



Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
<http://www.oemg.ac.at/Mathe-Brief> — mathe-brief@oemg.ac.at

DREIECKSKONSTRUKTIONEN MIT ÄHNLICHEN DREIECKEN

Werden auf die Seiten eines Dreiecks p_0, p_1, p_2 gleichseitige Dreiecke mit den Ecken p_j, p_{j+1}, q_{j+2} (alle Indizes $j = 0, 1, 2$ modulo 3) aufgesetzt, so bilden die neuen Ecken q_0, q_1, q_2 wieder ein Dreieck, das zum Ausgangsdreieck p_0, p_1, p_2 perspektiv liegt; d.h. die Verbindungsgeraden $[p_0, q_0]$, $[p_1, q_1]$ und $[p_2, q_2]$ schneiden sich in einem Punkt, dem *Perspektivitätszentrum* z der Dreiecke. Dieses Ergebnis wird oft als Teil des *Satzes von Napoleon* bezeichnet und wurde von L. KIEPERT (siehe zB. [1], [3] oder [2, S. 376]) insofern verallgemeinert, dass statt der aufgesetzten gleichseitigen Dreiecke zueinander ähnliche gleichschenkelige Dreiecke aufgesetzt werden, deren neue Schenkel mit den Seiten des Originaldreiecks je einen festen Winkel ϕ einschließen (vgl. Fig. 1). Auch die Spitzen dieser neuen Dreiecke liegen zu den Ecken des Ausgangsdreiecks perspektiv. Wird nun der Winkel ϕ variiert, so durchlaufen die entsprechenden Perspektivitätszentren Punkte einer Hyperbel h , die als *Kiepert-Hyperbel* angesprochen wird.

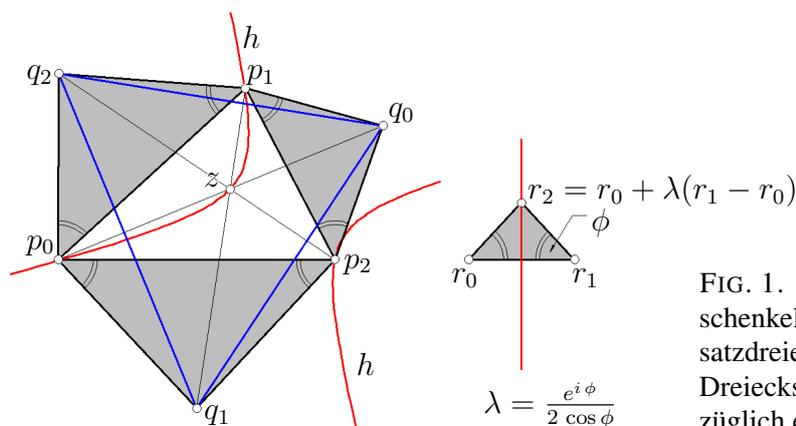


FIG. 1. Das Dreieck p_0, p_1, p_2 und zum gleichschenkeligen Dreieck r_0, r_1, r_2 ähnliche Aufsatzdreiecke liefern Neupunkte q_0, q_1, q_2 eines Dreiecks (blau), das zum Dreieck p_0, p_1, p_2 bezüglich eines Zentrums z perspektiv liegt.

Und alle diese bemerkenswerten Resultate gelten unabhängig von der Gestalt des jeweiligen Ausgangsdreiecks p_0, p_1, p_2 .

Hier werden wir dieses Ergebnis in etwas allgemeinerer Form beweisen. Dazu setzen wir auf die Seiten des Startdreiecks p_0, p_1, p_2 Dreiecke auf, die alle zu einem fest gewählten *Referenzdreieck* r_0, r_1, r_2 ähnlich sind (siehe Fig. 2). Diese Dreiecke müssen vorerst nicht gleichschenkelig sein. Wir werden dabei das Dreieck r_0, r_1, r_2 durch gleichsinnige Ähnlichkeiten so auf das Ausgangsdreieck p_0, p_1, p_2 verlagern, dass die Punkte r_0 nach p_j und r_1 auf p_{j+1} transformiert werden. Die Ecke r_2 gelangt dabei in die Position q_{j+2} (alle Indizes modulo 3).

Für allgemein gewählte Gestalt der Aufsatzdreiecke werden die hinzukommenden neuen Ecken q_0, q_1 und q_2 im Allgemeinen kein zum Dreieck p_0, p_1, p_2 perspektiv liegendes Dreieck bilden, d.h.

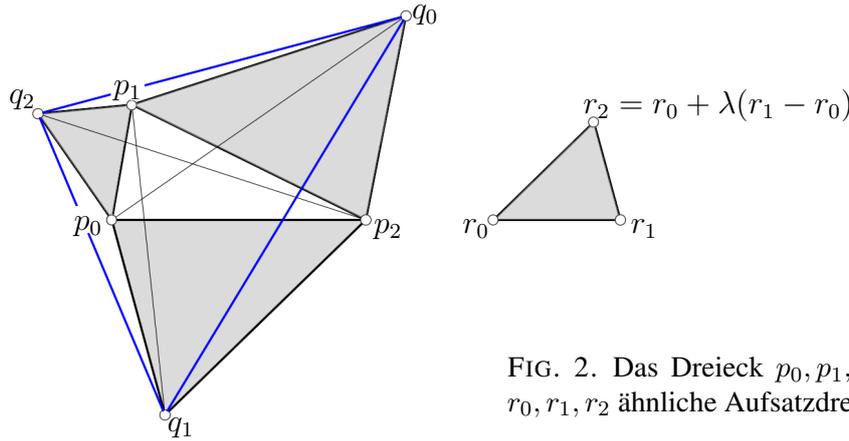


FIG. 2. Das Dreieck p_0, p_1, p_2 und zu einem Referenzdreieck r_0, r_1, r_2 ähnliche Aufsatzdreiecke.

die Verbindungsgeraden $[p_0, q_0]$, $[p_1, q_1]$ und $[p_2, q_2]$ werden sich wie in Fig. 2 nicht in einem gemeinsamen Punkt schneiden. Wir werden hier untersuchen, für welche Gestalt der Aufsatzdreiecke die neuen Punkte ein zum Ausgangsdreieck perspektiv liegendes Dreieck bilden.

1. Die neuen Ecken der Aufsatzdreiecke. Eine analytische Erfassung der obigen Konstruktion erfolgt zweckmäßig durch Beschreibung der Punkte in der GAUSSSchen Zahlenebene als komplexe Zahlen $p_j \in \mathbb{C}$ ($j = 0, 1, 2$). Die Ecke r_2 des Referenzdreiecks r_0, r_1, r_2 können wir auch durch Drehstreckung des Punktes r_1 mit Zentrum r_0 , Drehwinkel $\phi \in [-\pi/2, +\pi/2]$ und Streckfaktor $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gewinnen. Wir setzen $\lambda := \rho(\cos \phi + i \sin \phi)$ und können damit $r_2 := r_0 + \lambda(r_1 - r_0)$ schreiben (vgl. Fig. 2). Die neuen Ecken q_{j+2} der ähnlichen Aufsatzdreiecke erhalten wir dann in analoger Weise zu

$$(1) \quad q_{j+2} := p_j + \lambda(p_{j+1} - p_j)$$

(Indizes stets modulo 3). Da unabhängig von $\lambda \in \mathbb{C}$ stets $q_0 + q_1 + q_2 = p_0 + p_1 + p_2$ gilt, stimmt der Schwerpunkt des Ausgangsdreiecks p_0, p_1, p_2 mit dem des Dreiecks q_0, q_1, q_2 der Neupunkte überein. Die Verbindungsgeraden $[p_j, q_j]$ besitzen dann die Parameterdarstellung

$$(2) \quad [p_j, q_j] \dots p_j + u_j (q_j - p_j)$$

mit reellen Parametern $u_j \in \mathbb{R}$. Die Verbindungsgeraden $[p_0, q_0]$ und $[p_1, q_1]$ schneiden sich in einem Punkt s_{01} , dessen reelle Parameterwerte u_0 und u_1 sich aus der Gleichung

$$(3) \quad p_0 + u_0 (q_0 - p_0) = p_1 + u_1 (q_1 - p_1)$$

berechnen lassen. Da u_0 und u_1 reell sein müssen, lassen sich diese beiden Werte im Allgemeinen aus der Gleichung (3) und der konjugiert komplexen Gleichung

$$(4) \quad \bar{p}_0 + u_0 (\bar{q}_0 - \bar{p}_0) = \bar{p}_1 + u_1 (\bar{q}_1 - \bar{p}_1)$$

als Lösung zweier linearer Gleichungen berechnen. Die drei Geraden $[p_0, q_0]$, $[p_1, q_1]$ und $[p_2, q_2]$ haben einen Punkt gemeinsam, wenn auch der Schnittpunkt s_{02} von $[p_0, q_0]$ und $[p_2, q_2]$ mit s_{01} zusammenfällt. Für s_{02} erhalten analog zu vorhin reelle Parameterwerte u_0 und u_2 , die sich aus den beiden linearen Gleichungen

$$(5) \quad \begin{aligned} p_0 + u_0 (q_0 - p_0) &= p_2 + u_2 (q_2 - p_2) \\ \bar{p}_0 + u_0 (\bar{q}_0 - \bar{p}_0) &= \bar{p}_2 + u_2 (\bar{q}_2 - \bar{p}_2) \end{aligned}$$

bestimmen lassen. Die Dreiecke p_0, p_1, p_2 und q_0, q_1, q_2 liegen perspektiv, wenn diese beiden Schnittpunkte zusammenfallen, also die vier linearen Gleichungen

$$(6) \quad \begin{aligned} p_0 + u_0 (q_0 - p_0) &= p_1 + u_1 (q_1 - p_1) \\ \bar{p}_0 + u_0 (\bar{q}_0 - \bar{p}_0) &= \bar{p}_1 + u_1 (\bar{q}_1 - \bar{p}_1) \\ p_0 + u_0 (q_0 - p_0) &= p_2 + u_2 (q_2 - p_2) \\ \bar{p}_0 + u_0 (\bar{q}_0 - \bar{p}_0) &= \bar{p}_2 + u_2 (\bar{q}_2 - \bar{p}_2) \end{aligned}$$

zumindest eine gemeinsame Lösung für die reellen Variablen u_0, u_1 und u_2 besitzen.

2. Analytische Auswertung der Perspektivitätsbedingung (6).

Mit der Definition der neuen Aufsatzpunkte aus (1) haben wir $q_j - p_j = p_{j+1} + \lambda(p_{j+2} - p_{j+1}) - p_j$ und abkürzend mit den Differenzen $a_j := p_j - p_{j-1}$ insgesamt $q_j - p_j = a_{j+1} + \lambda a_{j+2}$. Zu beachten ist, dass damit stets $a_0 + a_1 + a_2 = 0$ gilt. Damit lässt sich das System der linearen Gleichungen (6) für u_0, u_1 und u_2 umformen zu

$$(7) \quad \begin{pmatrix} a_1 + \lambda a_2 & a_2 + \lambda a_0 & 0 & -a_1 \\ \bar{a}_1 + \bar{\lambda} \bar{a}_2 & \bar{a}_2 + \bar{\lambda} \bar{a}_0 & 0 & -\bar{a}_1 \\ a_1 + \lambda a_2 & 0 & a_0 + \lambda a_1 & a_0 \\ \bar{a}_1 + \bar{\lambda} \bar{a}_2 & 0 & \bar{a}_0 + \bar{\lambda} \bar{a}_1 & \bar{a}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ -u_1 \\ -u_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses System linearer Gleichungen für u_0, u_1 und u_2 liefert nur dann Lösungen, wenn die Determinante der obigen Systemmatrix den Wert 0 besitzt. Entwicklung der Determinante nach den 2×2 -Subdeterminanten der ersten beiden Zeilen liefert die *Perspektivitätsbedingung*

$$(8) \quad \begin{aligned} 0 &= \det \begin{pmatrix} a_1 + \lambda a_2 & a_2 + \lambda a_0 \\ \bar{a}_1 + \bar{\lambda} \bar{a}_2 & \bar{a}_2 + \bar{\lambda} \bar{a}_0 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} a_0 + \lambda a_1 & a_0 \\ \bar{a}_0 + \bar{\lambda} \bar{a}_1 & \bar{a}_0 \end{pmatrix} - \\ &- \det \begin{pmatrix} a_2 + \lambda a_0 & -a_1 \\ \bar{a}_2 + \bar{\lambda} \bar{a}_0 & -\bar{a}_1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} a_1 + \lambda a_2 & a_0 + \lambda a_1 \\ \bar{a}_1 + \bar{\lambda} \bar{a}_2 & \bar{a}_0 + \bar{\lambda} \bar{a}_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Die anderen Terme, die in dieser Entwicklung auftreten, enthalten stets einen Faktor mit der Determinante einer Matrix mit lauter Nullen in einer Spalte und damit eine Null als Faktor und wurden daher nicht angeführt. Nun gilt wegen $a_0 + a_1 + a_2 = 0$

$$(9) \quad \begin{aligned} \Delta_1 &:= \det \begin{pmatrix} a_1 + \lambda a_2 & a_2 + \lambda a_0 \\ \bar{a}_1 + \bar{\lambda} \bar{a}_2 & \bar{a}_2 + \bar{\lambda} \bar{a}_0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 + \lambda a_2 & a_2 + \lambda a_0 + a_1 + \lambda a_2 \\ \bar{a}_1 + \bar{\lambda} \bar{a}_2 & \bar{a}_2 + \bar{\lambda} \bar{a}_0 + \bar{a}_1 + \bar{\lambda} \bar{a}_2 \end{pmatrix} = \\ &= \det \begin{pmatrix} a_1 + \lambda a_2 & -a_0 - \lambda a_1 \\ \bar{a}_1 + \bar{\lambda} \bar{a}_2 & -\bar{a}_0 - \bar{\lambda} \bar{a}_1 \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} a_1 + \lambda a_2 & a_0 + \lambda a_1 \\ \bar{a}_1 + \bar{\lambda} \bar{a}_2 & \bar{a}_0 + \bar{\lambda} \bar{a}_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Insgesamt wird damit die Determinantenbedingung (8) zu

$$(10) \quad \begin{aligned} 0 &= \Delta_1 \left[\det \begin{pmatrix} a_0 + \lambda a_1 & a_0 \\ \bar{a}_0 + \bar{\lambda} \bar{a}_1 & \bar{a}_0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_2 + \lambda a_0 & -a_1 \\ \bar{a}_2 + \bar{\lambda} \bar{a}_0 & -\bar{a}_1 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \Delta_1 [a_1 \bar{a}_2 - a_2 \bar{a}_1 + \lambda(a_1 \bar{a}_0 - a_0 \bar{a}_1) + \bar{\lambda}(\bar{a}_0 a_1 - a_0 \bar{a}_1)]. \end{aligned}$$

Nun gilt wegen $a_2 = -a_0 - a_1$ die Beziehung

$$a_1 \bar{a}_2 - a_2 \bar{a}_1 = -a_1(\bar{a}_0 + \bar{a}_1) + \bar{a}_1(a_0 + a_1) = a_0 \bar{a}_1 - a_1 \bar{a}_0,$$

womit sich die Perspektivitätsbedingung insgesamt als

$$(11) \quad 0 = (1 - \lambda - \bar{\lambda})(a_0 \bar{a}_1 - a_1 \bar{a}_0) \Delta_1$$

schreiben lässt.

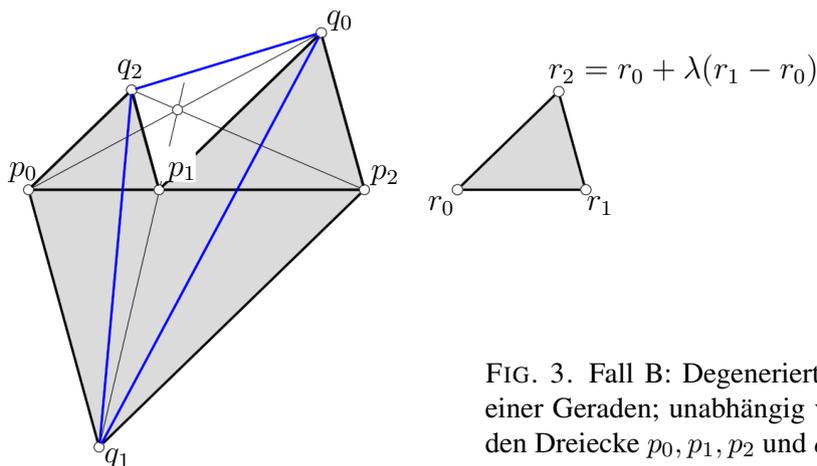


FIG. 3. Fall B: Degeneriertes Dreieck mit Ecken p_0, p_1, p_2 auf einer Geraden; unabhängig vom Referenzdreieck liegen die beiden Dreiecke p_0, p_1, p_2 und q_0, q_1, q_2 perspektiv.

Wir berechnen noch

$$(12) \quad \Delta_1 = a_1 \bar{a}_2 - \bar{a}_1 a_2 + \lambda(a_2 \bar{a}_2 - a_0 \bar{a}_1) + \bar{\lambda}(a_1 \bar{a}_0 - a_2 \bar{a}_2) + \lambda \bar{\lambda}(a_2 \bar{a}_0 - a_0 \bar{a}_2),$$

was sich mit $a_2 = -a_0 - a_1$ schreiben läßt als

$$(13) \quad \Delta_1 = (a_0 \bar{a}_1 - \bar{a}_0 a_1)(1 + \lambda \bar{\lambda}) + \lambda(a_0 \bar{a}_0 + a_1 \bar{a}_1 + a_1 \bar{a}_0) - \bar{\lambda}[a_0 \bar{a}_0 + a_1 \bar{a}_1 + a_0 \bar{a}_1].$$

3. Geometrische Auswertung der Perspektivitätsbedingung.

Wir suchen nach möglichen Perspektivitäten — und damit der Erfüllung der Perspektivitätsbedingung (11) — für gewisse $\lambda \in \mathbb{C}$ unabhängig vom Ausgangsdreieck p_0, p_1, p_2 und damit unabhängig von den Differenzen a_j .

Fall A: Das Verschwinden des ersten Faktors in (11) liefert *unabhängig vom Ausgangsdreieck* Werte für $\lambda \in \mathbb{C}$. Wir setzen $\lambda := \rho(\cos \phi + i \sin \phi)$ mit $\rho, \phi \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$(14) \quad 0 = 1 - \lambda - \bar{\lambda} = 1 - 2\rho \cos \phi,$$

woraus sofort

$$(15) \quad \rho = \frac{1}{2 \cos \phi}$$

folgt. Die durch $\lambda = \frac{1}{2 \cos \phi}(\cos \phi + i \sin \phi)$ bestimmte Drehstreckung dreht die entsprechende Dreiecksseite p_j, p_{j+1} daher um den Punkt p_j um den Winkel ϕ und skaliert mit Faktor $1/2 \cos \phi$, womit der Neupunkt q_{j+2} des Aufsatzdreiecks auf der Streckensymmetrale von p_j und p_{j+1} zu liegen kommt. Die Aufsatzdreiecke müssen in diesem Fall daher alle gleichschenkelig sein. Und das ist eines der Resultate von L. KIEPERT (siehe [1]). Dass dann die entsprechenden Perspektivitätszentren der dann perspektiven Dreiecke p_0, p_1, p_2 und q_0, q_1, q_2 eine Hyperbel h durchlaufen, die *Kiepert-Hyperbel* genannt wird, soll hier nicht bewiesen werden (vgl. Fig. 1). Da nach dem Satz von DESARGUES bezüglich eines Punktes perspektiv liegende Dreiecke auch bezüglich einer Achse perspektiv liegen, sind auch die entsprechenden Perspektivitätsachsen interessant: Sie umhüllen nach L. KIEPERT eine Parabel, die als *Kiepert-Parabel* angesprochen wird.

Fall B: Das Verschwinden des zweiten Faktors $a_0 \bar{a}_1 - a_1 \bar{a}_0$ in (11) liefert eine Bedingung ans Ausgangsdreieck: In diesem Fall *muss das Ausgangsdreieck entarten*: Die drei Eckpunkte p_0, p_1, p_2 gehören einer Geraden an. Dann gilt unabhängig vom gewählten $\lambda \in \mathbb{C}$ stets Perspektivität zwischen p_0, p_1, p_2 und dem Dreieck der Neupunkte q_0, q_1, q_2 (siehe Fig. 3).

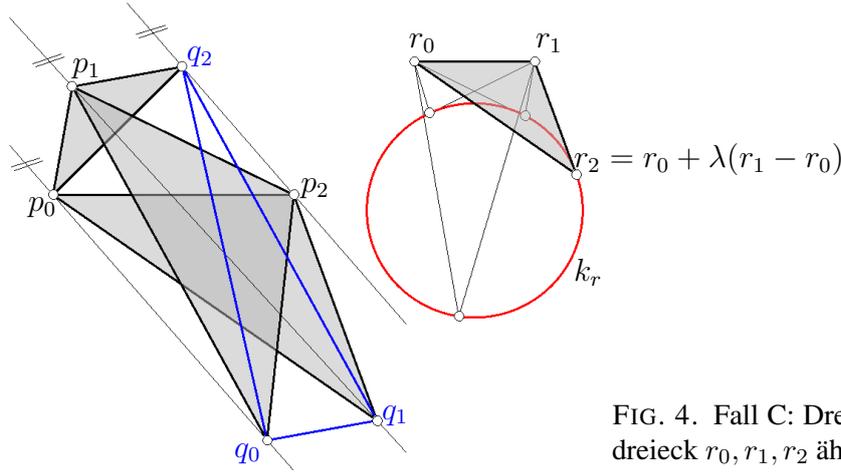


FIG. 4. Fall C: Dreieck p_0, p_1, p_2 und zum Referenzdreieck r_0, r_1, r_2 ähnliche Aufsatzdreiecke.

Fall C: Nun zum Verschwinden des dritten Faktors in (11): Diese Bedingung $\Delta_1 = 0$ ist wegen $q_j - p_j = a_{j+1} + \lambda a_{j+2}$ nach der Definition (9) eine an die Verbindungen $[p_j, q_j]$ der Punkte p_0, p_1, p_2 und q_0, q_1, q_2 : Nach der Definition (9) kennzeichnet $\Delta_1 = 0$ die Verbindungen $[p_1, q_1]$ und $[p_2, q_2]$ als parallel, was dann nach dem Ende der zweiten Zeile in (9) auch für die Verbindungen $[p_0, q_0]$ und $[p_1, q_1]$ gilt. Wenn also $[p_1, q_1]$ und $[p_2, q_2]$ für ein gewisses vom Ausgangsdreieck abhängiges $\lambda \in \mathbb{C}$ parallel sind, dann auch $[p_0, q_0]$ und $[p_1, q_1]$; die Dreiecke p_0, p_1, p_2 und q_0, q_1, q_2 liegen für diesen Wert von λ perspektiv mit einem Fernpunkt als Zentrum.

Wir wollen nun feststellen, für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ diese Parallelperspektivitäten auftreten: Dabei dürfen wir annehmen, dass wir nicht in Fall B sind, und daher $a_0 \bar{a}_1 - a_1 \bar{a}_0 \neq 0$ gilt. Dann lässt sich die in (13) durch $\Delta_1 = 0$ bestimmte Gleichung für λ mit $m := \frac{a_0 \bar{a}_0 + a_1 \bar{a}_1 + a_0 \bar{a}_1}{a_0 \bar{a}_1 - a_1 \bar{a}_0}$ und $R := m \bar{m} - 1$ umformen zu

$$(16) \quad 0 = (\lambda - m)(\bar{\lambda} - \bar{m}) - R.$$

Die komplexen Zahlen λ gehören damit im Allgemeinen einem Kreis k mit Mittelpunkt in m an! Nach der Definition von Δ_1 in (9) gilt für die drei Werte

$$(17) \quad \lambda_j := -\frac{a_{j+1}}{a_{j+2}} = \frac{p_{j+1} - p_j}{p_{j+1} - p_{j+2}}$$

sicher $\Delta_1 = 0$. Die zugehörigen Punkte liegen daher auf diesem Kreis k – vgl. Fig. 4. Sie definieren jene Drehstreckungen, für die nach (1) der Bildpunkt $q_j = p_{j+1} + \lambda_j(p_{j+2} - p_{j+1}) = p_j$ mit dem Originalpunkt p_j übereinstimmt, und damit die Verbindungsgerade $[p_j, q_j]$ unbestimmt bleibt. Mögliche Aufsatzdreiecke r_0, r_1, r_2 besitzen daher eine von r_0 und r_1 und dem Startdreieck p_0, p_1, p_2 abhängige Ecke $r_2 := r_0 + \lambda(r_1 - r_0)$ mit λ als Lösung von $\Delta_1 = 0$. Die möglichen Punkte r_2 gehören somit einem Kreis k_r an – vgl. Fig. 4.

Das Dreieck p_0, p_1, p_2 und das so konstruierte Dreieck q_0, q_1, q_2 sind dann perspektiv bezüglich eines Fernpunkts. Die zugehörige Perspektivitätsachse enthält stets den gemeinsamen Schwerpunkt dieser beiden Dreiecke.

Damit können wir zusammenfassen:

Satz 1. Die vorgestellte Konstruktion mit Startdreieck p_0, p_1, p_2 und ähnlich transformierten Referenzdreiecken r_0, r_1, r_2 liefert Neupunkte eines Bilddreiecks q_0, q_1, q_2 . Start- und Bilddreieck sind genau in den folgenden drei Fällen perspektiv bezüglich eines Zentrums:

- *Fall A (KIEPERT-Fall): Bei allgemeinem Startdreieck können gleichschenkelige Referenzdreiecke r_0, r_1, r_2 (mit gleichen Schenkeln $\overline{r_0 r_2} = \overline{r_1 r_2}$) aufgesetzt werden - siehe Fig. 1.*
- *Fall B (degenerierter Fall): Die drei Startpunkte p_0, p_1 und p_2 liegen kollinear (das Startdreieck ist degeneriert). Das Referenzdreieck kann beliebig gewählt werden - siehe Fig. 3.*
- *Fall C: Das Referenzdreieck r_0, r_1, r_2 ist vom Startdreieck p_0, p_1, p_2 abhängig - das Perspektivitätszentrum ist ein Fernpunkt (siehe Fig. 4).*

O. Röschel (email roeschel@tugraz.at)

LITERATUR

- [1] R.H. Eddy und R. Fritsch: The Conics of Ludwig Kiepert: A Comprehensive Lesson in the Geometry of the Triangle. Mathematics Magazine, Band 67, Nr. 3 (Juni, 1994), S. 188–205.
<https://doi.org/10.1080/0025570X.1994.11996212>
- [2] G. Glaeser, H. Stachel und B. Odehnal: The Universe of Conics. Springer, Berlin Heidelberg 2016.
- [3] H. Walser: Miniaturen: Kiepert-Hyperbel.
<https://walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kiepert/Kiepert.pdf> [8. Juni 2025]