MATHE-BRIEF

November 2011 — Nr. 19

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http://www.oemg.ac.at/Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Die Internationale Mathematik-Olympiade.

Logo der IMO 2011

Die Internationale Mathematik-Olympiade (IMO) hat im Sommer 2011 zum 52. Mal stattgefunden. Wir möchten im Folgenden einige Informationen dazu geben und zwei Aufgaben der letzten IMO vorstellen.

Die IMO findet seit 1959 jährlich (mit einer Ausnahme) statt. Jedes Land entsendet jetzt sechs Teilnehmer/innen. Der Wettbewerb findet an zwei aufeinanderfolgenden Vormittagen statt, an denen jeweils drei Aufgaben in 4,5 Stunden zu lösen sind. Jede Aufgabe wird mit 0–7 Punkten bewertet. An ca. 50% der Teilnehmer/innen werden Gold-, Silber- und Bronzemedaillen vergeben, und zwar im Verhältnis 1 : 2 : 3. Weiters werden Ehrende Anerkennungen (Honourable Mentions) an alle Teilnehmer/innen vergeben, die zumindest eine Aufgabe vollständig gelöst haben, aber keine Medaille gewinnen. Die Anzahl der teilnehmenden Länder ist von ursprünglich sieben auf über hundert im Jahr 2011 angewachsen.

Die österreichischen Teilnehmer/innen erreichen bei der IMO immer wieder beachtenswerte Erfolge. Bei der heurigen 52. IMO, die im Zeitraum 12.7.—24.7.2011 in Amsterdam stattfand (siehe www.imo2011.nl/), erreichten alle österreichischen Teilnehmer zumindest eine Ehrende Anerkennung für eine vollständig gelöste Aufgabe. Bernd Prach (BRG Graz Keplerstraße, 6. Kl.) und Adrian Fuchs (BRG Vöcklabruck Schloss Wagrain, 8. Kl.) erhielten eine Silbermedaille, Georg Anegg (BG/BRG/SRG Innsbruck Reithmannstraße, 8. Kl.) und Martin Nägele (BG Schillerstraße Feldkirch, 8. Kl.) erreichten eine Bronzemedaille. Weiters erreichten Lucas Kletzander (Öffentliches Stiftsgymnasium Melk, 8. Kl.) und Roland Prohaska (GRG XIV Goethegymnasium Wien, 8. Kl.) je eine Ehrende Erwähnung. Besonders beeindruckend war im heurigen Jahr die mannschaftliche Leistung des österreichischen Teams. In der (inoffiziellen) Nationenwertung lag Österreich auf dem 36. Platz von 101 teilnehmenden Nationen.

Weitere Informationen zur Internationalen Mathematik-Olympiade finden Sie auf der Seite www.imo-official.org. Insbesondere findet man dort Aufgaben, Ergebnisse und Statistiken vergangener IMOs. Außerdem verweisen wir auf das immer wieder aktualisierte Werk [1] sowie auf die zugehörige Homepage www.imomath.com sowie auf die Internetforen www.mathlinks.ro und www.oemo.at.

Die folgende Aufgabe wurde bei der IMO 2011 in Amsterdam gestellt.

Aufgabe 1. Für jede Menge $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ von vier paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen, deren Summe $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ mit s_A bezeichnet werde, sei n_A die Anzahl der Paare (i, j) mit $1 \le i < j \le 4$, für die $a_i + a_j$ die Zahl s_A teilt.
Man bestimme unter all diesen Mengen A diejenigen, für die n_A maximal ist.

Lösung . Wir ordnen die Zahlen a_i $(1 \le i \le 4)$ aufsteigend der Größe nach und ändern ihre Bezeichnungen auf a, b, c, d, sodass $a < b < c < d$. Ihre Summe ist $s_A = a + b + c + d$. Die 'Paarsummen', die s_A möglicherweise teilen, sind

$$\begin{array}{ccc} a+b & a+c & a+d \\ c+d & b+d & b+c. \end{array}$$

Diese Zusammenstellung von „Komplementärsummen“ hat einen besonderen Grund: wenn eine von ihnen (nennen wir sie u) die Summe s_A teilt, dann teilt sie auch die Komplementärsumme $s_A - u$.

Zwei Paarsummen fallen als mögliche Teiler von s_A gleich weg: wenn $b+d$ ein Teiler von s_A wäre, dann auch von $a+c$; das ist unmöglich wegen $a+c < b+d$. Aus dem gleichen Grund kann $c+d$ kein Teiler von s_A sein. Daraus folgt $n_A \leq 4$.

Damit bleibt uns die Hoffnung, Zahlen zu finden, für die $n_A = 4$, das heißt

$$a+b \mid s_A \quad \text{und damit} \quad a+b \mid c+d, \tag{1}$$
$$a+c \mid b+d, \tag{2}$$
$$a+d \mid b+c, \tag{3}$$
$$b+c \mid a+d. \tag{4}$$

Wenn das möglich ist, folgt aus (3) und (4) sofort $a+d = b+c$ und

$$s_A = 2(a+d) = 2(b+c)$$
$$d = b+c-a. \tag{5}$$

Wenn (2) zutrifft, dann gibt es eine ganze Zahl $p > 1$ derart, dass

$$\begin{aligned} p(a+c) &= b+d \\ &= 2b+c-a \qquad \text{wegen (5)} \\ (p+1)a+(p-1)c &= 2b. \qquad (6) \end{aligned}$$

Für $p > 2$ kann (6) auf keinen Fall zutreffen, weil $2c > 2b$ ist. Damit erhalten wir für $p = 2$

$$3a+c = 2b \tag{7}$$
$$a+c = 2b-2a. \tag{8}$$

Jetzt bleibt uns noch (1) zu berücksichtigen: Es muss eine ganze Zahl $q > 1$ geben derart, dass

$$\begin{aligned} q(a+b) &= s_A = 2b+2c \qquad (9) \\ &= 3a+3c \qquad \text{wegen (7)} \\ &= 6b-6a \qquad \text{wegen (8)} \\ (q+6)a &= (6-q)b. \qquad (10) \end{aligned}$$

In (10) probieren wir die verschiedenen möglichen Werte von q durch:

- $q = 2$ liefert $8a = 4b$, $b = 2a$ und wegen (7) $c = 2b - 3a = a$ im Widerspruch zu $a < c$.
- $q = 3$ liefert $9a = 3b$, $b = 3a$ und wieder wegen (7) $c = 3a = b$ im Widerspruch zu $b < c$.
- $q = 4$ liefert $10a = 2b$, $b = 5a$, $c = 7a$ wegen (7) und $d = 11a$ wegen (5).
  Tatsächlich ist $A = \{a, b, c, d\} = \{a, 5a, 7a, 11a\}$, $s_A = 24a$ eine Lösung der Aufgabe.
- $q = 5$ liefert $b = 11a$, $c = 19a$ wegen (7) und $d = 29a$ wegen (5).
  Auch $A = \{a, b, c, d\} = \{a, 11a, 19a, 29a\}$, $s_A = 60a$ ist eine Lösung der Aufgabe.

Damit sind alle Möglichkeiten erschöpft und (mit $a = 1, 2, 3, \ldots$) alle Lösungen gefunden. □

Die folgende Aufgabe 2 der IMO 2011 besticht durch ihre unkonventionelle Fragestellung. Sie bereitete vielen „erfolgsgewohnten“ Nationen unerwartete Probleme, während die österreichische Mannschaft hier mit zwei nahezu vollständigen und zwei Teillösungen die vierthöchste Gesamtpunktezahl erreichte.

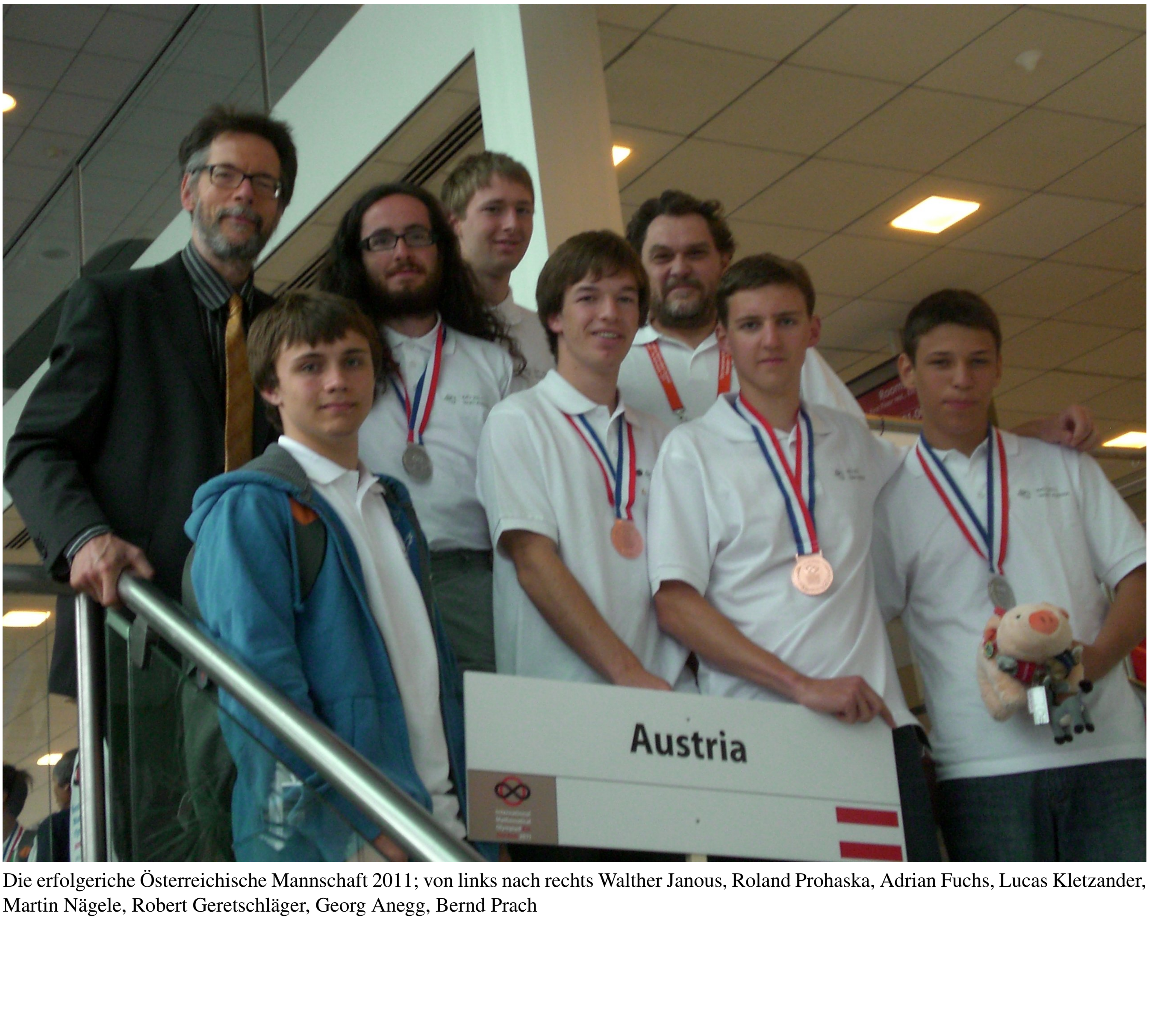
Aufgabe 2. Sei $\mathcal{S}$ eine endliche Menge von mindestens zwei Punkten in der Ebene. Dabei wird angenommen, dass keine drei Punkte von $\mathcal{S}$ kollinear sind. Als *Windmühle* bezeichnen wir einen Prozess der folgenden Art. Wir starten mit einer Geraden ℓ, die genau einen Punkt $P \in \mathcal{S}$ enthält. Die Gerade ℓ wird im Uhrzeigersinn um den Drehpunkt P so lange gedreht, bis sie zum ersten Mal auf einen weiteren Punkt aus $\mathcal{S}$ trifft, der mit Q bezeichnet sei. Die Gerade wird weiter im Uhrzeigersinn mit Q als neuem Drehpunkt gedreht, bis sie wieder auf einen Punkt aus $\mathcal{S}$ trifft. Dieser Prozess wird unbegrenzt fortgesetzt. Man beweise, dass für geeignete Wahl eines Punktes $P \in \mathcal{S}$ und einer Ausgangsgeraden ℓ, die P enthält, die resultierende Windmühle jeden Punkt aus $\mathcal{S}$ unendlich oft als Drehpunkt hat.

Eine Lösung zu dieser Aufgabe, wie auch die übrigen Aufgaben der heurigen IMO und ihre Lösungen findet man unter www.math.leidenuniv.nl/~desmit/pop/2011_imo_final6.pdf, deutschsprachige Lösungen (auch aus früheren Jahren) sind zu finden unter www.brgkepler.at/~geretschlaeg/page_1_d.htm. Abschließend soll betont werden, dass bei Wettbewerben wie der IMO einerseits mathematische Ernsthaftigkeit verlangt wird — so finden sich etwa viele spätere Fields-Medaillengewinner unter den mit Preisen Ausgezeichneten, andererseits aber auch der Gedanke der Völkerverständigung eine tragende Rolle spielt und viele lebenslange Freundschaften und Zusammenarbeiten von solchen Wettbewerben ausgingen …

Gilbert Helmberg, Walther Janous, Gerhard Kirchner

Literatur

[1] D. Djukić, V. Janković, I. Matić, N. Petrović: *The IMO Compendium: A Collection of Problems Suggested for The International Mathematical Olympiads: 1959-2009*, Second Edition, Springer, New York, 2011



Die erfolgeriche Österreichische Mannschaft 2011; von links nach rechts Walther Janous, Roland Prohaska, Adrian Fuchs, Lucas Kletzander, Martin Nägele, Robert Geretschläger, Georg Anegg, Bernd Prach