MATHE-BRIEF

März 2011 — Nr. 12

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

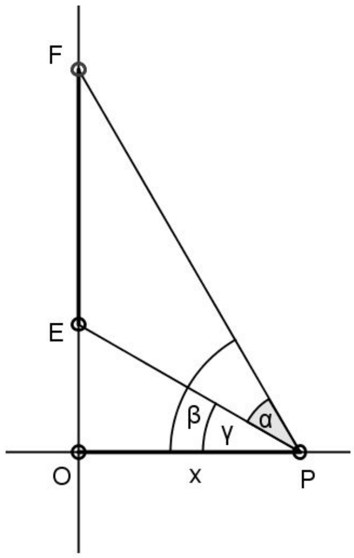
Das Autokino-Problem.

Das Problem: In welcher Entfernung von der vertikalen Leinwand befindet sich ein Autokino-Besucher, der die vertikale Ausdehnung der Leinwand unter dem maximalen Winkel betrachtet?

Um eine Antwort auf diese Frage zu erhalten, geben wir dem Besucher einen Namen, sagen wir P, und reduzieren ihn auf einen Punkt in Augenhöhe, d.h. auf der x-Achse, im (positiven) Abstand x vom Ursprung O des Koordinatensystems. Von der Seite gesehen (‚im Kreuzriss‘) erscheint die Leinwand als eine vertikale Strecke von $E = (0, e)$ bis $F = (0, f)$ über dem Koordinaten-Ursprung O, die P unter dem Winkel α sieht.

Analytische Lösung: Der Winkel α ist die Differenz der Winkel $\beta = \angle OPF$ und $\gamma = \angle OPE$. Sein Tangens ist

$$\tan\alpha = \tan(\beta - \gamma) = \frac{\tan\beta - \tan\gamma}{1 + \tan\beta \cdot \tan\gamma} = $$
$$= \frac{\frac{f}{x} - \frac{e}{x}}{1 + \frac{e}{x} \cdot \frac{f}{x}} = \frac{(f-e)x}{x^2 + ef}.$$



Einem maximalen Winkel α entspricht ein maximaler Tangens $\tan\alpha$. Also erhalten wir den gesuchten Abstand, wenn die Ableitung des Tangens nach x gleich Null gesetzt wird:

$$\frac{d(\tan\alpha)}{dx} = (f-e)\frac{x^2 + ef - 2x^2}{(x^2+ef)^2} = 0$$
$$-x^2 + ef = 0, \quad \text{d.h.} \quad x = \sqrt{ef}.$$

Die gesuchte Distanz ist also das geometrische Mittel der beiden Höhen e und f. In einer Variante der Berechnungsweise könnte der Tangens von α auch geschrieben werden als

$$\tan\alpha = \frac{f-e}{x + \frac{ef}{x}}.$$

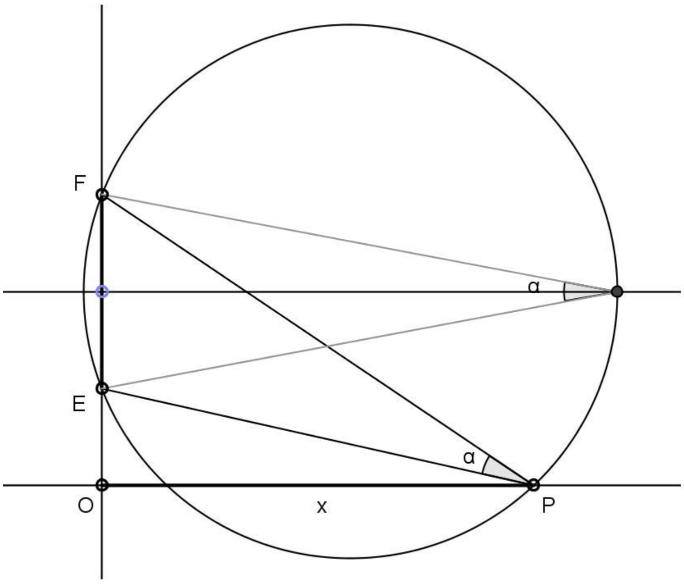
Er wird maximal, wenn der Nenner minimal wird. Wird die Ableitung des Nenners Null , so ergibt sich wieder

$$\left(x + \frac{ef}{x}\right)' = 1 - \frac{ef}{x^2} = 0, \quad \text{d.h.} \quad x^2 = ef.$$

In einer weiteren Lösungs-Variante könnte der Cosinus des Winkels α minimiert werden, wobei $\cos\alpha$ aus dem skalaren Produkt der beiden Vektoren $\overrightarrow{PE}$ und $\overrightarrow{PF}$ berechnet werden kann.

Dieses Problem wurde zum ersten Male im Jahre 1471 von einem Nürnberger Astronomen namens Johann Müller, alias Regiomontanus, gestellt und gelöst, der allerdings weder ein Autokino noch die Lösungsmethoden der damals noch nicht entwickelten Analysis kennen konnte. $\overline{EF}$ war einfach eine vertikale Strecke, und seine Lösung war eine geometrische.

Geometrische Lösung: Würde P sich nicht auf der x-Achse befinden, sondern auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{EF}$ wandern, dann wäre das Problem trivial (aber für den Kinobesucher unbefriedigend) zu lösen: je näher sich P bei der Leinwand befindet, um so größer ist der Blickwinkel α; im Grenzfall, wenn P in die Strecke $\overline{EF}$ fällt, ist er maximal und 180° (und der Kinobesucher sieht gar nichts mehr); je weiter sich P von der Leinwand weg bewegt, um so kleiner wird der Winkel α.

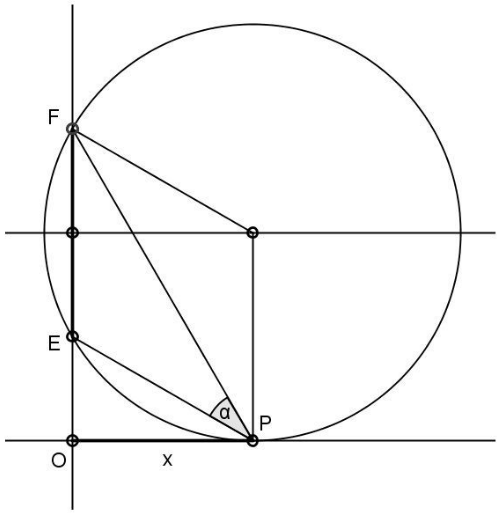


P kann sich aber auch so bewegen, dass sein Sehwinkel α konstant bleibt: von jedem Punkt des Kreisbogens K_α durch die Punkte P, E und F wird nach dem Peripheriewinkelsatz die Sehne $\overline{EF}$ unter dem gleichen Winkel α gesehen, und die Radien der Kreisbögen K_α nehmen als Funktion von α ab bis dieser Winkel ein rechter ist und der zugehörige Kreis den Durchmesser $\overline{EF}$ hat. Für einen auf der x-Achse wandernden Punkt P kann der Sehwinkel α nie 90° werden (er kann ja nie auf diesem Kreis mit dem Durchmesser $\overline{EF}$ liegen); er wird aber dann maximal, wenn er auf dem Kreisbogen K_α mit dem kleinst-möglichen Radius liegt, und das ist jener, der die x-Achse gerade berührt.

Sein Mittelpunkt ergibt sich, wenn sein Radius $\frac{e+f}{2}$ von E oder F aus auf der Mittelsenkrechten von $\overline{EF}$ abgetragen wird. Sein Berührungspunkt mit der x-Achse ist der gesuchte Punkt P. Aus dem rechtwinkeligen Dreieck mit den Katheten x, $\frac{f-e}{2}$ und der Hypotenuse $\frac{e+f}{2}$ ergibt sich

$$x^2 + \left(\frac{f-e}{2}\right)^2 = \left(\frac{e+f}{2}\right)^2$$

$$x^2 = ef, \quad \text{d.h. } x = \sqrt{ef}.$$



Bemerkung: Die Anregung zu diesen Ausführungen lieferte der Artikel [1], der auch andere, mit dem obigen verwandte, kreisgeometrische Probleme behandelt. Eine Kurzbiographie von Regiomontanus kann in [2] gefunden werden.

Literatur

[1] Meixner, T., Metsch, K.: Von einer Extremwertaufgabe zur Inversion am Kreis. *Mathematische Semesterberichte* 57, Heft 1 (2010), 103–122.

[2] Maor, E.: Johann Müller, alias Regiomontanus. *http://press.princeton.edu/books/maor/sidebar_c.pdf*.