



Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http://www.oemg.ac.at/Mathe-Brief — mathe-brief@oemg.ac.at

KETTENBRÜCHE — EIN URALTER ALGORITHMUS

Einleitung. Das Wort Algorithmus ist heute weit verbreitet, denn viele elektronische Systeme arbeiten mit Algorithmen. Das Wort leitet sich ab von dem Mathematiker Al-Khwarizmi (etwa mit „derjenige aus Choresmien“ zu übersetzen). Er war der Autor des Buches, dessen arabischer Titel mit Al-gabr (zumeist al-dschabr ausgesprochen) begann, was uns das Wort Algebra beschert hat!

Ein Algorithmus für Kettenbrüche. Einer der ältesten Algorithmen ist folgendes Verfahren: Sei $0 < x < 1$ eine reelle Zahl, dann sei $a_1 = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ die nächstkleinere ganze Zahl zu $\frac{1}{x}$, das heißt $a_1 \leq \frac{1}{x} < a_1 + 1$. Man bilde $Tx = \frac{1}{x} - a_1$, also

$$x = \frac{1}{a_1 + Tx}$$

$$\text{Beispiel: } x = \frac{13}{30}, \frac{1}{x} = \frac{30}{13}, \\ a_1 = 2, Tx = \frac{30}{13} - 2 = \frac{4}{13}$$

$$\Rightarrow \frac{13}{30} = \frac{1}{2 + \frac{4}{13}}$$

Ist $Tx = 0$, so ist $x = \frac{1}{a_1}$, und das Verfahren endet hier. Ist hingegen $0 < Tx < 1$, so sei $a_2 = \lfloor \frac{1}{Tx} \rfloor$ und $T^2x = \frac{1}{Tx} - a_2$, also

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + T^2x}}$$

$$a_2 = \lfloor \frac{13}{4} \rfloor = 3, T^2x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{13}{30} = \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}$$

Ist $T^2x = 0$, so ist $x = \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1}$, und das Verfahren endet hier. Ist hingegen $0 < T^2x < 1$, so setzt man das Verfahren fort, d.h. man wiederholt den Algorithmus. In dem konkreten Beispiel von oben ergibt sich dann

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + T^3x}}}$$

$$a_3 = \lfloor \frac{4}{1} \rfloor = 4, T^3x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{13}{30} = \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}$$

Das Verfahren endet hier, weil $T^3x = 0$ gilt. Es entstehen ineinander geschachtelte Brüche, die *Kettenbrüche* heißen.¹

Das folgende Ergebnis ist leicht zu zeigen.

¹engl. *continued fractions*, was etwa „fortgesetzte Brüche“ bedeutet. Es sei bemerkt, dass im *mathebrief* 120 „Kettenbrüche – Eine Exkursion“ ein etwas anderer Einstieg geboten wurde. Dort kann $x_0 > 0$ sein, aber mit $x = x_0 - \lfloor x_0 \rfloor$ geht es wie hier weiter.

Satz. Eine Zahl x ist genau dann rational, wenn es ein $n \geq 1$ gibt mit $T^n x = 0$. Man verwendet dann die folgende Notation:

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots a_{n-2} + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}} \implies \frac{p}{q} = [a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Der Beweis erfolgt weiter unten.

Anmerkung 1: Ist $a_n \geq 2$, kann man a_n auch als $(a_n - 1) + \frac{1}{1}$ schreiben. Deshalb kann man den Kettenbruch $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ formal durch $[a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1]$ ersetzen.

Näherungsbrüche. Um für die folgenden Aussagen auch ein Beispiel zur Verfügung zu haben, berechnen wir den Kettenbruch von $\pi = 3.141592 \dots = 3 + x$ mit $x = 0.141592 \dots$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} a_1 = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 7, \quad Tx = \frac{1}{x} - a_1 = 0.06251 \dots \quad a_2 = \lfloor \frac{1}{a_1} \rfloor = 15, \quad T^2x = \frac{1}{Tx} - a_2 = 0.9965 \dots \\ a_3 = \lfloor \frac{1}{a_2} \rfloor = 1, \quad T^3x = \frac{1}{T^2x} - a_3 = 0.0034 \dots \quad a_4 = \lfloor \frac{1}{a_3} \rfloor = 292, \text{ u.s.w.} \end{aligned}$$

D.h. Wir haben $\pi = 3 + [17, 15, 1, 292, \dots]$, wobei in diesem Fall der Kettenbruchalgorithmus nie abbricht. Mit $x = 1/(a_1 + Tx)$, $Tx = 1/(a_2 + T^2x)$, etc. erhalten wir

$$\begin{aligned} \pi = 3 + \frac{1}{7 + Tx} &\implies \pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + T^2x}} = 3 + \frac{15 + T^2x}{106 + 7T^2x} \\ \implies \pi = 3 + \frac{15 + \frac{1}{1 + T^3x}}{106 + 7\frac{1}{1 + T^3x}} &= 3 + \frac{16 + 15T^3x}{113 + 106T^3x} \\ \implies \pi = 3 + \frac{16 + 15\frac{1}{292 + T^4x}}{113 + 106\frac{1}{292 + T^4x}} &= 3 + \frac{4687 + 16T^4x}{33102 + 113T^4x} \end{aligned}$$

und so weiter.

Wir behaupten, dass stets gilt

$$(1) \quad x = \frac{p_n + p_{n-1}T^n x}{q_n + q_{n-1}T^n x},$$

sofern $Tx, T^2x, \dots, T^{n-1}x \neq 0$, wobei die ganzen Zahlen p_j und q_j die Rekursion

$$\begin{aligned} p_j &= a_j p_{j-1} + p_{j-2} \\ q_j &= a_j q_{j-1} + q_{j-2} \end{aligned}$$

($1 \leq j \leq n$) mit den Startwerten

$$\begin{aligned} p_0 &= 0, \quad p_1 = 1 \\ q_0 &= 1, \quad q_1 = a_1. \end{aligned}$$

erfüllen. Außerdem gilt

$$(2) \quad p_j q_{j-1} - q_{j-1} p_j = (-1)^j \quad \text{bzw.} \quad \frac{p_j}{q_j} - \frac{p_{j-1}}{q_{j-1}} = (-1)^j \frac{1}{q_j q_{j-1}}.$$

Beweis: Im Fall $n = 1$ folgt das direkt aus der Definition von Tx , und die letzte Gleichung sieht man durch Einsetzen. Für größere Werte von n verwendet man Induktion. $\square$

Beweis des Satzes von Seite 2: Ist $T^n x = 0$, so folgt direkt aus Gleichung (1), dass $x = p_n/q_n$ rational ist. Umgekehrt sei $x = p/q$ eine rationale Zahl zwischen 0 und 1, d.h. $p < q$. Wir berechnen

$$Tx = \frac{q}{p} - a_1 = \frac{q - a_1 p}{p} =: \frac{p'}{q'},$$

wobei $q' = p$. Bei $Tx \neq 0$ wenden wir den Algorithmus erneut an und erhalten

$$T^2 x = \frac{q'}{p'} - a_2 = \frac{q' - a_2 p'}{p'} =: \frac{p''}{q''},$$

wobei $q'' = p'$. Alle Zahlen $x, Tx, T^2 x, \dots$ sind kleiner als 1, also ist der Zähler kleiner als der Nenner. Wir erhalten

$$p'' < q'' = p' < q' = p < q.$$

Man sieht, dass die Folge der Nenner $q, q', q'', \dots$ der Zahlen $x, Tx, T^2 x, \dots$ streng monoton abnimmt. Nach endlich vielen Schritten ist der Nenner gleich 1, das entsprechende $T^n x$ ist ganzzahlig, und der Algorithmus bricht ab. $\square$

Gleichung (1) ist die Grundlage für die wichtigste Anwendung der Kettenbrüche. Sie liefern nämlich sehr gute rationale Approximationen reeller Zahlen. Als sich die Astronomie zur modernen Wissenschaft entwickelte, baute man *Planetarien*, das sind Uhrwerke, die den Umlauf der Planeten um die Sonne darstellen sollten. Dazu brauchte man Zahnräder mit verschiedenen Anzahlen von Zähnen. Zwei Zahnräder mit je q und p Zähnen, simulieren verschiedene Geschwindigkeiten im Verhältnis $p : q$. Um die Anzahlen der Zähne niedrig zu halten, suchte man gute Approximationen zu den beobachteten Umlaufzahlen! Beschrieben wurde das in Huygens Arbeit *Descriptio automati planetarii* aus dem Jahr 1703.

Betreffend die Approximation von reellen Zahlen durch ihre Kettenbrüche gilt zum Beispiel das folgende Ergebnis:²

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$$

Dies bedeutet, dass p_n/q_n eine Näherung für x darstellt, wobei der Fehler höchstens $1/q_n^2$ beträgt. Wir wenden das Ergebnis auf die Kettenbruchentwicklung von π an und erhalten die folgenden Näherungen $3 + p_1/q_1, 3 + p_2/q_2$ und so weiter:

n	$3 + p_n/q_n$	$1/q_n^2$	$\pi - (3 + p_n/q_n)$
1	$3 + \frac{1}{7} = 3.1428\dots$	$\approx 0,02$	$\approx -0,0013$
2	$3 + \frac{15}{106} = 3.1415094\dots$	$\approx 0,00009$	$\approx 0,00008$
3	$3 + \frac{16}{113} = 3.1415929\dots$	$\approx 0,00008$	$\approx -0,0000003$
4	$3 + \frac{4687}{33102} = 3.1415926530\dots$	$\approx 9 \cdot 10^{-10}$	$\approx 6 \cdot 10^{-10}$

Man sieht, dass die Schranke $1/q_n^2$ den echten Fehler manchmal deutlich überschätzt, aber manchmal, wie bei $n = 4$, die Größenordnung des Fehlers sogar ziemlich genau angibt. Gleichung (2) sagt,

²Man rechnet leicht nach: $x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n T^n x}{q_n(q_n + q_{n-1} T^n x)}$. Daraus sieht man, dass für gerade Werte n gilt $\frac{p_n}{q_n} < \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} < x$ und für ungerade Werte n gilt $x < \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} < \frac{p_n}{q_n}$. Da weiters $|(-1)^n T^n x| < 1$ ist das Ergebnis klar.

dass sich die Brüche p_n/q_n abwechselnd von oben und von unten dem Grenzwert x annähern. Auch das ist aus der obigen Tabelle ersichtlich. Bedeutender ist das nächste Ergebnis:

Satz. *Mindestens eine der folgenden Ungleichungen ist erfüllt:*

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2q_n^2} \quad \text{oder} \quad \left| x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| < \frac{1}{2q_{n+1}^2}.$$

D.h. eine der beiden Approximationen $\frac{p_n}{q_n}$ oder $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ ist sogar doppelt so gut wie oben behauptet.

Beweis. Da x zwischen $\frac{p_n}{q_n}$ und $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ liegt, ist

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| + \left| x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| = \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q_n^2} + \frac{1}{q_{n+1}^2} \right).$$

Die letzte Ungleichung folgt aus

$$\frac{1}{q_n^2} - \frac{2}{q_n q_{n+1}} + \frac{1}{q_{n+1}^2} = \left(\frac{1}{q_n} - \frac{1}{q_{n+1}} \right)^2 > 0. \quad \square$$

Die Kettenbruchentwicklung ist in einem gewissen Sinne eine bestmögliche Annäherung an x durch Brüche. Man kann sich überlegen, dass jeder Bruch, der x gut genug approximiert, von einer Kettenbruchentwicklung stammt:

Satz. *Ist*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2},$$

dann gibt es ein $n \geq 1$, so dass $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$.

Wir vermerken, dass dieses Ergebnis nicht für $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$ gilt. Beispiele sind leicht zu finden, etwa $\frac{3}{8} = [2, 1, 2]$ hat die Näherungsbrüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{3}{8}$, aber $|\frac{3}{8} - \frac{2}{5}| = \frac{1}{40} < \frac{1}{25}$.

Beweis. Die Beweisidee ist einfach, aber einige Einzelheiten sind zu beachten. Man stellt $\frac{p}{q}$ als endlichen Kettenbruch $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ mit Näherungsbrüchen $\frac{p_k}{q_k}$ und $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ dar. Gemäß Anmerkung 1 können wir n als gerade Zahl annehmen. Man zeigt dann, dass die Zahl x mit derselben Entwicklung beginnt. Sei etwa $x - \frac{p}{q} = x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\theta}{q_{n-2}^2}$ mit $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$. Wir definieren die Zahl ω durch die Gleichung

$$x = \frac{p_n + \omega p_{n-1}}{q_n + \omega q_{n-1}}. \quad \text{Dann ist} \quad \omega = \frac{-p_n + x q_n}{p_{n-1} - x q_{n-1}} > 0,$$

denn x liegt im Intervall zwischen $\frac{p_n}{q_n}$ und $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$. Man beachte, dass

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2q_n^2} < \frac{1}{q_n q_{n-1}} = \left| \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n q_{n-1}} \right|.$$

Ist $\omega < 1$, so ist $\omega = T^n x$; die Kettenbruchentwicklung von x beginnt mit $[b_1, b_2, \dots, b_n, \dots]$ und $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n}{q_n}$. Wieso ist das so? Sei etwa $n = 2$, so bedeutet

$$x = \frac{p_2 + p_1 T^2 x}{q_2 + q_1 T^2 x} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + T^2 x}} = \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \omega}} = \frac{p_2 + p_1 \omega}{q_2 + q_1 \omega}.$$

Der Algorithmus der Kettenbruchentwicklung zeigt $a_1 = b_1, a_2 = b_2$, also $P_2 = p_2$ und $Q_2 = q_2$.

Ist $1 \leq \omega$ mit $c = \lfloor \frac{1}{\omega} \rfloor$, dann beginnt die Kettenbruchentwicklung von x mit der Folge $[b_1, b_2, \dots, b_n + c, \dots]$. Dann sind die Nherungsbrche der Ordnung $n - 1$ und n von x gegeben durch $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ und $\frac{P_n + cP_{n-1}}{Q_n + cQ_{n-1}}$. Der Bruch $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{p}{q}$ ist daher kein Nherungsbruch von x . Aus

$$\frac{\theta}{Q_n^2} = x - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{\omega}{Q_n(Q_n + \omega Q_{n-1})}$$

erhlt man

$$\theta = \frac{\omega Q_n}{Q_n + \omega Q_{n-1}} < \frac{Q_n}{Q_n + Q_{n-1}}$$

als notwendige und hinreichende Bedingung, dass $\frac{p}{q}$ mit der Eigenschaft $\lfloor x - \frac{p}{q} \rfloor < \frac{1}{2q^2}$ ein Nherungsbruch ist. Da $Q_{n-1} < Q_n$ ist $\theta = \frac{1}{2}$ geeignet. $\square$

Literatur: Oskar Perron 1977. *Die Lehre von den Kettenbrchen*. Band I. B.G. Teubner. Stuttgart.

F. Schweiger (email fritz.schweiger@plus.ac.at).