MATHE-BRIEF

Juli 2011 — Nr. 16

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Liebe Kolleginnen und Kollegen,

der folgende Beitrag entbehrt des tierischen Ernstes. Dafür berichtet er von einer Begebenheit, die sich tatsächlich zugetragen hat und von einer unerwartet segensreichen Anwendung der Mathematik.

Ein Mathematiker im Hotel

„. . . und eine Flasche Wein aufs Zimmer!“ stand im diesjährigen Angebotsbrief unseres Schi-Hotels. Nun hatten wir zwar etliche Flaschen Wein in unserem Keller, aber eine solche aufs Zimmer war etwas besonderes. Außerdem hatte es uns die letzten zwei Jahre dort im Zimmer 26 gut gefallen, also fixierten wir die Bestellung.

Zimmer 26 war nicht, wo ich es in Erinnerung hatte, und das jetzige Zimmer 26 gefiel uns bei weitem nicht so gut. Offenbar war die Nummerierung verändert worden. „Aber doch schon vergangenes Jahr!“ machte mich der Wirt aufmerksam. — Ja, ja, das stimmt, dämmerte es mir, aber im Gegensatz zu heuer war damals das ehemalige Zimmer 26 doch noch frei gewesen und keine Schwierigkeit aufgetreten. Nach einer kurzen mentalen Rekonstruktion meines Erinnerungsfehlers versuchte ich beschämt dem Wirt den Grund für meine Fehl-Erinnerung zu erläutern: „Sehen Sie, ich bin Mathematiker. Als das nette Zimmer 26 noch Zimmer 26 war, habe ich mir extra eingeprägt, dass 26 das Doppelte der Primzahl 13 ist, um die Nummer ja nicht zu vergessen. Das habe ich tatsächlich gut behalten, besser als die Erinnerung an die Umnummerierung Ihrer Zimmer vom vergangenen Jahr.“ Ich habe den Verdacht, beim Wirt darauf ein leichtes Kopfschütteln beobachtet zu haben. Jedenfalls hat er es zuwege gebracht, ein annähernd ebenso nettes Zimmer für uns aufzutreiben. Eine Flasche Wein war nicht im Zimmer, aber das brauchte ja auch nicht schon am ersten Tage der Fall zu sein, schon gar nicht nach solchen Umständlichkeiten.

Einige Tage darauf — ich versuchte gerade, im Bademantel unbemerkt in Richtung Hallenbad an der Rezeption vorbeizukommen, an der sich der Wirt stirnrunzelnd mit einem weiteren stirngerunzelten Angehörigen seines Stabes unterhielt — fiel das Auge des Wirtes dabei auf mich und nagelte mich noch auf der ersten Treppenstufe fest: „Sie sind doch Mathematiker? In meinem Öltank kann ich zwar mit einem Stecken den Ölstand messen, aber wieviel drin ist und ob das genug ist, weiß ich trotzdem nicht. Können Sie das nicht ausrechnen?“ Seine Beschreibung übersetzte ich für mich rasch in einen horizontal auf einer Mantellinie liegenden Kreiszylinder, für den man das Ölvolumen eines Segmentes der Höhe h berechnen sollte — mit einigen Integrationen nichts leichter als das. Ich versprach, mich im Schwimmbad dieser Aufgabe zu widmen. Mit einem bei der Rezeption ausgeliehen Bleistift und einem im Schwimmbad durch zügellos hineinspringende Jugendliche etwas feucht gewordenen Papierblatt glückte dies im Prinzip ohne wesentliche Schwierigkeiten. Bei der

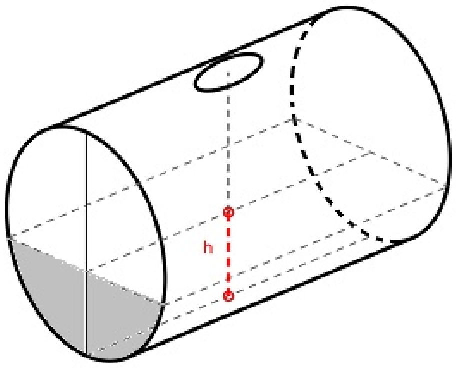
Rückkehr ins Zimmer präsentierte ich dem Wirt stolz die Formel. Einen Taschenrechner müsste er aber schon dafür benützen, und zwar einen, der die Arcuscosinusfunktion berechnen könnte. Diese Mitteilung dämpfte die anfängliche Zufriedenheit meines Gegenübers etwas, aber nach kurzem Besinnen erklärte er, einen Cousin zu besitzen, der seinerseits vermutlich über so ein Instrument verfüge. Mit dem Versprechen, die Formel gut aufzuschreiben, begab ich mich in mein Zimmer.

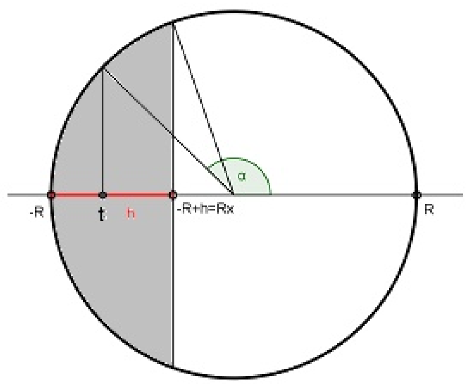
Dort fiel mir zunächst auf, dass die Formel einen Fehler enthalten musste, da bei einer Testberechnung eine negative Ölmenge herauskam. Diesen Fehler und einen vergessenen Faktor 2 konnte ich beheben, aber die Reaktion des Wirtes hatte in mir Zweifel genährt, ob dieser mit einer Formel, die einen Arcuscosinus enthielt, je etwas anfangen können würde. Jedenfalls musste ich eine Situation vermeiden, in der er sich jedesmal, wenn sein Stecken eine gewisse Öl-Höhe anzeigte, telefonisch an mich wenden würde mit der Bitte, doch kurz die noch vorhandene Ölmenge mit oder ohne Arcuscosinusfunktion zu berechnen. Ein Ausweg wäre, auf meinem Laptop ein Programm für die Berechnung zu entwickeln - aber das müsste ich dann auf seinen Rezeptionscomputer übertragen, und es war fraglich, ob dieser dann nicht jeweils an Stelle der Hotelrechnung für die Gäste den Tankinhalt ausgeben würde. Das Risiko und die Verantwortung hiefür schien mir zu groß. Schließlich kam mir die Königsidee, diesen Tankinhalt für je 5 cm gemessenen Ölstand auszurechnen, in einer Tabelle aufzuschreiben und diese Tabelle (im Zimmer kamen auch keine Wasserflecken darauf) dem Wirt auszuhändigen.

Am Tag darauf fand ich in unserem Zimmer eine Flasche Wein. Ich bedankte mich natürlich und versicherte, das sei doch nicht nötig gewesen. Aber ich weiß bis heute noch nicht, ob das die ursprünglich verheißene oder eine aus Dankbarkeit gespendete Flasche Wein war. Ich habe sie deshalb nachhause mitgenommen und angesichts der ungeklärten Situation vorläufig zu den anderen in meinem Keller gestellt.

Für die Leser, die neugierig sind, wie denn die Formel für den Öl-Inhalt des Tanks lautet wie folgt. Die Abmessungen des Tanks (eines liegenden Kreiszylinders) sind (in Metern):

Radius der kreisförmigen Seitenflächen	$R = 1,5$
Länge des Zylinders	$L = 9$
Gemessene Höhe des Ölspiegels	h
Differenz zur halben Zylinderhöhe (=Radius des Zylinders)	$-R+h = R\cdot x$





Das Heizöl im Tank füllt geometrisch ein Prisma mit der Seitenlänge L und einem Kreissegment als Grundfläche; der Radius des Kreissegmentes ist R, seine Höhe ist h. Der Öl-Inhalt ist das Volumen dieses Prismas, also Grundfläche mal Seitenlänge. Allerdings ist dabei die Fläche des Kreissegmentes noch zu berechnen, was auf mindesten zwei Weisen geschehen kann.

Eine erste Lösung dieser Aufgabe ist zugeschneidert auf Liebhaber der Analysis, die dabei ihren Integrations-Hobbies frönen können. Die Fläche F des halben Kreissegmentes ist nämlich das Integral

$$F = \int_{-R}^{-R+h} \sqrt{R^2 - t^2}\, dt.$$

Das Integral lässt sich am besten mit der Substitution

$$\begin{aligned} t &= R\cos\alpha \quad (\pi \geq \alpha \geq \arccos x) \\ dt &= -R\sin\alpha\, d\alpha \end{aligned}$$

lösen:

$$\begin{aligned} F &= -\int_{\pi}^{\arccos x} \sqrt{R^2 - R^2\cos^2\alpha} \cdot R\sin\alpha\, d\alpha = -R^2 \int_{\pi}^{\arccos x} \sqrt{1-\cos^2\alpha} \cdot \sin\alpha\, d\alpha \\ &= -R^2 \int_{\pi}^{\arccos x} \sin^2\alpha\, d\alpha \\ &= -R^2 \int_{\pi}^{\arccos x} \tfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\, d\alpha, \end{aligned}$$

wenn man $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$ benutzt. In dieser Form lässt sich das Integral ausrechnen:

$$\begin{aligned} F &= \tfrac{1}{4}R^2 \sin 2\alpha \Big|_{\pi}^{\arccos x} + \tfrac{1}{2}R^2(\pi - \arccos x) \\ &= \tfrac{1}{2}R^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha \Big|_{\pi}^{\arccos x} + \tfrac{1}{2}R^2(\pi - \arccos x) \\ &= \tfrac{1}{2}R^2 \sin(\arccos x) \cdot \cos(\arccos x) + \tfrac{1}{2}R^2(\pi - \arccos x) \\ &= \tfrac{1}{2}R^2 \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} \cdot \cos(\arccos x) + \tfrac{1}{2}R^2(\pi - \arccos x) \qquad (\cos(\arccos x) = x) \\ &= \tfrac{1}{2}R^2\sqrt{1-x^2} \cdot x + \tfrac{1}{2}R^2(\pi - \arccos x). \end{aligned}$$

Wahrscheinlich wurde der Analysis-Liebhaber aber inzwischen überholt vom Geometer, der eine zweite Weise der Berechnung verwendet und kurz überlegt, dass F aus einem Kreissektor mit dem Zentriwinkel $\pi - \arccos x$ und dem Flächeninhalt $\frac{1}{2}R^2(\pi - \arccos x)$ besteht, der — im Falle eines negativen x — um ein Dreieck mit dem Flächeninhalt $\frac{1}{2}R^2 \cdot |x|\sqrt{1-x^2}$ vermindert, bzw. — im Falle eines positiven x — mit einem solchen Dreieck ergänzt wird. Beide kommen jedenfalls übereinstimmend zum Schluss, dass der Tank noch

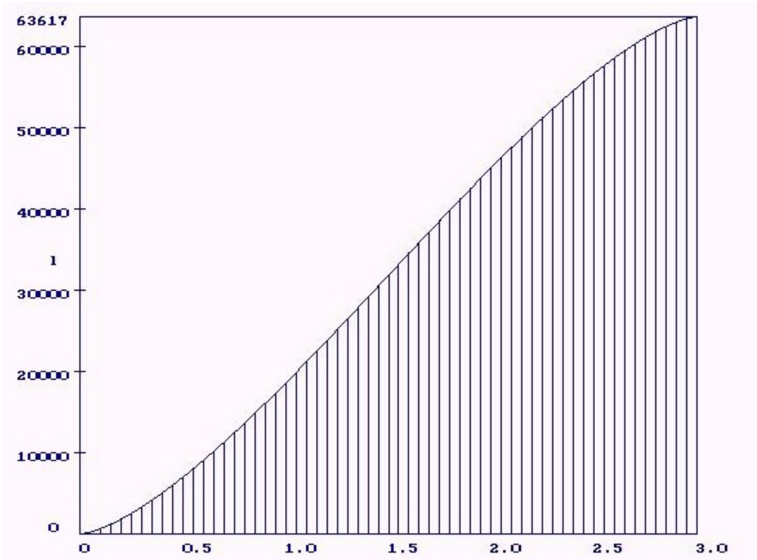
$$1000 \cdot L \cdot \left[R^2(\pi - \arccos\frac{h-R}{R}) + (h-R)\sqrt{R^2-(h-R)^2)}\right]$$

Liter Heizöl enthält. Wenn er voll ist (d.h. $h = 2R = 3$), fasst er 63617 l Heizöl. Hier ist eine Tabelle des Heizölinhaltes $H(h)$ in Litern (gerundet) bei einer gemessenen Ölstandshöhe h in Metern, mit der der Wirt sicher mehr anstellen konnte als mit der Formel.

h	H	h	H	h	H	h	H	h	H
0,05	231	0,35	4150	0,65	10154	0,95	17298	1,25	25090
0,10	651	0,40	5043	0,70	11281	1,00	18563	1,30	26425
0,15	1189	0,45	5984	0,75	12437	1,05	19843	1,35	27765
0,20	1821	0,50	6969	0,80	13619	1,10	21138	1,40	29111
0,25	2532	0,55	7995	0,85	14824	1,15	22445	1,45	30459
0,30	3311	0,60	9058	0,90	16052	1,20	23763	1,50	31809

Für eine Ölstandshöhe $h > 1,50$ ist $H(h) = 63617 - H(3-h)$, z.B. $H(2,35) = 63617 - H(0,65) = 63617 - 10154 = 53463$.

Für alle daran Interessierten zeigt die Figur noch den Graphen der Funktion $H(h)$ (in Litern l) in Abhängigkeit von der Ölstandshöhe h (in Metern).



Erholsame Ferien wünschen allen Kolleginnen und Kollegen bis zum Wieder-Mathematisieren im Oktober 2011,

G. Helmberg und die Redaktion.