MATHE-BRIEF

Dezember 2011 — Nr. 20

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

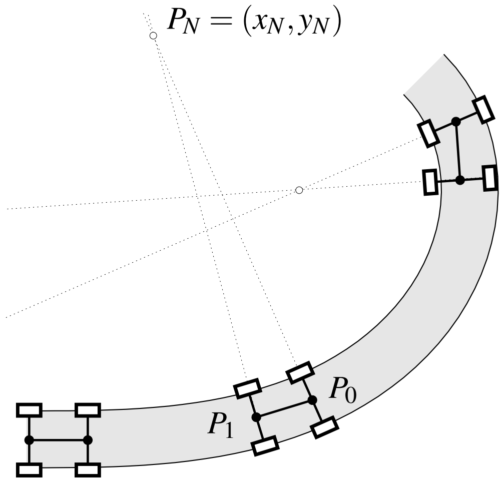
Liebe Kolleginnen und Kollegen,

diesmal wieder ein Vorschlag einer Themenstellung für eine vorwissenschaftliche Matura-Arbeit:

KURVENKRÜMMUNG

Aufgabenstellung: Was ist mit „Krümmung" einer ebenen Kurve gemeint und wie kann sie mathematisch erfasst werden?

Mögliche Bearbeitungsschritte:



(a) *Vorüberlegung:* Wenn die Deichsel eines Leiterwagens schräg zum Wagen festgehalten wird, fährt er eine Kurve, nämlich einen Kreisbogen. Der Mittelpunkt des Kreises liegt dabei im Schnittpunkt der verlängerten Vorder- und Hinterachsen. Dieser Kreis bestimmt das, was man umgangssprachlich als Krümmung des Weges dieses Fahrzeugs bezeichnen würde. Die Punkte (b)–(f) unten geben eine mathematische Beschreibung dieses Sachverhalts.

(b) Eine glatte Kurve erhält man (wenn man das Achsenkreuz passend wählt) als Graph einer Funktion $y = f(x)$ mit $a < x < b$, die auch noch eine erste Ableitung f' und eine zweite Ableitung f'' besitzt. In einem Punkt $P_0 = (x_0, f(x_0))$ hat die Kurve dann eine Tangente mit der Gleichung

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Wir denken uns, dass der Mittelpunkt der Vorderachse die Kurve durchläuft und die Tangente somit die Richtung angibt, in die der Leiterwagen fährt. Die Kurvennormale entspricht der Vorderachse und steht auf die Kurven-Tangente senkrecht. Ihre Gleichung lautet — $f'(x_0) \neq 0$ vorausgesetzt —

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

(c) Die Kurven-Normale in einem weiteren Punkt $P_1 = (x_1, f(x_1))$ entspricht der Hinterachse. Die beiden Normalen in P_0 und P_1 schneiden einander in einem Punkt P_N, dessen Koordinaten (x_N, y_N)

man aus den beiden Gleichungen

$$y_N - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x_N - x_0),$$
$$y_N - f(x_1) = -\frac{1}{f'(x_1)}(x_N - x_1)$$

bestimmt. Durch Elimination von y_N ergibt sich

$$x_N \frac{f'(x_0) - f'(x_1)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)f'(x_1)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + f'(x_0) - x_0 \frac{f'(x_1) - f'(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

(d) Wenn der Punkt P_1 auf der Kurve gegen den Punkt P_0 wandert, d.h. für $x_1 \to x_0$, strebt der Punkt P_N gegen einen Punkt $P_M = \lim_{x_1 \to x_0} P_N$, genannt „Krümmungsmittelpunkt für den Kurvenpunkt P_0". Seine Koordinaten ergeben sich durch den Grenzübergang $x_1 \to x_0$. Dabei gehen die Differenzenquotienten der vorigen Gleichung in Ableitungen über, und es gilt

$$x_M \cdot f''(x_0) = f'(x_0)^3 + f'(x_0) - x_0 f''(x_0) \implies x_M = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)} \cdot (1 + f'^2(x_0))$$
$$y_M = f(x_0) + \frac{1}{f''(x_0)} \cdot (1 + f'^2(x_0)).$$

Hier haben wir $f''(x_0) \neq 0$ vorausgesetzt (andernfalls wandert der Punkt P_M ins Unendliche).

(e) Der Abstand $\rho = \overline{P_M P_0}$ (der *Krümmungsradius der Kurve im Punkt* P_0) hat den Wert

$$\rho = \frac{(1 + f'^2(x_0))^{3/2}}{|f''(x_0)|}.$$

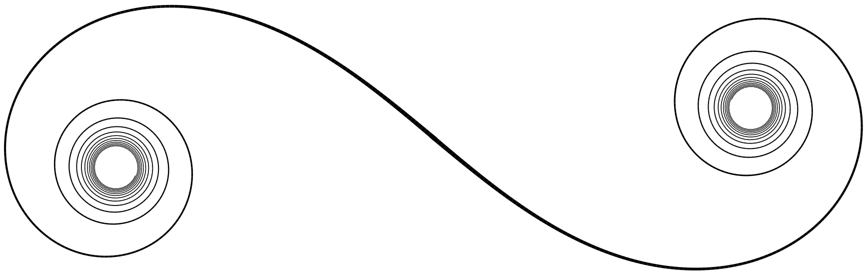
Sein reziproker Wert $\frac{1}{\rho}$ heißt *Krümmung* der Kurve im Punkt P_0. Wenn $|f'(x_0)|$ sehr klein ist, d.h. wenn die Kurventangente im Punkt P_0 parallel oder fast parallel zur x-Achse ist, ist die Krümmung $\frac{1}{\rho}$ also gleich bzw. sehr nahe bei $|f''(x_0)|$.

(f) In jedem Punkt eines Kreises ist dessen Radius der Krümmungsradius.

(g) Eine Ellipse mit den Halbachsen a und b hat in den Scheiteln Krümmungsradien der Längen b^2/a bzw. a^2/b (man braucht nur den Krümmungsradius im Punkt $(0,b)$ zu berechnen; den Krümmungsradius im Punkt $(a,0)$, in dem die Tangente parallel zur y-Achse ist, erhält man, wenn man die Ellipse um 90 Grad dreht, d.h. die Halbachsen a und b vertauscht.)

(h) Bestimmung der Krümmungsradien im Punkt $(0,0)$ für die Kurven $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^{2/3}$.

(i) *Zur Motivation:* Straßen sind in Kurven normalerweise so gebaut, dass die Krümmung (die zu Kurvenbeginn 0 ist) proportional zur durchfahrenen Wegstrecke größer bzw. kleiner wird, damit ein Autofahrer das Lenkrad nicht plötzlich herumreißen muss. Eine Kurve, die diese Eigenschaft exakt erfüllt, heißt *Klothoide*:



Die Straßen-Kurve würde also mit einem Klothoidenbogen (vom Mittelpunkt der Klothoide weg, in dem die Krümmung noch 0 ist) beginnen, in einem Kreisbogen mit derselben Krümmung wie am Ende des Klothoidenbogens weiter führen, und dann in einem mit der gleichen Krümmung beginnenden Klothoidenbogen bis zum Mittelpunkt der Klothoide schließen. Ausserdem erreicht man so, — und das ist besonders für die Kurventrassierung von Eisenbahnstrecken von Bedeutung — dass die im Fahrzeug als Querkraft spürbare Zentrifugalkraft nicht ruckartig einsetzt, sondern in der Kurve stetig von Null bis zur Maximalstärke im Kreisbogen anwächst.

Mögliche Erweiterungen der Fragestellung: Krümmung von weiteren Kurven, z.B. der Hyperbel und der Graphen verschiedener Funktionen (trigonometrische Funktionen, Exponentialfunktion, Hyperbelfunktionen) in ausgezeichneten Punkten.

Mögliche Literatur:

[1] BRONSTEIN, I.N., SEMENDJAJEW, K.A.: *Taschenbuch der Mathematik*, B.G. Teubner, Leipzig 1981.

[2] *http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/magazin/geschichten/kruemmung.pdf*

[3] *http://de.wikipedia.org/wiki/klothoide*, und weitere Google-Suchergebnisse für Krümmung, curvature und Klothoide

Das Redaktionsteam wünscht allen Kolleginnen und Kollegen besinnliche und erholsame Weihnachtsfeiertage.