Österreichische Mathematische Gesellschaft

MATHE-BRIEF

November 2024 — Nr. 130

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Der Binomialkoeffizient $\binom{2n}{n}$

Für natürliche Zahlen n,k mit $k \leq n$ ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ durch den Ausdruck $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ definiert. Er entspricht der Anzahl der Möglichkeiten, aus n Elementen k Elemente auszuwählen. Insbesondere ist er somit stets ganzzahlig, und es gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Der binomische Lehrsatz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

liefert durch die Spezialisierung $a = b = 1$ die Identität

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Schlussendlich ist unter allen Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ bei festem n derjenige am größten, für den k so nahe wie möglich an $n/2$ liegt, also für $k = n/2$, falls n gerade ist und für $k = (n \pm 1)/2$, falls n ungerade ist. Dies liegt daran, dass $a!b!$ bei konstantem Wert von $a+b$ minimal wird, wenn a sich so wenig wie möglich von b unterscheidet.

Wendet man das bisher gesagte auf $\binom{2n}{n}$ an, so ergibt sich

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}{n(n-1)\cdots 1}$$

als grösster Binomialkoeffizient der Ordnung n. Für diesen gilt

$$2^n \leq \binom{2n}{n} < 4^n. \tag{1}$$

Die rechte Abschätzung folgt aus der Tatsache, dass die Summe aller Bimomialkoeffizienten $\binom{2n}{k}$ gleich $2^{2n} = 4^n$ ist. Für die linke Abschätzung verwenden wir

$$\binom{2n}{n} = \frac{2n}{n} \cdot \frac{2n-1}{n-1} \cdots \frac{n+1}{1} \;\geq\; 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^n.$$

Aus zahlentheoretischer Sicht ist der hier vorkommende Quotient von großer Bedeutung, da man über seine Primfaktorzerlegung erstaunlich viel aussagen kann. So sind etwa alle Primzahlen, die in der Zerlegung auftreten, kleiner als $2n$ und diejenigen Faktoren p, die $n < p < 2n$ erfüllen, treten alle mit Vielfachheit 1 auf.

Es verbleibt also, zu untersuchen, mit welcher Vielfachheit die Primzahlen $p \leq n$ in $n!$ vorkommen. Für jede natürliche Zahl von 1 bis n, die durch p^m teilbar ist, kommt ein Faktor p^m in $n!$ dazu. D.h.

jedes p^m kommt n/p^m mal (abgerundet) als Faktor in $n!$ vor. Insgesamt ist die Vielfachheit von p in $n!$ also gegeben durch

$$\sum_{m:p^m\leq n} \left\lfloor \frac{n}{p^m} \right\rfloor.$$

Die Anzahl der Summanden ist dabei wie folgt begrenzt: Wir haben

$$p^m \leq n \iff m\log p \leq \log n,$$

d.h. der Index m läuft von 1 bis maximal $\log n/\log p$. Wir können daher die Vielfachheit auch angeben durch

$$\sum_{m=1}^{\lfloor \frac{\log n}{\log p} \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{p^m} \right\rfloor.$$

Daraus erhält man die Vielfachheit der Primzahl p in $\binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$: Von der Vielfachheit im Zähler müssen wir die Vielfachheit im Nenner subtrahieren. D.h. wir betrachten den obigen Ausdruck für $2n$ und subtrahieren zweimal den Ausdruck für n:

$$m_p = \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{\log 2n}{\log p} \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^m} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^m} \right\rfloor \right) \tag{2}$$

Dies ist die Vielfachheit, mit der die Primzahl p in $\binom{2n}{n}$ vorkommt. Der Klammerausdruck ist dabei stets 0 oder 1, je nachdem ob die Division $2n/p^m$ ein gerades oder ungerades Resultat ergibt. Deshalb ist die Vielfachheit, mit der p in $\binom{2n}{n}$ vorkommt, höchstens so groß wie die Anzahl der Summanden, also

$$m_p \leq \left\lfloor \frac{\log 2n}{\log p} \right\rfloor. \tag{3}$$

Die Abschätzung gilt auch für Primzahlen p zwischen n und $2n$. Eine solche kann in $\binom{2n}{n}$ höchstens mit Vielfachheit 1 vorkommen. In der Tat hat $\lfloor \log 2n/\log p \rfloor$ für solche Primzahlen immer den Wert 1: Der Bruch $\log 2n/\log p$ ist immer größer als 1. Wegen $p^2 > np \geq 2n$ gilt auch $2\log p > \log(2n)$, d.h. der Quotient $\log(2n)/\log p$ ist immer kleiner als 2, und Abrunden ergibt 1.

Abzählen von Primzahlen. An dieser Stelle ist die Frage, was man mit diesem Wissen nun anfangen kann, durchaus berechtigt. Bezeichnet man mit

$$\pi(n)$$

die Anzahl der Primzahlen bis n, so lässt sich mit dem Wissen um die Primfaktoren von $\binom{2n}{n}$ eine sehr gute Abschätzung für $\pi(n)$ sowohl nach unten als auch nach oben angeben. Ausgehend von

$$2^n \leq \binom{2n}{n}$$

erhalten wir durch Logarithmieren:

$$n\log 2 = \log(2^n) \leq \log \binom{2n}{n}.$$

Wir stellen $\binom{2n}{n}$ nun als Produkt von Primzahlpotenzen p^m dar. Der Logarithmus von $\binom{2n}{n}$ ist dann die Summe aller dazugehörigen $\log(p^m) = m \log p$. In Gleichung (3) haben wir für alle Primzahlfaktoren p die Vielfachheit abgeschätzt, und wir erhalten

$$n \log 2 \leq \sum_{p \leq 2n} \left\lfloor \frac{\log 2n}{\log p} \right\rfloor \log p \leq \sum_{p \leq 2n} \frac{\log 2n}{\log p} \log p = \sum_{p \leq 2n} \log 2n = \pi(2n) \cdot \log 2n.$$

Es folgt

$$\pi(2n) \;\geq\; \frac{n \log 2}{\log 2n} \;=\; \frac{2n}{\log 2n} \frac{\log 2}{2} \;>\; 0{,}346 \frac{2n}{\log 2n}.$$

Hier haben wir zum ersten Mal verwendet, dass „log“ den natürlichen Logarithmus darstellt. Für ungerade Zahlen gibt es eine ähnliche Abschätzung:

$$\pi(2n+1) \geq \pi(2n) > 0{,}346 \frac{2n}{\log 2n} > 0{,}346 \frac{2n}{2n+1} \frac{2n+1}{\log(2n+1)} \geq \frac{1}{6} \frac{2n+1}{\log(2n+1)}.$$

Hier haben wir verwendet, dass $0{,}346 \frac{2n}{2n+1}$ immer größer oder gleich $1/6$ ist. Insgesamt haben wir jetzt für alle, sowohl ungerade als auch gerade natürliche Zahlen, die Abschätzung

$$\pi(n) > \frac{1}{6} \frac{n}{\log n} \text{ für alle } n \geq 2. \tag{4}$$

Für eine Abschätzung von $\pi(n)$ in die andere Richtung berücksichtigen wir im Ausdruck für $\log \binom{2n}{n}$ lediglich den Summanden für $m = 1$ in Gleichung (2). Wir erhalten

$$\log \binom{2n}{n} \geq \sum_{p \leq 2n} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \right) \log p$$

Wir haben oben bereits festgehalten, dass der Klammerausdruck für Primzahlen von 1 bis n entweder gleich 0 oder gleich 1 ist. Für Primzahlen zwischen n und $2n$ ist der Klammerausdruck immer gleich 1. Wir erhalten daher

$$\log \binom{2n}{n} \geq \sum_{n < p \leq 2n} \log p = \sum_{p \leq 2n} \log p - \sum_{p \leq n} \log p.$$

Mit Hilfe der Funktion

$$\Theta(n) := \sum_{p \leq n} \log p$$

schreiben wir

$$\Theta(2n) - \Theta(n) \leq \log \binom{2n}{n}.$$

Unter Berücksichtigung von $\binom{2n}{n} < 4^n$, siehe (1) erhalten wir somit

$$\Theta(2n) - \Theta(n) < n \log 4.$$

Setzt man nun $n = 2^r$, so folgt

$$\Theta(2^{r+1}) - \Theta(2^r) < 2^r \log 4 = 2^{r+1} \log 2.$$

Durch Summieren dieser Ungleichungen für $r = 0, 1, 2, \ldots, k$ ergibt sich (man beachte $\Theta(1) = 0$):

$$\Theta(2^{k+1}) = \Big(\Theta(2^1) - \Theta(2^0)\Big) + \Big(\Theta(2^2) - \Theta(2^1)\Big) + \cdots + \Big(\Theta(2^{k+1}) - \Theta(2^k)\Big)$$
$$< 2\log 2 + 4\log 2 + \cdots + 2^{k+1}\log 2 = (2 + 4 + \cdots 2^{k+1})\log 2 = 2^{k+2}\log 2$$

Wählt man nun zu gegebenem n den Parameter k derart, dass $2^k \leq n < 2^{k+1}$, so ist

$$\Theta(n) \leq \Theta(2^{k+1}) < 2^{k+2}\log 2 \leq 4n\log 2.$$

Um daraus eine Abschätzung für $\pi(n)$ zu erhalten, beachten wir, dass für $\alpha \in (0, 1)$ gilt:

$$\pi(n) - \pi(n^\alpha) = \sum_{n^\alpha < p \leq n} 1 < \sum_{n^\alpha < p \leq n} \frac{\log p}{\log n^\alpha} \implies$$
$$(\pi(n) - \pi(n^\alpha))\log n^\alpha < \sum_{n^\alpha < p \leq n} \log p \leq \sum_{p \leq n} \log p = \Theta(n) < 4n\log 2 \implies$$
$$\pi(n) < \frac{4n\log 2}{\log n^\alpha} + \pi(n^\alpha) < \frac{4n\log 2}{\alpha\log n} + n^\alpha = \frac{n}{\log n}\left(\frac{4\log 2}{\alpha} + \frac{\log n}{n^{1-\alpha}}\right).$$

Mit $\alpha = 2/3$ folgt

$$\pi(n) < \frac{n}{\log n}(6\log 2 + \frac{\log n}{n^{1/3}})$$

Das Maximum von $\log x/x^{1/3}$ kann leicht ermittelt werden, es beträgt $3/e$. Der Klammerausdruck hat daher nie einen Wert größer als $5.26\ldots < 6$. Zusammen mit (4) erhalten wir

$$\frac{1}{6}\frac{n}{\log n} < \pi(n) < 6\frac{n}{\log n} \tag{5}$$

Diese Beweismethode zur Abschätzung von $\pi(n)$ geht auf P.L. Tschebyscheff zurück, der eigentlich die viel schärfere Aussage $\pi(n) \asymp \frac{n}{\log n}$ als Ziel hatte (d.h. Ungleichungen wie die (5), wo 6 durch Zahlen beliebig nahe bei 1 ersetzt wird). Dies ist jedoch mit diesen Mitteln nicht zu erreichen.

Mit denselben Überlegungen zu $\binom{2n}{n}$ lässt sich auch ein sehr eleganter Beweis für das *Bertrandsche Postulat* geben. Dieses besagt, dass für alle $n > 1$ zwischen n und $2n$ stets mindestens eine Primzahl liegt. Die Idee dabei liegt auf der Hand: gäbe es keine Primzahl zwischen n und $2n$, so hätte $\binom{2n}{n}$ lediglich Primfaktoren $\leq n$ und deren Vielfachheit haben wir ziemlich gut abgeschätzt. Andererseits wächst $\binom{2n}{n}$ ziemlich rasch, sodass man für grosse n auf einen Widerspruch hoffen darf. Diese Beweisidee stammt von Paul Erdös und wird sehr schön in [1] erklärt.

Literatur

[1] M. Aigner, G.M. Ziegler *Das Buch der Beweise*. Springer Verlag (2002)

L. Summerer