



ÜBER PLANETENBAHNEN, MONDBAHNEN UND „BUMERANGKURVEN“

In diesem Aufsatz wollen wir einige nicht-triviale Kuriositäten der Himmelsmechanik betrachten, die fächerübergreifend mathematisch, physikalisch und geometrisch angegangen werden. Er kann auch als Erweiterung des Mathebriefs Nr. 109 („Galileo Galilei, Kepler-Ellipsen und die Monde unserer Planeten“) gesehen werden. Wir benötigen die Kenntnis der drei Keplerschen Gesetze, auf deren korrekte mathematische Ableitung verzichtet wird. Einzelne Aspekte dieses Aufsatzes sind in [1] zu finden.

Eine missverständliche Ausdrucksweise. Wir lernen in der Schule, und das halbwegs zu Recht, dass gemäß dem ersten Keplerschen Gesetz die Planetenbahnen Ellipsen sind. In Wirklichkeit sind jedoch auch andere Himmelskörper, insbesondere die Monde der Planeten, mitbeteiligt an durchaus komplexeren, dreidimensionalen Raumbahnen – und das in besonderem Maße bei „unserem“ Erde-Mond-System.

Wir verwenden oft Sätze wie: Die Erde dreht sich um die Sonne bzw. der Mond dreht sich um die Erde; die Erde bewegt sich auf einer elliptischen Bahn um die Sonne, und der Mond bewegt sich auf einer elliptischen Bahn um die Erde. Das ist nicht ausreichend, ja manchmal irreführend, denn in Wirklichkeit handelt es sich keineswegs um eine Drehung im strengen geometrischen Sinn, bei der es ja eine Drehachse gibt, um die alle Punkte kreisen. Vielmehr liegt eine *krummlinige Translation* vor, die von einer Eigenrotation (dem *Spin*) überlagert wird. Der Spin ist eine Folge des Drehimpulserhaltungssatzes und bewirkt eine Kreiselbewegung, welche die Achsen der Planeten und Monde einigermaßen konstant gleichgerichtet hält. Planeten und Monde werden daher „herumgeschoben“.

Der gemeinsame Schwerpunkt. Ein Planet bewegt sich also krummlinig mit temporär fixer Achse – aber im Allgemeinen nicht exakt auf einer Ellipse, sondern er schlingert um einen Punkt herum, nämlich den gemeinsamen Schwerpunkt des Planeten mit den zugehörigen Monden. Dies mag beim Riesenplaneten Jupiter sehr wenig ausmachen, bei „unserem“ System mit einem zur Erde relativ großen Mond bewirkt es jedoch erwähnenswerte Abweichungen.

Zahlenbeispiel: Gemeinsamer Schwerpunkt des Erde-Mond-Systems.

$$r = d \cdot \frac{M_{\text{Mond}}}{M_{\text{Erde}} + M_{\text{Mond}}}.$$

Dabei ist d die jeweilige Entfernung der Mittelpunkte von Erde und Mond, also $356\,400\text{ km} \leq d \leq 406\,700\text{ km}$, und weiters gilt, dass die Erde die 81-fache Masse des Mondes hat. Mit dem Erdradius $R \approx 6\,371\text{ km}$ ist $4\,332 \leq r \leq 4\,943\text{ km}$, womit das Baryzentrum etwa $R - r \approx 1\,700\text{ km}$ (nämlich zwischen $1\,428\text{ km}$ und $2\,039\text{ km}$) unterhalb der Erdoberfläche in Richtung Mond liegt. \diamond

Die Bahn des gemeinsamen Schwerpunkts ist die Kepler-Ellipse. Wenn die Mondbahn – wie bei unserem Fall – aber nicht in der Ekliptik liegt (Abweichung derzeit $5,15^\circ$), werden die Bahnen der Schwerpunkte oder Mittelpunkte des Planeten und des Mondes aber aus der Ebene heraustreten und dreidimensionale Kurven bilden, wenngleich mit freiem Auge wohl kaum ein Unterschied zu erkennen sein mag.

Zahlenbeispiel: Wie groß ist der Maximalabstand z_{\max} der Erde bzw. des Mondes von der Ekliptik? Bei der Erde: Maximalabstand des Erdmittelpunkts vom gemeinsamen Schwerpunkt: $d_{\max} = 4\,943\text{ km}$, maximaler Winkel $\alpha = 5,15^\circ \Rightarrow z_{\max} = d_{\max} \sin \alpha \approx 443,6\text{ km}$

Beim Mond: Maximalabstand vom gemeinsamen Schwerpunkt $d_{\max} \leq 406\,700\text{ km} - 4\,943\text{ km}$, maximaler Winkel $\alpha = 5,15^\circ \Rightarrow z_{\max} = d_{\max} \sin \alpha \approx 36\,100\text{ km}$. \diamond

Die Geschwindigkeit v eines Körpers in einer Ellipsenbahn (halbe Hauptachse a , Abstand r vom Gravitationszentrum in einem der Brennpunkte) ist nach der „Vis-viva-Formel“

$$v = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}.$$

Der Gravitationsparameter μ ist proportional zur Masse der dominanten Gravitationsquelle.

Die Gleichung basiert auf dem Energieerhaltungssatz und dem Drehimpulserhaltungssatz, nach denen die Summe aus der kinetischen und potentiellen Energie beziehungsweise der Drehimpuls im Gravitationspotential konstant ist. Zur Ableitung der Formel siehe [2].

Bahngeschwindigkeit der Erde: Für die Sonne gilt $\mu_\odot = GM_\odot \approx 1,3271244 \times 10^{20} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$, der entsprechende Wert für die Erde (bei Mondberechnungen) ist 333 000 mal kleiner, weil die Sonnenmasse 333 000 Mal so groß ist wie jene der Erde. Die Bahngeschwindigkeit der Erde am sonnen-nächsten Punkt beträgt etwa 30,3 km/s, also 109 000 km/h ($a = 1 \text{ AE} \approx 1,496 \times 10^{11} \text{ m}$). \diamond

Die Gestalt der Kepler-Ellipse (Fig. 1): Aus der Vis-viva-Gleichung lässt sich bei gegebener Geschwindigkeit und gegebenem Abstand die Halbachsenlänge der Ellipse bestimmen:

$$a = 1 / \left(\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu} \right)$$

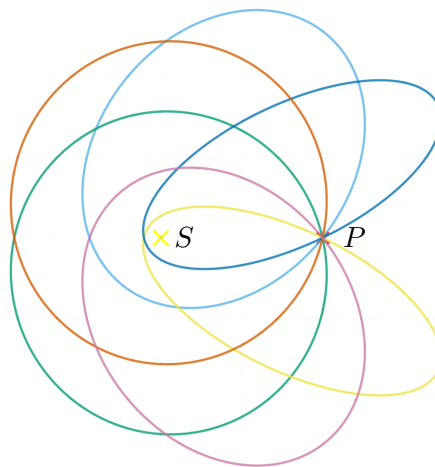


Fig. 1

Der Wert von a ist bemerkenswerterweise unabhängig von der Richtung des Geschwindigkeitsvektors ab. Diese Richtung bestimmt nur, wie bauchig die Ellipse ist.

Geometrisch gesprochen sucht man eine Ellipse mit einem gegebenen Brennpunkt F_1 und halber Hauptachse a , die durch ein Linienelement (Punkt P + Tangente t) gegeben ist. Die Lösung: Man spiegelt F_1 an t (Punkt G_1). F_2 liegt dann auf G_1P im Abstand $2a - r$. Rechnerisch lässt sich dieser Vorgang leicht nachvollziehen.

Man könnte hier von „Bumerangkurven“ sprechen: Man wirft ein Objekt in beliebigem Winkel ab und es kehrt verlässlich zurück. Zusätzlich bemerkenswert ist die Tatsache, dass nach dem dritten Keplerschen Gesetz die Umlaufzeit nur von der großen Halbachse der Bahnellipse abhängt. Unser Bumerang kehrt also stets nach derselben Zeit zurück! Siehe dazu die beiden Videos <https://tethys.uni-ak.ac.at/kepler-ellipsen.mp4> und <https://tethys.uni-ak.ac.at/kepler-ellipsen3d.mp4>. ◇

Die Überlagerung von Translation und Rotation. Wenn wir jetzt einen Punkt auf dem Planeten, speziell auf unserer Erde, betrachten, dann können wir Folgendes sagen: Die Erde bewegt sich in Richtung der Bahntangente der Ellipse, die der gemeinsame Schwerpunkt zwischen Mond und Erde vollführt, mit einer genau berechenbaren Momentangeschwindigkeit, und alle Punkte auf der Oberfläche der Erde und des Mondes vollführen gleichzeitig eine gleichmäßige Rotation um die jeweilige Achse. Im Wesentlichen wird also eine krummlinige Translation von einer Rotation überlagert.

Eine Momentane Schraubung. Wie bewegen sich geostationäre Punkte, die *gleichzeitig* der Bahnbewegung der Erde um die Sonne und dem Spin der Erde unterworfen sind – also etwa Punkte auf der Erdoberfläche oder geostationäre Satelliten? Nach dem Hauptsatz der räumlichen Kinematik (Chasles' Satz) bewegt sich ein Körper im Raum entweder nur entlang einer Translation oder aber entlang einer momentanen Schraubung um eine wohldefinierte Schraubachse. Diese Schraubachse ergibt sich hier aus der Rotationsachse der Erde und der Tangente der Bahnellipse des Erde–Mond-Schwerpunkts um die Sonne. Ihre Richtung weicht allerdings nur geringfügig von der Richtung der Bahntangente der Kepler-Ellipse ab.

Während sich der Schwerpunkt mit über 100 000 km/h bewegt, rotiert zum Beispiel ein Punkt am Äquator nur mit 1 670 km/h um die Erdachse. Dadurch wird sich nicht viel am Gesamtbild der Bewegung ändern. Ein geostationärer Satellit (Flughöhe knapp 36 000 km) umkreist die Erde mit immerhin etwa 11 000 km/h. Trotzdem ist seine Flugbahn heliozentrisch gesehen nur eine Art langgestreckter Wellenlinie um die Bahnellipse der Erde. Ganz Ähnliches gilt für den Mond: Er wandert zwar mit etwa 3 600 km/h um die Erde und ist fast 400 000 km entfernt, das reicht aber nicht aus, um seiner heliozentrischen Bahn „Schlaufen zu verpassen“.

Gibt es Monde mit verschlungenen heliozentrischen Bahnen? Bei der Suche nach solchen Monden wird man folgende Punkte besonders beachten müssen: Erstens muss der zugehörige Planet möglichst langsam sein – also nach dem dritten Keplerschen Gesetz weit von der Sonne entfernt sein – und zweitens sollte er möglichst massereich sein, damit die Monde ihn schnell umrunden müssen, um nicht „verschluckt“ zu werden. Beide Bedingungen erfüllt in wunderbarer Weise Jupiter mit seinen zahlreichen Monden, von denen vier besonders groß sind und nach Galilei benannt sind – nämlich die von Zeus geliebten oder eroberten mythologischen Personen Io, Europa, Gany-med und Kallisto.

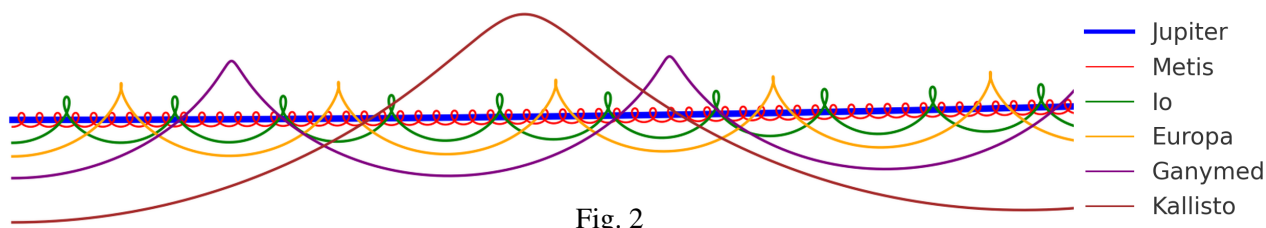


Fig. 2

Mond	a [km]	T [d]	$T(a)$ [d]	v_{Jup} [km/s]	v_{helio}^{\min} [km/s]	v_{helio}^{\max} [km/s]
Metis	128 000	0,29478	0,29479	31,43	18,36	44,50
Io	421 700	1,769	1,76914	17,34	4,27	30,41
Europa	671 100	3,551	3,55096	13,74	0,67	26,81
Ganymed	1 070 400	7,155	7,15455	10,88	2,19	23,95
Kallisto	1 882 700	16,69	16,69027	8,21	4,86	21,28

TABELLE 1. Bahnradius a , Umlaufzeiten T , berechnete Kontrollwerte $T(a)$ und Geschwindigkeiten der inneren Jupitermonde. Bahngeschwindigkeit des Jupiter $\approx 13,07$ km/s.

Die Rotationsachse des Jupiter steht fast senkrecht zur Ekliptik (Neigung ca. 3°), und die Bahnen seiner großen Monde liegen nahezu in Jupiters Äquatorebene. Besonders erwähnenswert ist zusätzlich der kleine innere Mond Metis, der im wahrsten Sinne des Wortes „herumzwirbelt“ (siehe Tabelle 1 und Fig. 2). Ganymed und Kallisto haben wegen ihrer größeren Entfernung zum Jupiter bereits gestreckte Bahnen, Europas Bahn hat bemerkenswerterweise beinahe Spitzen. Andere Monde mit verschlungenen Bahnen scheint es in unserem Sonnensystem nicht zu geben. Die Ähnlichkeit mit gewöhnlichen Radlinien ist bemerkenswert (wegen der großen Distanz des Jupiter erscheint die elliptische Bahnkurve lokal fast geradlinig).

Ein absurd erscheinendes Gedankenexperiment. Machen wir am Schluss ein absurd erscheinendes Gedankenexperiment. Nur wenig außerhalb der Bahn von Europa könnte es – theoretisch – einen fiktiven „Nullmond“ geben: einen Trabanten, dessen Relativgeschwindigkeit zu Jupiter genau der Bahngeschwindigkeit Jupiters um die Sonne entspricht. An bestimmten Punkten seiner Bahn wäre seine momentane heliozentrische Geschwindigkeit somit praktisch null.

Nehmen wir nun an, dieser „Nullmond“ würde plötzlich in hunderttausend Teilchen zerbersten (Fig. 3). Jedes Teilchen erhielte denselben Geschwindigkeitsbetrag (etwa 13 km/s, entsprechend

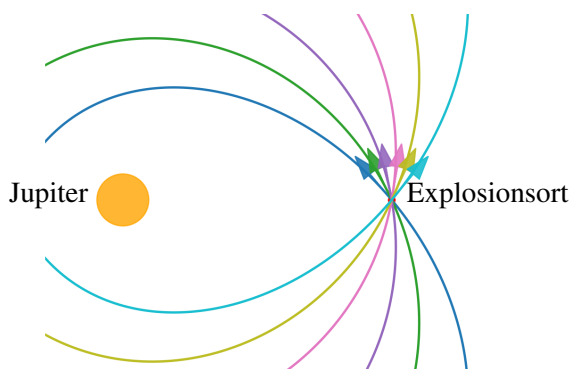


Fig. 3

der kreisförmigen Umlaufgeschwindigkeit in diesem Abstand), jedoch in zufällig verteilte Richtungen. Alle Teilchen starten also mit gleicher Bahnenergie, unterscheiden sich aber in der Orientierung ihrer Ellipsen.

Unter idealisierten Bedingungen – reines $1/r^2$ -Gravitationsfeld, keine Störungen, keine gegenseitige Gravitation – bewegen sich diese Teilchen auf Kepler-Ellipsen, die alle durch den Explosionsort verlaufen und identische Umlaufzeiten besitzen (rund 11 h). Genau aus diesem Grund tritt nach einer Umlaufzeit ein scheinbar paradoxes Phänomen auf: sämtliche Teilchen passieren gleichzeitig wieder den Punkt ihrer Entstehung. Das Ensemble der Trümmer verklumpt also durch den „Bumerang-Effekt“ exakt dort, wo die Explosion stattfand.

Natürlich ist dies kein realistisches Szenario – in der wirklichen Dynamik würden kleinste Unterschiede in Δv , Störungen durch Sonne und Nachbarmonde oder gegenseitige Wechselwirkungen die perfekte Synchronisation sofort zerstören. Doch das Gedankenexperiment verdeutlicht auf eindrucksvolle Weise, wie die strengen Symmetrien der Keplerschen Bahnen zu überraschend „absurden“ Rückkehr-Effekten führen können.

LITERATUR

[1] G. GLAESER: Mondsüchtig – Das Wechselspiel der Gestirne in Bildern. De Gruyter, Berlin-Boston, 2021.

[2] Online-Ressourcen zur Ableitung der „Vis-viva-Gleichung“.

- Wikipedia (de): Vis-Viva-Gleichung:
<https://de.wikipedia.org/wiki/Vis-Viva-Gleichung>
- Wikipedia (de): Spezifische Bahnenergie (führt direkt zur Vis-Viva):
https://de.wikipedia.org/wiki/Spezifische_Bahnenergie
- Bianca Högel: Vis-Viva-Gleichung (Herleitung aus Energie und Drehimpulserhaltung):
<https://www.biancahoegel.de/astronomie/vis-viva-gleichung.html>

G. Glaeser