höchst bemerkenswerte Tatsache. Archimedes jedenfalls war sie so wichtig, dass er verfügte, auf sein Grabmal eine Kugel und den sie umschreibenden Zylinder zu gravieren.

Grabmal des Ludolph van Ceulen

Rudolf Taschner