



STEREOGRAFISCHE PROJEKTION, INVERSION UND AUSSERIRDISCHE KREISMUSTER

1. Einleitung In diesem Aufsatz wollen wir uns zunächst die stereografische Projektion aus einem Zentrum Z auf der Kugel auf eine Ebene ansehen, die zur Tangentialebene in Z parallel ist. Von dieser Projektion zeigen wir mit elementar-geometrischen Überlegungen, dass sie winkel- und kreistreu ist. In engem Zusammenhang mit dieser Projektion steht die Inversion am Kreis, die zwar nicht-linear ist, aber dennoch ebenfalls winkel- und kreistreu. Durch räumliche Deutung „erbt“ die Inversion nämlich die Eigenschaften der stereografischen Projektion. Die Inversion kann verwendet werden, um interessante und keineswegs triviale Kreismuster zu erzeugen, die ihrerseits immer wieder in Luftbildern als Abdrücke in hochgewachsenen Getreidefeldern zu sehen sind. Solche „Kornkreise“ werden dann mitunter als Werk von Außerirdischen hingestellt. Hier wird an Hand eines konkreten Beispiels gezeigt, wie man solch riesige Muster vergleichsweise einfach erzeugen kann.

2. Die stereografische Projektion Die Zentralprojektion der Kugelpunkte aus einem Kugelpunkt auf die gegenüberliegende Berührebene (oder eine dazu parallele Ebene) spielt in der Kartografie eine wichtige Rolle und heißt stereografische Projektion. Jeder Punkt auf der Erdoberfläche hat einen gegenüberliegenden Punkt. Projiziert man von einem antipodischen Punkt Z aus auf die Tangentialebene π des ersten Punktes, erhält man eine stereografische Projektion (Fig. 1).

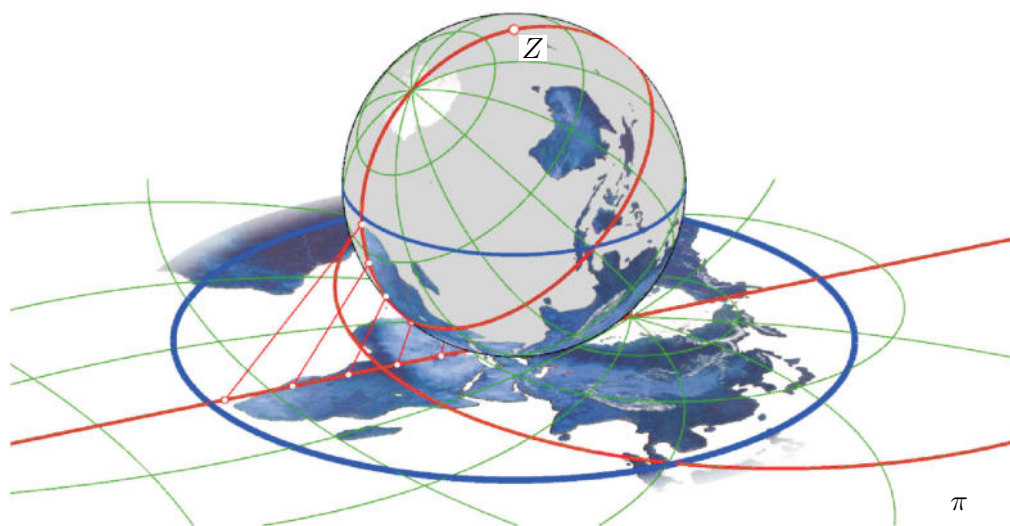


FIG. 1. Die Inversion wird als Projektion erklärt

Diese hat den Vorteil, dass die Winkel von sich schneidenden Kurven auf der Kugel im projizierten Bild erhalten bleiben. Weiterhin wird das Netz der Breiten- und Längengrade in ein kreisförmiges

Netz abgebildet; und schließlich kann die gesamte Kugel, mit Ausnahme des Projektionspunktes, auf die Ebene projiziert werden (in Fig. 1 wurden Teile der Landmassen, die nahe an Z liegen, wegen der starken Verzerrungen weggelassen und auch die Kontinente auf der Kugel spiegelverkehrt eingezeichnet, damit die Karte in der vorliegenden Ansicht von oben wie gewohnt aussieht). Kreise auf der Kugel, die das Zentrum Z enthalten, erscheinen in der Projektion als Geraden.

Wir wollen nun zeigen: *Die stereografische Projektion ist winkeltreu und kreistreu*

Beweis: Sei Z das Projektionszentrum auf der Kugel und π die gegenüberliegende Tangentialebene (Fig. 2 links). Sie sei der Einfachheit halber horizontal. Den Geraden dieser Grundebene π entsprechen bei der Zentralprojektion Kreise durch Z , die sich als Schnitt ihrer Verbindungsebenen mit der Kugel ergeben. Betrachten wir zwei solche Geraden a und b mit Schnittpunkt P und Schnittwinkel φ . Ihnen entsprechen zwei Kreise a_k und b_k auf der Kugel durch P_k und Z .

In beiden Schnittpunkten zweier Kugelschnitte sind die Schnittwinkel natürlich gleich. Der Schnittwinkel von a_k und b_k in Z ist aber der Winkel φ , weil die zugehörigen Kreistangenten in der horizontalen Tangentialebene von Z liegen und deshalb zu a bzw. b parallel sind. Daher schneiden einander a_k und b_k auch im Punkt P_k unter dem Winkel φ . Was für den Schnittwinkel zweier Geraden gilt, gilt allgemein für den Schnittwinkel zweier Kurven, denn der Schnittwinkel ist als Winkel der zugehörigen Tangenten definiert. Damit haben wir die Winkeltreue bewiesen.

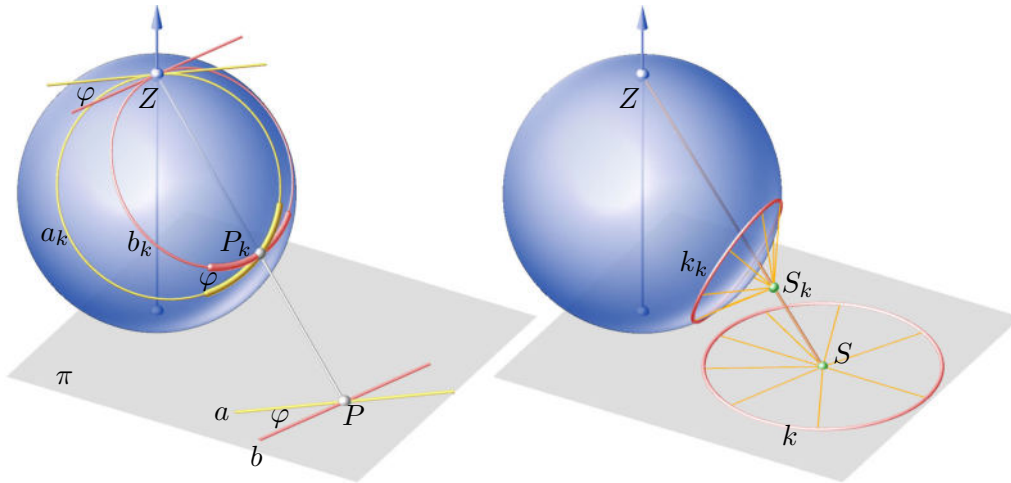


FIG. 2. Winkeltreue (links) und Kreistreue (rechts)

Zum Beweis der Kreistreue holen wir kurz etwas aus: Die stereografische Projektion auf π ist eigentlich nichts Anderes als eine Zentralprojektion auf π – unter besonderer Berücksichtigung der Punkte einer zwischen Zentrum und Bildebene „eingeschobenen“ Hilfskugel (genauer: die Einschränkung einer Zentralprojektion auf die Kugel). Wenn wir Punkte oder auch Geraden mitprojizieren, die nicht auf der Kugel liegen, ist das nicht verboten; Winkeltreue und die Eindeutigkeit in beide Richtungen gelten aber nur für Elemente der Kugel.

Sei k_k ein Kreis auf der Kugel (Fig. 2 rechts). Nun betrachten wir einen Drehkegel, der die Kugel längs k_k berührt. Er hat eine Spitze S_k und lauter Erzeugende, die den Kreis *auf der Kugel* unter rechtem Winkel schneiden. Nun projizieren wir S_k aus Z nach $S \in \pi$. Den Erzeugenden entsprechen bei der Zentralprojektion Geraden durch S . Auf jeder solchen Geraden befindet sich irgendwo das Bild eines Punktes von k_k . Dort (und nur dort) gilt die bewiesene Winkeltreue. Die Tangente der Projektion $k \in \pi$ von k_k muss dort – wie auf der Kugel – die projizierte Kegelerzeugende unter rechtem Winkel schneiden. Es gibt aber nur einen Typus von Kurve, welche ein Strahlbüschel rechtwinklig durchsetzt: den Kreis! Mehr noch: S muss Mittelpunkt dieses Kreises sein!

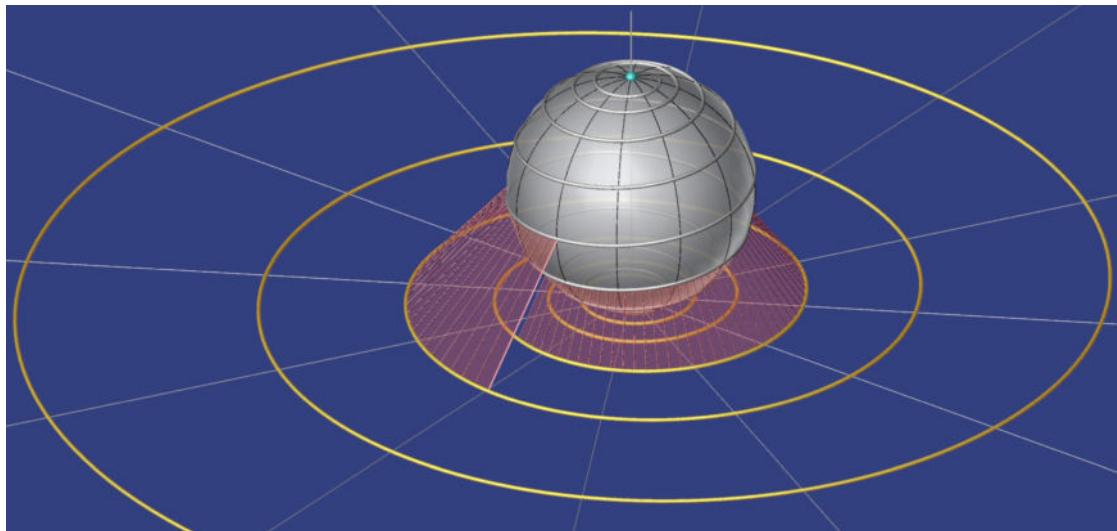


FIG. 3. Loxodrome auf einer Kugel und ihre stereographische Projektion

Fig. 3 illustriert ein schönes Anwendungsbeispiel für die Winkeltreue der stereografischen Projektion: Eine (ebene) logarithmische Spirale durchsetzt die Strahlen aus ihrem Zentrum unter konstantem Winkel. Projiziert man die Spirale und die Radialstrahlen geeignet stereografisch auf die Kugel, erhält man eine sphärische Loxodrome, die alle Meridiankreise unter gleichem Winkel durchsetzt.

3. Die Inversion (Spiegelung) an einem Kreis Wir betrachten einen Kreis $(M; r)$ der Ebene und ordnen jedem Punkt P der Ebene einen Punkt P^* am Radialstrahl MP zu, wobei $\overline{MP} \cdot \overline{MP^*} = r^2$ gilt (Fig. 4). Diese Beziehung nennt man Inversion oder auch Spiegelung am Kreis. Die Zuordnung ist natürlich auch umkehrbar, aber sie ist nicht linear: Wenn P auf einer Geraden läuft, wandert P^* auf einem Kreis durch M . Obwohl die Abbildung quadratisch ist (einer algebraischen Kurve n -ten Grades entspricht bei der Inversion i. Allg. eine Kurve vom Grad $2n$) gibt es zwei Ausnahmen: Kreisen, die nicht durch M gehen, entsprechen Kreise und jenen, die M enthalten, entsprechen Geraden (und umgekehrt) – wie die folgende Interpretation im Raum sofort einsichtig macht.

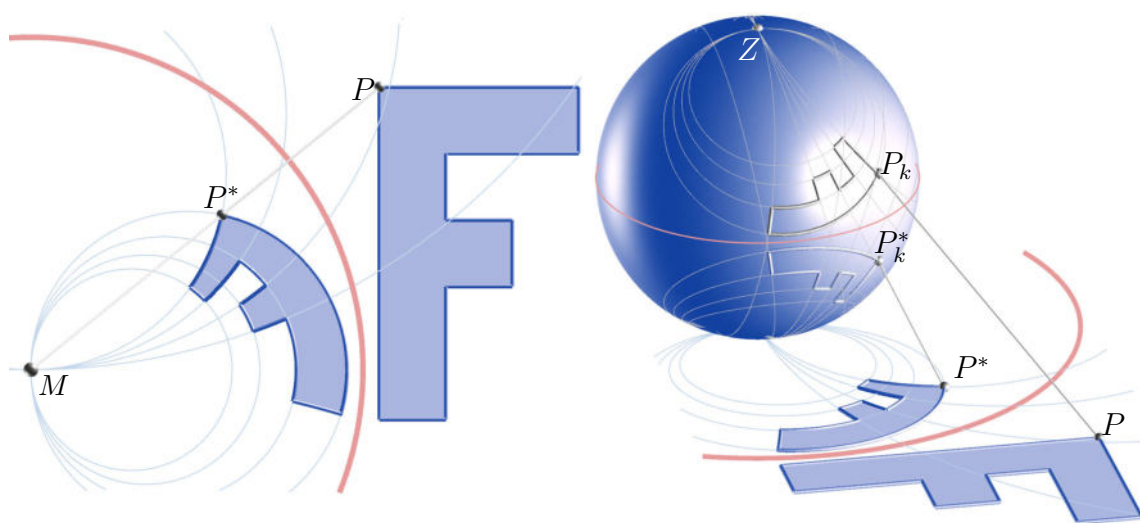


FIG. 4. Links: Inversion am Kreis, rechts: räumliche Interpretation

Räumliche Deutung Die Inversion der Ebene ist für ein dreidimensional denkendes Lebewesen etwas ganz Einfaches, nämlich die Spiegelung einer Kugelhälfte an der Berandungsebene. Das „missing link“ ist eine stereografische Projektion (Fig. 4 rechts und Fig. 5):

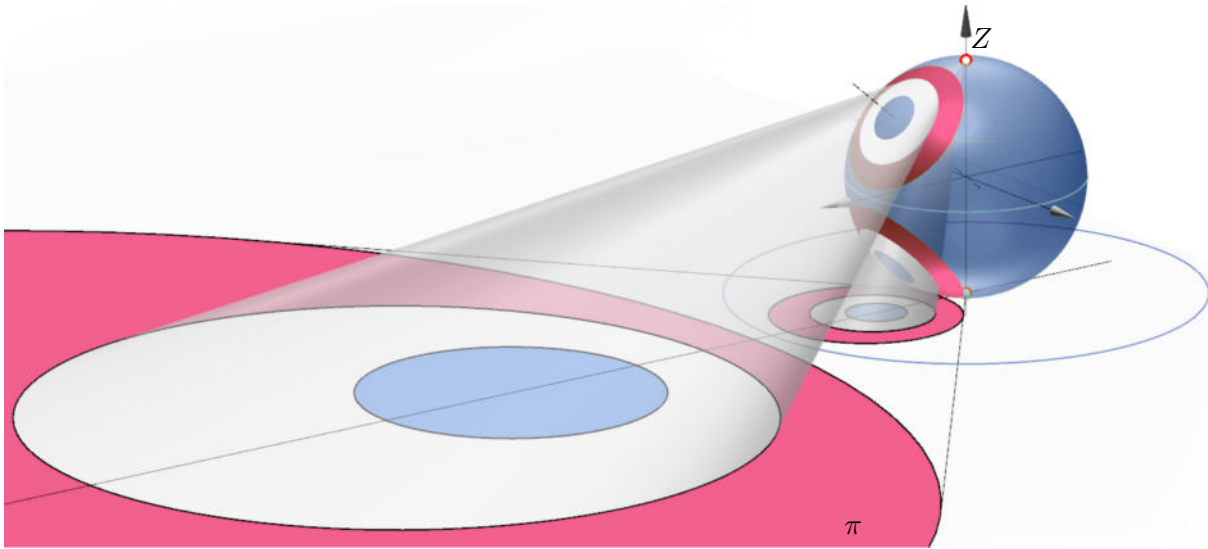


FIG. 5. Die Inversion an einem Kreis, interpretiert als Zentralprojektion

Sei π die waagrechte Zeichenebene, auf deren Ursprung eine Kugel vom Durchmesser 1 ruht. Projiziert man übereinander liegende Punkte der Kugel vom höchsten Punkt der Kugel auf π , dann erhält man Punkte, die bezüglich des „verdoppelten“ Einheitskreises in π invers sind.

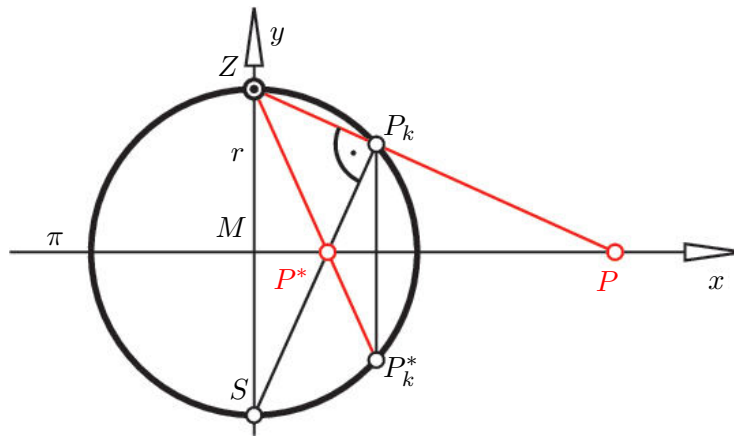


FIG. 6. Die Inversion an einem Kreis, interpretiert als Zentralprojektion

Beweis: Für die nachfolgende einfache Rechnung denken wir uns ein zweidimensionales Koordinatensystem (Fig. 6) mit der Kugelmittle M als Ursprung, der x -Achse Richtung P und der y -Achse Richtung Z . Wenn x_0 die x -Koordinate von P bezeichnet, dann hat die Gerade PZ den Anstieg $-\frac{r}{x_0}$ (r = Kugelradius). Der Anstieg der Geraden P_kS ist dann $\frac{x_0}{r}$, und ihre Gleichung lautet folglich $y = \frac{x_0}{r} \cdot x - r$. Um P^* zu erhalten, brauchen wir diese nur noch mit der x -Achse zu schneiden:

$$\frac{x_0}{r} \cdot x - r = 0 \Rightarrow x_0 \cdot x = r^2.$$

Dies zeigt bereits, dass P und P^* invers bezüglich des Kreises um M mit Radius r sind.

4. Nicht-triviale Kreismuster

Zwei Beispiele sollen zeigen, dass man mit der Inversion am Kreis nicht-triviale Kreismuster erzeugen kann.

Beispiel 1 (Fig. 7 links) zeigt Kreise, welche sich allesamt berühren und die Ebene pflastern. Sie entstehen durch Inversion des trivialen Kreismusters, bei dem die Kreismittelpunkte ein Bienenwabenmuster bilden. Projiziert man stereografisch auf eine Halbkugel, erhält man dadurch schön anzusehende Kreismuster auf der Kugel. In der Abbildung wurde der Algorithmus adaptiert: Man nimmt die Mittelpunkte der Kreise auf der Kugel und zentriert um sie Kugeln, deren Radius proportional zum entsprechenden Kreistradius ist. So entstehen Bilder, die frappant an die Blütenkörbe von Gänseblümchen oder anderen Korbblütlern erinnern. Selbst eine affine Streckung oder Stauchung, die aus der Kugel ein Drehellipsoid macht, ändert nur wenig am Erscheinungsbild und entspricht dann oft mehr den Gegebenheiten in der Natur.

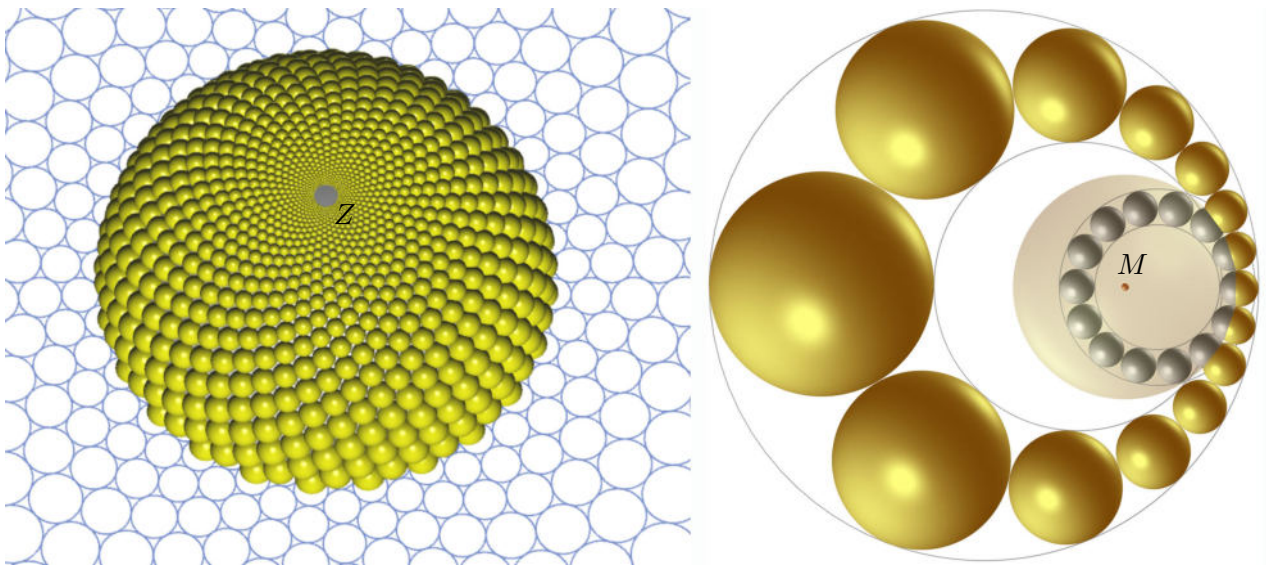


FIG. 7. Links: Mithilfe einer Inversion und anschließender stereografischer Projektion erzeugte Muster auf der Kugel. Rechts: Durch Inversion erzeugtes Kreismuster.

Beispiel 2: Das Muster in Fig. 7 rechts wurde erzeugt, indem zunächst um ein regelmäßiges Polygon ein geschlossenes Muster aus gleich großen (grauen) Kreisen gebildet wurde und dieses einer Inversion an einem Kreis, dessen Mitte M irgendwo allgemein im Polygon angenommen wurde, unterworfen wurde.

Anmerkung: Interpretiert man die so erhaltenen Kreise (grau bzw. gelb) als Umrisse von Kugeln in der Basisebene, erkennt man, dass diese von einem Torus bzw. einer Dupinschen Zyklide eingehüllt werden. Die Kugelmitten liegen im Fall der Zyklide keineswegs auf einem Kreis, sondern auf einer Ellipse.

5. Die praktische Erzeugung der berühmt-berüchtigten Kornkreise

Man betrachte die Luftaufnahme eines riesigen „Kornkreise-Musters“ in Fig. 8 oben links (public domain), das Vorbild für Fig. 7 rechts war (siehe dazu <https://de.wikipedia.org/wiki/Kornkreis>). Es kommen jährlich angeblich 150-300 neue Muster dazu. Alle diese Muster haben eines gemeinsam: In den großen Getreidefeldern gibt es immer Traktorspuren, wo das Getreide ohnehin schon plattgedrückt ist.

Es braucht nun zumindest drei Personen A , B und C und eventuell ein paar weitere Helfer. Sie sind ausgerüstet mit Schnüren und Schlaufen verschiedener vorberechneter Längen, einer nicht allzu breiten Walze zum Niederdrücken des Getreides und einer Anzahl von Pfosten, die länger sind als die Getreidehalme (siehe Fig. 8 oben rechts). Der Trupp kann, ohne Spuren zu hinterlassen, längs dieser Traktorspuren an die geplante Stelle marschieren und dort einen ersten Kreis niederwalzen. Um die jeweilige Kreismitte wird mittels eines Pfostens die Walze herumgeführt, um Kreisring für Kreisring den vorgesehenen Kreis plattzudrücken. Vorbereitete Schnüre geben die Radien der Kreise an. A und B marschieren nun wie folgt verzögert von Kreismittelpunkt zu Kreismittelpunkt, während C auf der Traktorspur bleibt: Die drei spannen eine für jeden neuen Kreis vorbereitete Schlaufe genau berechneter Länge zu einem Dreieck (versehen mit drei Knoten, an denen A , B und C dieselbe halten), indem sich A im schon niedergedrückten Kreis frei bis zur geschätzten Berührstelle zum nächsten Kreis und darüber hinaus weiterbewegt, während B und C an ihrer Position bleiben. Ist der neue Kreismittelpunkt mittels eines Pfostens fixiert, kann sich auch B dorthin bewegen und die beiden wälzen die neue Kreisfläche Ring für Ring nieder. Auf dieses Weise findet eine Art Triangulierung des Mittelpunktnetzes aller Kreise statt (restliche Bilder in Fig. 8). Gelegentlich wird C auch – zumeist auf der Traktorspur – weiterwandern. Zum konkreten Beispiel gibt es eine Animation von Franz Gruber [2]: <http://tethys.uni-ak.ac.at/cross-science/crop-circles.mp4>.

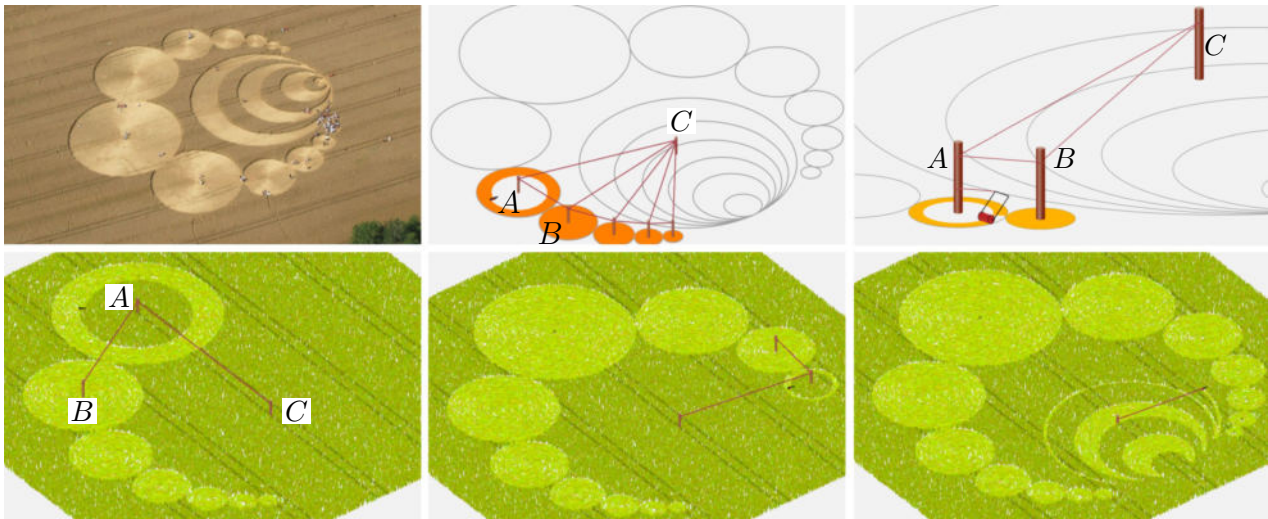


FIG. 8. Die berühmt-berüchtigten Kornkreise haben oft riesige Ausmaße und man scheint keinerlei menschliche Spuren zu sehen, wodurch oft „Außerirdische“ als Erzeuger der Muster herhalten müssen.

LITERATUR

- [1] G. GLAESER: Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik (4. Auflage). Springer Spektrum, Berlin-Heidelberg, 2022.
- [2] G. GLAESER, FRANZ GRUBER: Geometrie, Physik und Biologie verstehen. Springer Spektrum, Berlin-Heidelberg, 2023.

G. Glaeser