Österreichische Mathematische Gesellschaft

MATHE-BRIEF

Jänner 2025 — Nr. 131

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

DEFINITION VON EXTREMSTELLEN

Im Schulbuch *Mathematik verstehen 6* findet man folgende Definitionen und Erläuterungen [Malle et al. 2018, S. 45, 47]:

Definition: Sei $A \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $M \subseteq A$. Eine Stelle $p \in M$ heißt

- *Maximumstelle von f in M*, wenn $f(x) \leq f(p)$ für alle $x \in M$,
- *Minimumstelle von f in M*, wenn $f(x) \geq f(p)$ für alle $x \in M$.

Eine Stelle $p \in M$ heißt *Extremstelle von f in M*, wenn sie eine Maximum- oder eine Minimumstelle von f in M ist.

Definition: Eine *Extremstelle von f im gesamten Definitionsbereich von f* bezeichnet man kurz als *globale Extremstelle von f*.

Definition: Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Eine Stelle $p \in A$ heißt

- *lokale Maximumstelle von f*, wenn es eine Umgebung $U(p) \subseteq A$ gibt, sodass p Maximumstelle von f in M ist,
- *lokale Minimumstelle von f*, wenn es eine Umgebung $U(p) \subseteq A$ gibt, sodass p Minimumstelle von f in M ist,
- *lokale Extremstelle von f*, wenn sie eine lokale Maximum- oder eine lokale Minimumstelle von f ist.

BEACHTE:

- Ist A ein Intervall der Form $[a;b]$, $(a;b]$, $[a;b)$ oder $(a;b)$, dann bezeichnet man die Stellen a und b als *Randstellen von A* und alle Stellen x mit $a < x < b$ als *innere Stellen von A*. (Analoges gilt, wenn A eine Vereinigung von Intervallen der genannten Formen ist.)
- Unter einer *Umgebung $U(p)$* einer Stelle p verstehen wir in diesem Buch ein *beliebiges Intervall*, für welches p eine *innere Stelle* ist. Die Umgebung $U(p)$ erstreckt sich also sowohl nach links als auch nach rechts von p, muss aber nicht symmetrisch um p liegen.
- Ist p eine lokale Extremstelle einer Funktion f, dann muss nach der obigen Definition die Umgebung $U(p)$ ganz im Definitionsbereich A von f liegen. Somit gilt nach dieser Definition:
  Eine Randstelle des Definitionsbereichs A von f kann keine lokale Extremstelle von f sein (wohl aber unter Umständen eine globale Extremstelle von f.)

Die Implikation dieser Definition von lokalen Extremstellen, dass eine Funktion an einem Randpunkt des Definitionsbereichs kein lokales, wohl aber ein globales Minimum oder Maximum haben kann, widerspricht dem allgemeinen Prinzip, dass jede Eigenschaft, die global gilt, erst recht lokal gilt.

Diese Definition hat also nur Sinn, wenn p ein innerer Punkt des Definitionsbereichs von f bzw. der Definitionsbereich A eine offene Menge ist.

Intuitiv würde man sagen, dass die Funktion an der Stelle p ein lokales Maximum besitzt, wenn Punkte „in der Nähe“ von p Funktionswerte haben, welche kleiner gleich als jene von p sind. Mathematisch formuliert, bedeutet dies, dass es eine Umgebung von p, $U(p)$, gibt, sodass $f(x) \leq f(p)$ $\forall\, x \in U(p)$. Da f auf der Menge A definiert ist, können natürlich nur jene Punkte „in der Nähe“ von p in Betracht gezogen werden, welche selbst in der Menge A liegen, d.h. es gibt eine Umgebung $U(p)$, sodass $f(x) \leq f(p)\ \forall\, x \in U(p) \cap A$.

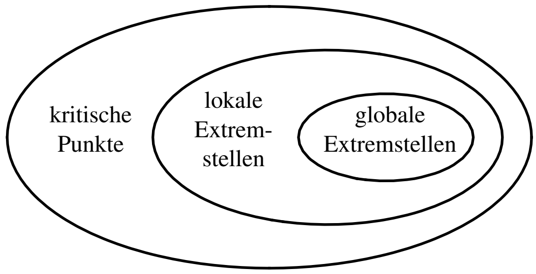
So werden lokale Maxima auch in der mathematischen Literatur definiert (siehe z.B. Heuser, 1991, S. 266). Analog definiert man lokale Minima:

Definition (*Lokale Extrema 1*) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ besitzt an der Stelle $p \in A$ ein lokales Minimum bzw. Maximum, wenn es eine Umgebung von p, $U(p)$ gibt, sodass $f(x) \geq f(p)$ bzw. $f(x) \leq f(p)$ für alle $x \in U(p) \cap A$.[1]

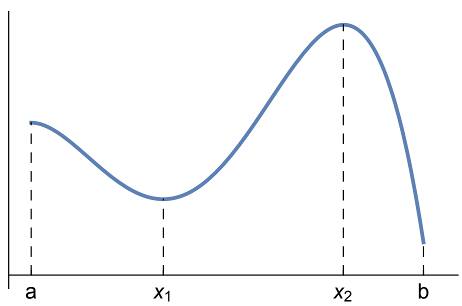
Diese Definition ist meiner Meinung nach für Schülerinnen und Schüller nicht schwieriger zu verstehen als jene, die in dem Schulbuch gegeben ist. Ich sehe daher keinen Grund, warum man in der Schule lokale Minima und Maxima nicht so definiert, wie es in der mathematischen Literatur üblich ist und wie es auch der Intuition entspricht. Die Schulmathematik sollte nicht im Widerspruch zu allgemeineren, abstrakteren Konzepten der Mathematik stehen! Dieser Standpunkt wird auch von Fischer und Oberbucher vertreten, welche diesbezüglich sieben in Österreich zugelassene Schulbücher analysiert haben (siehe Fischer und Oberbucher, 2025).

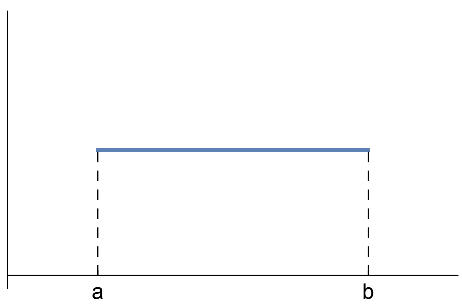
Betrachtet man eine differenzierbare Funktion, welche auf einer *offenen Menge* A definiert ist, dann gelten die Eigenschaften, die im Schulbuch angeführt sind.

In diesem Fall liefern die Nullstellen der Ableitung der Funktion Kandidaten für lokale Extrema. Man nennt diese Stellen kritische Punkte. Das nebenstehende Mengendiagramm veranschaulicht den Zusammenhang zwischen kritischen Punkten, lokalen und globalen Extremstellen, vgl. [Stein 2021, Abb. 2.6].



Die folgenden beiden Beispiele illustrieren die Absurdidät der Aussage, dass ein globales Rand-Maximum bzw. -Minimum kein lokales Maximum bzw. Minimum sein muss. Betrachten wir folgende Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$:





[1]Man kann die Bedingung für ein lokales Minimum bzw. Maximum auch so formulieren: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodass $f(x) \geq f(p)$ bzw. $f(x) \leq f(p)$ für alle $x \in A$ mit $|x - p| < \varepsilon$.

Offensichtlich besitzt die linke Funktion in $x = a$ ein lokales (aber kein globales) Maximum.[2] Lt. Definition im Schulbuch ist das nicht der Fall.

Bei der rechten Funktion ist jeder Punkt der Definitionsmenge $[a, b]$ sowohl globales Maximum als auch globales Minimum. Lt. Definition im Schulbuch ist jeder *innere* Punkt der Definitionsmenge sowohl lokales als auch globales Maximum und Minimum, nur für die Randpunkte der Definitionsmenge trifft dies nicht zu.

Die Problemstellung, globale Maxima oder Minima einer Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall zu finden, kann auch als Optimierungsproblem formuliert werden. Sucht man beispielsweise das Minimum einer differenzierbaren Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$, dann lautet das zugehörige Optimierungsproblem:

$$\min f(x) \qquad \text{unter der Nebenbedingung} \quad a \leq x \leq b$$

Mögliche Kandidaten einer optimalen Lösung erfüllen die sogenannten Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen (KKTB).[3] Für die gegebene Problemstellung lauten diese: Ist p eine lokale Lösung des Optimierungsproblems, dann gibt es Zahlen $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ mit

$$\begin{aligned} f'(p) - \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1(p - a) &= 0 \\ \lambda_2(p - b) &= 0 \end{aligned}$$

Ist $p \in (a, b)$, dann gilt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ und somit $f'(p) = 0$. Wenn ein lokales Minimum am Rand des Intervalls $[a, b]$ angenommen wird, dann ist $p = a$ und somit $f'(p) = \lambda_1 \geq 0$ oder $p = b$ und somit $f'(p) = -\lambda_2 \leq 0$.

Die Suche nach Extremwerten hat zunächst aber nichts mit Ableitungen zu tun. Das geht auch aus der Definition im Schulbuch hervor. Allerdings muss ein adäquater Umgebungsbegriff verwendet werden, damit der Begriff einer lokalen Extremstelle einen Sinn ergibt.

In der Menge $\mathbb{R}$ ist eine ε-Umgebung einer reellen Zahl x das offene Intervall $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Eine Menge, welche x samt einer passenden ε-Umgebung enthält, wird als Umgebung von x bezeichnet. Für jedes Element der reellen Zahlen gibt es eine Familie von Umgebungen. Eine Menge mit einer solchen Eigenschaft nennt man topologischen Raum, siehe z.B. [Cigler und Reichel 1987]:

Definition: Eine Menge X heißt *topologischer Raum*, wenn für jedes $x \in X$ eine Mengenfamilie $\mathcal{U}(x)$ *(Umgebungen von x)* existiert, welche folgende Eigenschaften erfüllt:

(1) Für jedes $U \in \mathcal{U}(x)$ gilt $x \in U$.
(2) Wenn $U \in \mathcal{U}$ und $V \supseteq U$, dann ist auch $V \in \mathcal{U}(x)$.
(3) Wenn $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x)$, dann ist auch $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(x)$.
(4) Für jedes $U \in \mathcal{U}(x)$ gibt es ein $V \subseteq U$ mit $V \in \mathcal{U}(x)$, sodass $U \in \mathcal{U}(y)$ für alle $y \in V$. (Jede Umgebung von x ist auch Umgebung jedes Punktes von $y \in V$).

Diese Definition erlaubt es, Begriffe wie „in der Nähe“ und die Konzepte von Stetigkeit und Grenzwert zu verallgemeinern. Insbesondere kann man auch den Begriff eines lokalen Extremums auf einem beliebigen topologischen Raum definieren [Walz 2002]:

[2] Sie besitzt in diesem Punkt sogar eine waagrechte Tangente.

[3] Falls die Nebenbedingungen des Optimierungsproblems lineare Ungleichungen sind (was bei einer Funktion, die auf einem Intervall in $\mathbb{R}$ definiert ist, immer der Fall ist), sind die KKTB notwendige Bedingungen für lokale Extrema.

Definition (*Lokale Extrema 2*) Ein lokales Extremum einer Funktion $f : A \to \mathbb{R}$, wobei A Teilmenge eines topologischen Raums sei, liegt an einer Stelle $p \in A$ vor, wenn es eine Umgebung $U \subseteq A$ von p so gibt, dass die Einschränkung von f auf U ein Extremum an der Stelle p hat.

Betrachten wir nun eine Teilmenge A von $\mathbb{R}$. Enthält jede Umgebung eines Punktes $p \in A$ sowohl Punkte $x \neq p$ aus A als auch Punkte $x \neq p$ aus $\mathbb{R}\backslash A$, dann bezeichnet man p als *Randpunkt* von A. Hier benötigt man einen Umgebungsbegriff auf $\mathbb{R}$. Wenn man diesen verwendet, um lokale Extremstellen zu definieren, erhält man die Definition wie sie im Schulbuch steht. Offensichtlich ist dieser Umgebungsbegriff aber dafür ungeeignet, stattdessen muss man eine Umgebung in A so definieren, dass A selbst ein topologischer Raum wird. Dafür muss auch der Begriff der offenen Menge entsprechend definiert werden.

Definition: Sei X ein topologischer Raum. Eine Menge $O \subseteq X$ heißt *offene Menge*, wenn für jeden Punkt $x \in O$ eine Umgebung $U(x) \subseteq O$ existiert. Die Menge aller offenen Mengen O eines topologischen Raumes X nennt man seine *Topologie*.

D.h. jeder Punkt in O ist ein innerer Punkt. Eine Teilmenge A eines topologischen Raums X kann man nun selbst zu einem topologischen Raum machen, indem man offene Mengen in A folgendermaßen definiert:

Definition: Sei A eine Teilmenge eines topologischen Raums X. Eine Menge $O \subseteq A$ heißt offen in A, wenn es eine offene Menge $W \subseteq X$ gibt, sodass $O = W \cap A$. Diese Topologie heißt *Teilraumtopologie* oder *Spurtopologie*.

Aus dieser Definition folgt, dass A selbst eine offene Menge in der Teilraumtopologie (Spurtopologie) von A ist, aber im umgebenden Raum X nicht offen sein muss. Daher ist auch ein Punkt $p \in A$ welcher in X ein Randpunkt ist, kein Randpunkt unter der Teilraumtopologie in A. Die obige Definition „lokale Extrema 1“, stimmt also für den Raum der reellen Zahlen und für alle offenen Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}$ mit der Definition „lokale Extrema 2“ überein, nicht aber für Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}$, welche in $\mathbb{R}$ nicht offen sind.

Selbstverständlich kann man diese abstrakteren Konzepte der Topologie nicht in der Schule besprechen. Was der Begriff „in der Nähe“ auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ bedeutet – wie schon eingangs erwähnt – aber schon. Daher ist es sinnvoll, wenn Lehrerinnen und Lehrer mit Begriffen der Topologie vertraut sind, auch wenn solche Begriffe nicht Teil des Lehrplans sind. Konzepte sollten so unterrichtet werden, dass sie nicht im Widerspruch zu allgemeineren, abstrakteren Konzepten der Mathematik stehen.

Andrea Gaunersdorfer

Literaturverzeichnis

G. Malle, M. Koth, H. Wolschitz, S. Malle, B. Salzger, A. Ulovec, *Mathematik verstehen 6*, Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien 2018.

J. Cigler, H.-C. Reichel, *Topologie* (2. Aufl.), Bibliographisches Institut, Mannheim, 1987.

M. Fischer, C. Oberbucher, *Österreich, ein Land der Extrema. Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.* 58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik., Saarbrücken, 2025. *https://www.researchgate.net/publication/388181208_Osterreich_ein_Land_der_Extrema.*

H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis – Teil 1* (9. Aufl.), Vieweg & Teubner, Stuttgart, 1991.

O. Stein, *Grundzüge der Globalen Optimierung* (2. Aufl.), Springer-Verlag, Berlin, 2021.

G. Walz (Red.), *Lexikon der Mathematik*, Spektrum Akademischer Verlag, 2002. *https://www.spektrum.de/alias/lexikon/lexikon-der-mathematik/1462355*