



CHAOS IN DER MATHEMATIK – DAS LORENZ-SYSTEM

Chaos ist ein Begriff, der im Alltag häufig anzutreffen ist. Gemeint ist damit meistens eine gewisse Unordnung, eine Unvorhersehbarkeit. Der Gedanke, dass kleine Veränderungen, wie der Flügelschlag eines Schmetterlings, verheerende, unberechenbare Auswirkungen, etwa das Entstehen eines Wirbelsturms, haben können, fasziniert die Menschheit. Der sogenannte “*Butterfly Effect*” hat sich sogar als Filmtitel einen Namen gemacht. Umso überraschender wirkt es, den Begriff Chaos in der meist deterministischen Mathematik anzutreffen.

Ein wichtiges Grundkonzept in der Chaostheorie und in den Naturwissenschaften allgemein sind Differentialgleichungen. In vielen Situationen ist die zeitliche Veränderung von Lösungsfunktionen, sprich die zeitliche Ableitung dieser, und nicht die Funktion selbst bekannt.

Möchte man beispielsweise die Geschwindigkeit und die Höhe einer Fallschirmspringerin berechnen, so verwendet man der klassischen Mechanik zufolge die Erdbeschleunigung g und den Luftwiderstand. Die Beschleunigung g gibt eben die Änderung der Geschwindigkeit an, und der Luftwiderstand hängt wiederum von der Geschwindigkeit also der zeitlichen Ableitung der Höhe ab. Mathematisch lassen sich solche Zusammenhänge mit Hilfe von Differentialgleichungen beschreiben.

Eine Differentialgleichung ist von der Form

$$x'(t) := \frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)),$$

wobei x auch mehrdimensional sein kann, und f eine bekannte Funktion ist, die die zeitliche Änderung von x in Abhängigkeit von x beschreibt. Im Beispiel der Fallschirmspringerin ergibt sich

$$\begin{aligned} h'(t) &= v(t) \\ v'(t) &= -g + \lambda v(t), \end{aligned}$$

wobei $h(t)$ die Höhe, $v(t)$ die Geschwindigkeit der Fallschirmspringerin und λ den Einfluss des Luftwiderstands beschreibt. Es gilt hier $x(t) = (h(t), v(t))$.

Sofern die Differentialgleichung bekannt ist, und wir die Startwerte exakt kennen, können wir das Verhalten der Lösungen zu jedem Zeitpunkt vorhersagen. Wie also kann es sein, dass in einem solchen System chaotisches Verhalten auftritt? Um dies einzusehen, betrachten wir die Anfänge der Chaostheorie.

Die Chaostheorie nahm ihren Ursprung in den 1960er-Jahren. Damals suchte der Meteorologe *Edward Norton Lorenz* (1917–2008) nach einem System von Differentialgleichungen, um Konvektionsströme zu beschreiben. Er betrachtete dabei das relativ einfache System

$$(1) \quad \begin{aligned} x' &= \sigma(y - x) \\ y' &= rx - y - xz \\ z' &= xy - bz, \end{aligned}$$

wobei $\sigma, r, b > 0$ und $\sigma > b + 1$ gilt. Ursprünglich simulierte er die Gleichungen mit den Konstanten $\sigma = 10$, $r = 28$ und $b = 8/3$ mit dem Computer und machte dabei eine erstaunliche Beobachtung. Da es ein Problem mit dem Drucker gab, musste er die Simulation wiederholen. Allerdings wollte er nicht ganz von vorne beginnen und verwendete als neue Anfangsbedingungen die Werte nach 10 Simulationsschritten. Als er dann das Programm erneut startete erkannte er, dass die Lösungen sich bereits nach wenigen Schritten stark unterschieden [3].

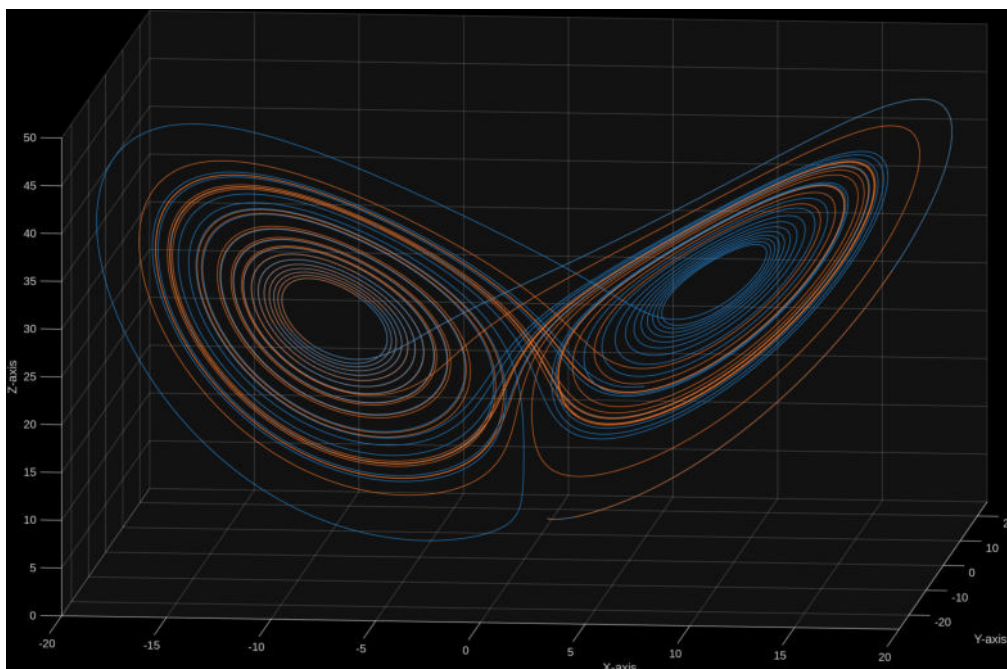


ABBILDUNG 1. Lösungen des Lorenz-Systems (1) für die Parameterwerte $\sigma = 10$, $r = 28$ und $b = 8/3$ zu den Startwerten $(1, 1, 4)$ (blau) und $(1.05, 1, 4)$ (orange). Erstellt mit [2].

Wie sich später herausstellte, lag dies daran, dass die Rechnerarithmetik genauer war als die Anzahl an ausgegebenen Nachkommastellen. Diese kleine Abweichung der Anfangsbedingungen wirkte sich in Form der sehr starken Abweichungen der Lösungen aus.

Durch die eingehende Analyse des später nach ihm benannten Lorenz-Systems begründete er die Chaostheorie maßgeblich mit. Das Lorenz-System ist eines der ersten chaotischen Systeme, welches tiefgehend analysiert wurde.

Die oben beschriebene, sensible Abhängigkeit von den Anfangswerten ist ein Punkt den tatsächlich alle sogenannten chaotischen Systeme aufweisen. In der Mathematik bedeutet Chaos nämlich nicht,

dass die zeitliche Entwicklung eines Systems zufällig und somit nicht explizit berechenbar ist, sondern unter anderem, dass sich kleine Änderungen der Startwerte sehr stark auf das Ergebnis auswirken [1, § 14].

Es stellt sich im Folgenden die Frage, ob wir überhaupt etwas über das Langzeitverhalten von Lösungen von (1) sagen können oder ob sich diese im ganzen Raum verteilen und je nach Anfangsbedingungen in stark unterschiedliche Richtungen bewegen.

Tatsächlich können wir zeigen, dass alle Lösungen irgendwann in einem Ellipsoid um den Punkt $(0, 0, 2r)$ landen. Um dies einzusehen, betrachten wir die Funktion

$$V(x, y, z) := rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2.$$

Die Menge aller Punkte $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, für die $V(x, y, z) = c$ mit einer beliebigen Konstante c gilt, beschreibt genau ein Ellipsoid um den Punkt $(0, 0, 2r)$. Dabei ist das Ellipsoid umso größer, je größer die Konstante c gewählt wird. $V(x, y, z)$ beschreibt, wie groß das Ellipsoid ist, auf welchem ein gewisser Punkt (x, y, z) liegt.

Berechnet man mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung von $V(x(t), y(t), z(t))$ nach der Zeit, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t), y(t), z(t)) &= 2rx(t)x'(t) + 2\sigma y(t)y'(t) + 2\sigma(z(t) - 2r)z'(t) \\ &= 2rx(t)(\sigma(y(t) - x(t))) + 2\sigma y(t)(rx(t) - y(t) - x(t)z(t)) \\ &\quad + 2\sigma(z(t) - 2r)(x(t)y(t) - bz(t)) \\ &= -2r\sigma x^2(t) - 2\sigma y^2(t) - 2\sigma b[z^2(t) - 2rz(t)] \\ &= -2\sigma[rx^2(t) + y^2(t) + b(z(t) - r)^2 - br^2], \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt auf ein vollständiges Quadrat ergänzt wurde. Der Ausdruck $rx^2(t) + y^2(t) + b(z(t) - r)^2$ ist immer größer oder gleich Null, da es sich um eine Summe von Quadraten handelt und kann beliebig groß werden, wenn man sich weit genug vom Ursprung entfernt. Wählen wir einen Punkt (x_0, y_0, z_0) , für den $rx^2(t) + y^2(t) + b(z(t) - r)^2 - br^2 > 0$ gilt, als Startpunkt unserer Lösung, so folgt

$$\frac{dV}{dt}(x(0), y(0), z(0)) = \frac{dV}{dt}(x_0, y_0, z_0) < 0.$$

Eine negative Ableitung bedeutet, dass die Funktion mit der Zeit abnimmt. Deshalb wird V entlang der Lösung zunächst immer kleiner, sofern wir weit genug weg starten. Insbesondere heißt das, dass das Ellipsoid auf dem sich der Punkt $(x(t), y(t), z(t))$ befindet, immer kleiner wird. Dies geschieht so lange, bis irgendwann $rx^2(t) + y^2(t) + b(z(t) - r)^2 - br^2 = 0$ gilt. Wir können also trotz der chaotischen Natur des Systems sagen, dass alle Lösungen irgendwann in einem beschränkten Bereich um den Punkt $(0, 0, 2r)$ landen [1, Section 14.2].

Um das Verhalten des Systems noch genauer zu beschreiben, brauchen wir das Konzept von anziehenden, also attraktiven Mengen.

Hierfür betrachten wir ein weiteres Beispiel aus der Physik: $x(t)$ beschreibt die Position eines Pendels und $v(t)$ die Geschwindigkeit des Pendels. Wird das Pendel ausgelenkt, so beschleunigt es, erreicht die maximale Geschwindigkeit bei $x = 0$ in der Mitte und schwingt dann auf die andere Seite, wo es umkehrt und wieder zurück schwingt. Im Idealfall kehrt das Pendel genau an die Stelle

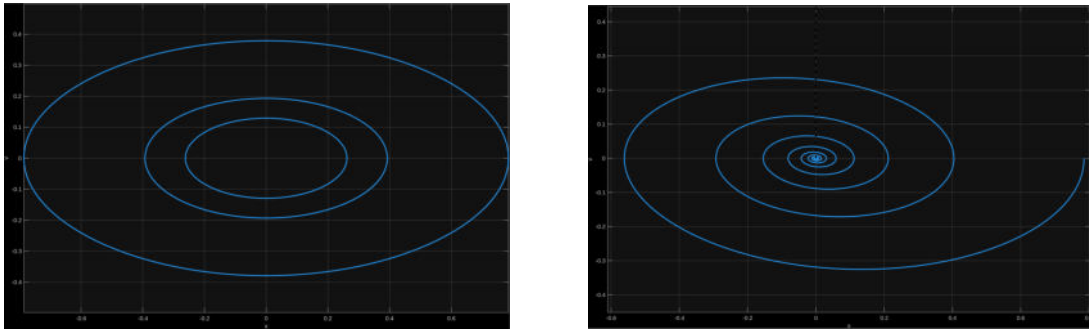


ABBILDUNG 2. Auslenkung und Geschwindigkeit eines idealen Pendels (links) und eines gedämpften Pendels (rechts). Erstellt mit [2].

zurück an der es losgelassen wurde. Trägt man nun die Punkte $(x(t), v(t))$ also für eine Periode in ein Koordinatensystem ein, so erhält man eine Ellipse, siehe Abbildung 2 links.

In der Realität verliert das Pendel allerdings durch verschiedene Effekte wie Luftwiderstand und Reibung Energie und schwingt immer weniger weit und immer langsamer, bis es schließlich zum Stillstand kommt und gerade nach unten hängt. Dies geschieht, egal von wo aus das Pendel losgelassen wird. Alle Lösungen streben also mit der Zeit auf den Punkt $(0,0)$ zu, siehe Abbildung 2 rechts. Für das gedämpfte Pendel ist der Ursprung attraktiv.

Im Allgemeinen ist eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ attraktiv, wenn jede Lösung $x(t)$, welche in der Nähe von A startet, der Menge A immer näher kommt, wenn also der Abstand zwischen $x(t)$ und A null wird. Das heißt, dass diese Lösungen mit der Zeit auf die Menge A zulaufen. Gilt dies nicht nur für Lösungen die in der Nähe starten, sondern für alle Lösungen, so nennen wir die Menge A global attraktiv.

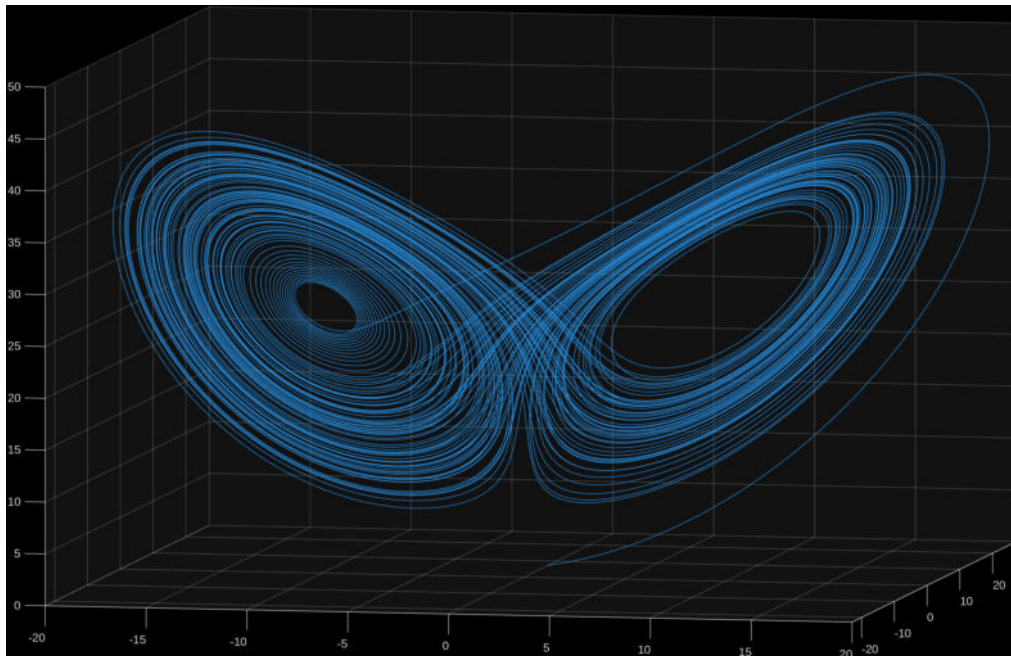


ABBILDUNG 3. Lösung des Lorenz-Systems (1) zum Startwert $(1, 1, 1)$ für die Parameterwerte $\sigma = 10$, $r = 28$ und $b = 8/3$. Erstellt mit [2].

Interessant ist nun die Suche nach möglichst kleinen attraktiven Mengen, da der gesamte Raum $\mathbb{R}^n$ immer attraktiv ist. Für das Lorenz-System ist beispielsweise die vorher besprochene beschränkte Menge um den Punkt $(0,0,2r)$ attraktiv, unabhängig von den Werten für σ, r und b . Für den Fall $r \leq 1$ ist allerdings der Ursprung ebenfalls schon global attraktiv.

Tatsächlich lässt sich für beliebige Parameterwerte zeigen, dass es eine global attraktive Menge gibt, deren Volumen null ist. Diese Menge wird als Attraktor bezeichnet, wenn auch die formale Definition eines Attraktors in der Literatur nicht einheitlich ist [1]. Für das Lorenz-System lässt sich die ungefähre Form des Attraktors erahnen, indem man Lösungen lang genug simuliert, siehe Abbildung 3. Zufälligerweise erinnert die Form des Lorenzattraktors für manche Parameterwerte an die Flügel eines Schmetterlings.

Wir haben bisher gesehen, dass für das Lorenz-System kleine Unterschiede große Auswirkungen haben, was eine Grundvoraussetzung ist, damit ein System als chaotisch bezeichnet wird. Häufig wird jedoch zusätzlich gefordert, dass sich das System durchmischt. Mathematisch wird dies als topologische Transitivität bezeichnet, vergleiche [3].

Für den Lorenz-Attraktor kann man zeigen, dass er topologisch transitiv ist, der Attraktor ist also chaotisch. Dies lässt sich einerseits bereits in Abbildung 1 erahnen, ist andererseits in Abbildung 4 nochmals genauer dargestellt. Der Beweis für die topologische Transitivität ist allerdings sehr umfangreich und wird meistens nur für ein geometrisches Modell geführt, welches zum ursprünglichen System äquivalent, allerdings leichter zu handhaben ist [1].

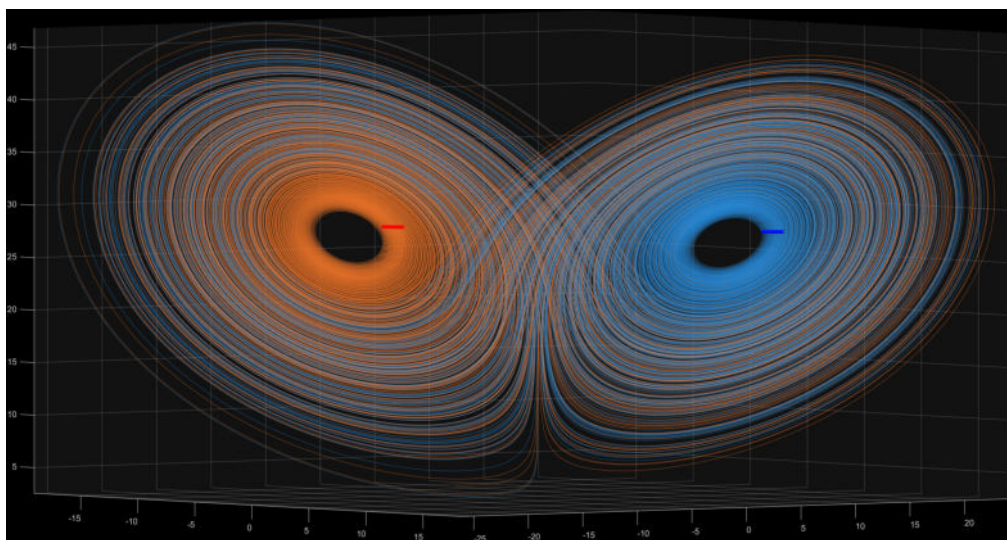


ABBILDUNG 4. Topologische Transitivität, der rote und der blaue Strich stellen jeweils die Anfangswerte zu den Kurven in orange und hellblau dar. Man sieht, dass nach gewisser Zeit orange und hellblau Lösungen durchmischt sind und teilweise übereinander liegen. Erstellt mit [2].

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass Chaos in der Mathematik nicht bedeutet, dass Dinge zufällig eintreten und nicht vorhergesagt werden können, sondern dass kleine Änderungen sich stark auswirken und deshalb trotz gleich aussehenden Anfangsbedingungen vollkommen unterschiedliche Zustände entstehen können. Genauso können sehr unterschiedliche Ausgangssituationen temporär zu demselben Ausgang führen, weil sich die Systeme stark durchmischen.

Die mathematische Definition von Chaos steht jedoch nicht im Widerspruch zu der allgemein akzeptierten Idee, dass Chaos etwas Unvorhersehbares bezeichnet. In der Realität können wir die Anfangsbedingungen nämlich nie exakt bestimmen, da es stets Messfehler oder andere Abweichungen gibt, weshalb sich Systeme unvorhersehbar verhalten.

Warum lohnt es sich also dennoch, Chaostheorie zu betreiben und chaotische Systeme zu untersuchen, wenn wir auch dadurch keine perfekten Vorhersagen treffen können? In vielen Fällen ist die Antwort darauf, dass es nützlich ist, abschätzen zu können, wie lange getroffene Vorhersagen gut zutreffen, wie schnell sich unterschiedliche Lösungen von einander entfernen. Genauso ist es wichtig Methoden zu entwickeln, die Aussagen treffen können, auch ohne die exakten Lösungen zu betrachten, so wie wir uns überlegt haben, dass alle Lösungen des Lorenz-Systems in einem Ellipsoid landen werden.

Resultate der Chaostheorie haben sich auch als wichtig erwiesen, da das Verhalten von gut verstandenen Problemen, wie dem Lorenz-System, auch in anderen Problemstellungen aufgetreten ist, und bekannte Aussagen direkt übertragen werden konnten. Insofern lohnt es sich durchaus, sich mit dem Chaos in der Mathematik zu beschäftigen, auch wenn es zunächst widersprüchlich scheinen mag oder vielleicht auch gerade deshalb.

Florian Engl und Gabriela Schranz-Kirlinger (TU Wien)

LITERATUR

- [1] M. W. Hirsch, S. Smale, and R. L. Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam. 3rd ed., 2013.
- [2] MATLAB Version 25.1 (R2025a). The MathWorks Inc., Natick, Mass., 2025.
- [3] J. D. Meiss. *Differential dynamical systems*, volume 22 of *Mathematical Modeling and Computation*, SIAM, Philadelphia. Revised ed., 2017