Österreichische Mathematische Gesellschaft

MATHE-BRIEF

Jänner 2026 — Nr. 138

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

FUNKTIONENTHEORIE - EINE MATHEMATISCHE ENTDECKUNG

Das 19. Jahrhundert war geprägt von Forschungen und Entwicklungen, die bis heute Spuren hinterlassen haben. Wir nennen nur einige Beispiele, wie die Entdeckung und Nutzung elektromagneischer Wellen (Funk, Radio, später Fernsehen und Handys), das Experiment von Michelson, das zur Entwicklung der Relativitätstheorie führte, und die Entdeckung der Radioaktivität. Technologisch sei erinnert an den Bau von Dampfmaschinen und Motoren, der Industrie und Alltag veränderte. Auch die Kulturwissenschaften machten große Fortschritte, etwa die Entzifferung der Hieroglyphen, die Ausgrabungen in Troja und an anderen Stätten und die Entdeckung der indoeuropäischen Sprachfamilie, die zeigte, dass Bengali und Isländisch verwadte Sprachen sind. Diese Entdeckungen und Forschungen sind weitgehend im Wissen vieler Menschen präsent. Aber was hat die Mathematik im 19. Jahrhundert gebracht?

Dieser Aufsatz versucht ein Forschungsgebiet vorzustellen, das Funktionentheorie genannt wurde. Die Mathematiker Augustin-Louis CAUCHY (1789–1857), Georg Friedrich Bernhard RIEMANN (1826–1866) und Karl WEIERSTRASS (1815–1897) sind hier zu nennen. Nötig ist nur die Kenntnis der Begriffe Differenzierbarkeit, Konvergenz und der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

Eine reelle Funktion $f\ :]a,b[\to\mathbb{R}$ ist differenzierbar im Punkt $x_0\in]a,b[$, wenn es eine affin-lineare Funktion $t(x)=a(x-x_0)+f(x_0)$ mit folgender Eigenschaft gibt: Zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es ein $\delta>0$, so dass aus $|x-x_0|<\delta$ folgt $|f(x)-t(x)|\le\varepsilon|x-x_0|$. Dann nennt man a die (erste) Ableitung von f im Punkt x_0. Man kann auch definieren $a=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Die Ableitung a wird als $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ geschrieben.

Nun ersetze man die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ durch die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Eine Teilmenge G von $\mathbb{C}$ ist *offen*, wenn es zu jedem Punkt $z_0\in G$ eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt z_0 und Radius $\rho>0$ gibt, die in G liegt. Man betrachtet dann eine offene Teilmenge $G\subseteq\mathbb{C}$ und eine Funktion $f:G\to\mathbb{C}$, die jeder Zahl $z=x+iy\in G$ eine Zahl $w=u(x,y)+iv(x,y)$ zuordnet. Die Funktion f ist im Punkt $z_0=x_0+y_0$ *differenzierbar*, wenn es eine affin-lineare Funktion $t(z)=\alpha(z-z_0)+f(z_0),\alpha=a+ib$ gibt mit der Eigenschaft: Zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es ein $\delta>0$, so dass aus $|z-z_0|<\delta$ folgt $|f(z)-t(z)|\le\varepsilon|z-z_0|$. Dann heißt $\alpha=f'(z_0)=\frac{df}{dz}(z_0)$ die (erste) Ableitung von f im Punkt $z_0=x_0+iy_0$.

Zwei Annäherungen sind bemerkenswert, nämlich bei festem y_0 der Weg $x\to x_0$ und bei festem x_0 der Weg $y\to y_0$. Im ersten Fall erhält man

$$\begin{aligned}&|f(z)-(a+ib)(x-x_0)-f(z_0)|\\=\ &|u(x,y_0)-a(x-x_0)-u(x_0,y_0)+i(v(x,y_0)-b(x-x_0)-v(x_0,y_0))|\le\varepsilon|x-x_0|.\end{aligned}$$

Daraus folgen die Ungleichungen

$$|u(x,y_0)-a(x-x_0)-u(x_0,y_0)|\le\varepsilon|x-x_0|,\quad |v(x,y_0)-b(x-x_0)-v(x_0,y_0)|\le\varepsilon|x-x_0|.$$

Das bedeutet, dass die Funktionen $x \to u(x, y_0)$ und $x \to v(x, y_0)$ reell differenzierbar sind, und man schreibt

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0), \qquad\qquad b = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Die Schreibweise ∂ statt d wird als *partielle* Ableitung bezeichnet, da die zweite Variable y unverändert bleibt. Im zweiten Fall (man beachte $i^2 = -1$) erhält man die Ungleichungen

$$|u(x_0, y) + b(y - y_0) - u(x_0, y_0)| \leq \varepsilon |y - y_0|, \quad |v(x_0, y) - a(y - y_0) - v(x_0, y_0)| \leq \varepsilon |y - y_0|.$$

Daher ist

$$a = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \qquad\qquad b = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Daraus folgen die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \qquad\qquad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0),$$

die als Gleichungen von Cauchy und Riemann bekannt sind. Das verlockt gerade zu, Beispiele zu rechnen:

(1) $f(z) = z^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$. Dann ist $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy = -\frac{\partial v}{\partial x}$.
(2) $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$. Dann ist $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ wird *analytisch* genannt, wenn zu jedem Punkt $z_0 \in G$ einen Radius $R > 0$ gibt (es ist auch $R = \infty$ zugelassen.), so dass für alle $z \in G$ mit $0 \leq |z - z_0| < R$ die Gleichung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

erfüllt ist. Die Reihe rechts wird eine *Potenzreihe* genannt. Jede Polynomfunktion $p(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ ist auf $G = \mathbb{C}$ analytisch. Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ ist auf $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ analytisch, denn

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_0 + z - z_0} = \frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z - z_0}{z_0})^n$$

ist für $|z - z_0 < | < |z_0|$, d.h. $R = |z_0|$, konvergent.

Vertraut man darauf (wie zu Eulers Zeiten üblich), dass man eine Potenzreihe gliedweise differenzieren darf (was man beweisen kann), so erhält man für die k-te Ableitung

$$f^{k(n)}(z) = \sum_{n=0} a_n n(n-1) \cdots (n-k+1)\,(z - z_0)^{n-k}.$$

Setzt man hier $z = z_0$, so ergibt sich die schöne Formel

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{n(n-1) \cdots (n-k+1)}.$$

Da diese Formel auch für Polynome gilt, kann sie vielleicht schon für manchen bekannt sein.

Bemerkenswert war aber folgendes Ergebnis: Ist $f : G \to \mathbb{C}$ auf der offenen Menge G differenzierbar, so ist sie eine auf G analytische Funktion. Dieses Ergebnis war nicht leicht zu beweisen, hat aber dazu beigetragen, dass diese Funktionen als besonders „schöne" Funktionen empfunden wurden, sodass die Theorie dieser besonderen differenzierbaren Funktionen oft einfach Funktionentheorie genannt wurde!

Im reellen Bereich ist es möglich, dass die die Ableitung einer differenzierbaren Funktion nicht mehr in allen Punkten differenzierbar ist. Das einfache Beispiel $f(x) = x^2$ für $x \geq 0$ und $f(x) = -x^2$ für $x \leq 0$ zeigt dies. Die Funktion $f'(x)$ ist im Punkt $x = 0$ nicht differenzierbar.

Wie gesagt, der Beweis ist nicht ganz leicht und erfordert den Begriff des *Kurvenintegrals*. Sei $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $0 \leq t \leq 1$ eine differenzierbare Kurve im Gebiet G, so setzt man

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\,\dot{\gamma}(t)dt.$$

Hier ist $\dot{\gamma}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$, und die Ableitung nach der Variablen t (steht für lat. *tempus*, „Zeit“) wird durch einen darüber gesetzten Punkt geschrieben.

Man erreicht nach vielen Mühen die *Integralformel von Cauchy*: Ist die Funktion f auf G differenzierbar und $\kappa(t) = z_0 + r(\cos 2\pi t + i \sin 2\pi t)$, so dass alle Punkte z mit $|z - z_0| \leq r$ im von κ begrenzten Kreis und in G liegen, so gilt für diese Punkte z die Formel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\kappa \frac{f(w)dw}{w - z}.$$

Es ist üblich, bei geschlossenen Kurven (hier $\kappa(0) = \kappa(1)$) das Zeichen $\oint$ zu verwenden. Wenn man wiederum die Vertauschung von Reihe und Integral erlaubt, ist es leicht zu sehen, dass die Formel von Cauchy für analytische Funktionen richtig ist. Man benötigt dazu

$$\oint_\kappa \frac{dw}{w - z_0} = 2\pi i \quad \text{und} \quad \oint_\kappa (w - z_0)^n dw = 0,$$

denn $\frac{(z-z_0)^{n+1}}{n+1}$ ist die Stammfunktion von $(z - z_0)^n$ und die Kreislinie κ eine geschlossenen Kurve. Die erste Gleichung ist ebenfalls leicht zu zeigen, denn

$$\oint_\kappa (z - z_0)^n dw = \int_0^1 \frac{2\pi(-\sin 2\pi t + i \cos 2\pi t)}{\cos 2\pi t + i \sin 2\pi t} dt = 2\pi i.$$

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n (z - z_0)^n$, dann erhält man

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\kappa \frac{f(w)dw}{(w - z_0)^{n+1}}.$$

Die Formel von Cauchy gilt aber für differenzierbare Funktionen und zeigt, dass diese analytisch sind. Es ist nämlich

$$\frac{f(w)}{w - z} = \frac{f(w)}{(w - z_0)(1 - \frac{z - z_0}{w - z_0})} = \sum_{n=0}^\infty \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n$$

fast schon eine Potenzreihe. Im weiteren nehmen wir an, dass Reihenentwicklung und Integration vertauschbar sind! Da eine analytische Funktion beliebig oft differenzierbar ist, sind auch die Funktionen $u = u(x, y)$ und $v = v(x, y)$ beliebig oft diefferenzierbar. Daher folgt aus den Cauchy-Riemannschen Gleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Daraus und analog folgen die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Das kann der Anlass sein, weitere Übungsaufgaben zu rechnen.[1]

F. Schweiger

[1]Diese Darstellung ist als Beispiel für Mathematik im Expository Style zuverstehen, ein Versuch, mathematische Inhalte verständlich zu machen (dazu F. Schweiger, Mathematik im Expository Style. In: Karl Josef Fuchs (Hg.) Fachdidaktische Studien II. Aachen 2016: Shaker Verlag).