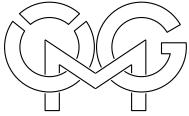
MATHE-BRIEF



Jänner 2012 — Nr. 21

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft http://www.oemg.ac.at/Mathe-Brief — mathe-brief@oemg.ac.at

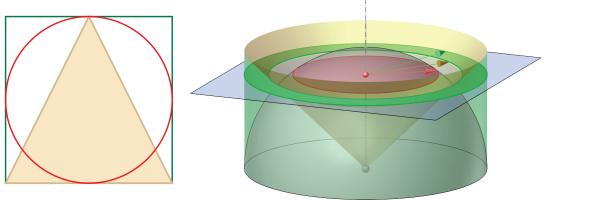
Liebe Kolleginnen und Kollegen,

Integralrechnung ist in der Mathematik von großer Bedeutung. Die Anfänge finden sich bei Archimedes, ohne dass dieser die bekannten Symbole verwendete. Für Schüler ist es sicher von Interesse, nicht-triviale Ergebnisse durch einfache Grenzwertbildungen zu erhalten:

KUGELVOLUMEN, KUGELOBERFLÄCHE UND SCHWERPUNKTSBERECHNUNGEN NACH ARCHIMEDES

In den folgenden Schritten (a)–(f) überlegen wir uns, wie man das Volumen der Kugel elementargeometrisch ableiten und daraus zB. die Oberfläche oder den Schwerpunkt einer Halbkugel bestimmen kann.

(a) Archimedes' berühmter Satz lautet: Das Volumen einer Kugel ist gleich dem Volumen des umschriebenen Drehzylinders, vermindert um das Volumen eines Drehkegels mit gleichem Basiskreis und gleicher Höhe.



Figur 1

Das zugehörige "Logo" (Figur 1 links) ist in abgewandelter Form auf seinem Grabstein eingemeißelt (Archimedes hatte bei der Formulierung nur den Zylinder verwendet).

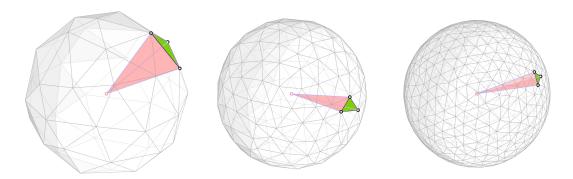
(b) Zum Beweis betrachten wir nur die halbe Kugel und dementsprechend auch den halb so hohen umschriebenen Zylinder (Figur 1 rechts). Der Kegel soll auf dem Kopf stehen und ebenfalls halbe Höhe besitzen.

Zu zeigen ist: $V_{\text{Halbkugel}} = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Kegel}}$.

Schneiden wir mit Archimedes die drei Körper (Kugelradius r) mit einer Ebene parallel zum Basiskreis in der Höhe z, wodurch wir drei Schichtenkreise erhalten. Der Radius des Schichtenkreises auf der Kugel ist $r_1 = \sqrt{r^2 - z^2}$, der des Schichtenkreises des Zylinders stets $r_2 = r$ und der Radius des Schichtenkreises auf dem Kegel ist wegen der 45° -Neigung des Kegels $r_3 = z$. Der Schichtenkreis der Halbkugel hat somit die Fläche $A_z = \pi(r^2 - z^2)$. Dieselbe Fläche hat in jeder Höhe z jener Kreisring, der von Zylinder und Kegel begrenzt wird. Haben zwei Körper in jeder Höhe den gleichen Querschnitt, dann sind ihre Volumina identisch (dieses Prinzip wurde viel später von Cavalieri ausgebaut).

Im konkreten Fall haben wir: $V_{\text{Halbkugel}} = \pi r^2 \cdot r - \pi r^2 \cdot \frac{r}{3} = \frac{2\pi}{3} r^3$. Das Volumen der ganzen Kugel ist natürlich doppelt so groß.

(c) Berechnung der Kugeloberfläche aus dem Kugelvolumen:



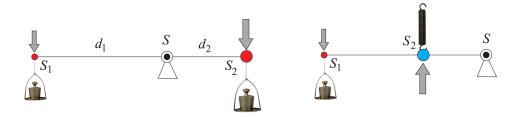
Figur 2

Wir wählen auf der Kugel beliebig viele Punkte und verbinden sie zu einem Dreiecksnetz (Figur 2). Jedes Dreieck bildet zusammen mit der Kugelmitte ein allgemeines Tetraeder, für das die Volumsformel $V_{\text{Tetraeder}} = \text{Grundfläche} \times \text{H\"ohe}/3$ gilt. Näherungsweise ist das Kugelvolumen gleich der Summe der Volumina aller Tetraeder. Verfeinern wir das Dreiecksnetz auf der Kugel immer mehr, dann konvergiert die H\"ohe aller Tetraeder gegen den Kugelradius und die Summe der Basisflächen gegen die Kugeloberfläche A. Es gilt somit

$$V_{\text{Kugel}} = \sum V_{\text{Tetraeder}} \implies \frac{4\pi}{3} r^3 = A \cdot \frac{r}{3} \implies A = 4\pi r^2.$$

Demnach ist z.B. die Mantelfläche einer Halbkugel doppelt so groß wie die Fläche ihres Basiskreises bzw. ebenso groß wie die Mantelfläche des umschriebenen Drehzylinders.

(d) Das Hebelgesetz von Archimedes zur Schwerpunktsbestimmung:



Figur 3

Wir betrachten eine Waage mit einem masselosen Hebel (Figur 3 links). Sind m_1 und m_2 zwei Massen, die im Abstand d_1 und d_2 vom Auflagepunkt S Drehmomente ausüben, dann befindet sich die Waage genau dann im Gleichgewicht, wenn $m_1d_1 = m_2d_2$ gilt. S kann als Schwerpunkt der

beiden Punkte S_1 und S_2 mit den Massen m_1 und m_2 interpretiert werden. Besitzen S_1 und S_2 die Koordinaten s_1 und s_2 bezüglich eines beliebigen Koordinatenursprungs auf dem Hebel, dann hat der gemeinsame Schwerpunkt die Koordinate

$$s = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 s_1 + m_2 s_2).$$

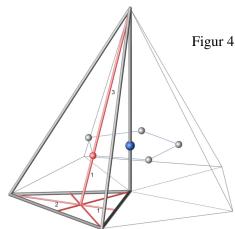
Massen können dabei auch negativ in die Formel eingehen (Figur 3 rechts), je nachdem, ob Druckoder Zugkräfte resultieren.

(e) Hilfsüberlegung: Schwerpunkt eines Drehkegels.

Wir betrachten ein beliebiges Tetraeder. Mittels Vektorrechnung lässt sich zeigen: Der Schwerpunkt teilt die Verbindungsstrecken der Schwerpunkte der Seitenflächen mit der gegenüberliegenden Spitze im Verhältnis 1:3.

In einem nächsten Schritt ergibt sich daraus, dass der Schwerpunkt einer regelmäßigen Pyramide die Höhe der Pyramide ebenfalls 1:3 teilt, weil die Pyramide durch Rotation von tetraedischen Keilen zusammengesetzt werden kann (Figur 4). Durch Verfeinerung erhält man:

Der Schwerpunkt eines Drehkegels teilt die Höhe im Verhältnis 1:3.



(f) Schwerpunktsbestimmung der Halbkugel:

Wir wollen uns nun überlegen, dass der "Ersatzkörper" aus Figur 1 rechts (also der kegelförmig ausgefräste Zylinder) denselben Schwerpunkt besitzt wie die volumsgleiche Halbkugel. Wir schneiden beide Körper in beliebig dünne Schichten parallel zum Basiskreis. Jede Schicht hat bei beiden Körpern nach den vorangegangenen Überlegungen denselben Querschnitt und damit dasselbe Volumen bzw. dieselbe Masse, die wir uns in derselben Höhe auf der lotrechten Rotationsachse vereinigt denken können. Wir können uns statt der Schichten also gleich schwere Massepunkte in der gleichen Höhe vorstellen, die in Summe den gleichen gemeinsamen Schwerpunkt ergeben. Diesen Schwerpunkt berechnen wir am "Ersatzkörper", der durch Ausfräsen eines Drehkegels (Masse also negativ!) aus dem Drehzylinder entsteht. Der Drehzylinder habe die Masse m_1 . Dann hat der Drehkegel die negative Masse $m_2 = -m_1/3$. Der Schwerpunkt des Zylinders liegt in der Höhe r/2, jener des Kegels in der Höhe 3r/4 (bei Drehkegeln teilt der Schwerpunkt die Höhe im Verhältnis 1:3). Mit obiger Formel erhalten wir nun die Höhe des Gesamtschwerpunkts

$$s = \frac{1}{m_1 - \frac{m_1}{3}} \left(m_1 \cdot \frac{r}{2} - \frac{m_1}{3} \cdot \frac{3r}{4} \right) = \frac{3r}{8}.$$

Literatur:

- [1] G. GLAESER, K. POLTHIER: *Bilder der Mathematik*, 2. *Aufl.*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 2010.
- [2] http://www.krgho.de/ag/html/heben1.htm
- [3] http://de.wikipedia.org/wiki/Kugel
- [4] http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/inhalt/beispiel/beispiel1147/

Die Redaktion wünscht allen Kolleginnen und Kollegen ein erfolgreiches Neues Jahr 2012!