Österreichische
Mathematische
Gesellschaft

MATHE-BRIEF

März 2021 — Nr. 106

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

DIE PRODUKTREGEL: NICHT ÄRGERN, SONDERN VERTIEFEN!

Lehrer und Lehrerinnen ärgern sich manchmal über ihre Schüler und Schülerinnen, wenn sie die Regel

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g'$$

verwenden. Man sagt dann, dass diese Regel falsch sei und es sei an der Zeit, sich die Regel von Leibniz

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

einzuprägen. Aber es gibt eine Möglichkeit, diesen Irrtum fruchtbar zu machen. Es könnte doch sein, dass für manche Funktionen f und g diese „falsche“ Regel doch stimmt. Wir beweisen dazu folgenden

Satz: *Sei f eine stetig differenzierbare Funktion, die auf einem Intervall definiert ist, und gelte überall im Definitionsbereich $f \neq f'$. Dann gibt es eine differenzierbare Funktion $g \neq 0$, sodass*

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g'$$

gilt.

Beweis: Sei $(f \cdot g)' = f' \cdot g'$. Da aber $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ gilt, folgt daraus

$$f' \cdot g + f \cdot g' = f' \cdot g'.$$

Daraus leitet man die Gleichung

$$\frac{g'}{g} = \frac{f'}{f' - f}$$

her. Die linke Seite dieser Gleichung ist die Ableitung von $\ln g(x)$. Sei ϕ eine Stammfunktion der rechten Seite, d.h.

$$\phi = \int_{x_0}^{x} \frac{f'(s)}{f'(s) - f(s)} ds \text{ bzw. } \phi' = \frac{f}{f' - f}.$$

Eine solche existiert, und wir erhalten

$$\ln |g(x)| = \phi(x)$$

Damit ist der Satz bewiesen. Alle möglichen Stammfunktionen unterscheiden sich nur um eine additive Konstante, d.h. sie haben die Form $\phi + C$. Damit erhalten wir

$$|g(x)| = e^C e^{\phi(x)} \text{ oder } g(x) = \pm e^C e^{\phi(x)}.$$

Man sieht, dass alle möglichen Lösungen aus $e^\phi(x)$ duch Multiplikation mit einer Konstanten hervorgehen. Wählt man g als die Nullfunktion, so ist die Relation $(f \cdot g)' = f' \cdot g'$ trivialerweise erfüllt.

Wir wollen einige Beispiele rechnen:

(1) Sei $f(x) = e^{\alpha x}$ mit $\alpha \neq 1$, so ist

$$\frac{f'}{f'-f} = \frac{\alpha}{\alpha - 1} = \beta,$$

also $\phi(x) = \beta x$. Daher ist $g(x) = e^{\beta x}$ bzw. ein Vielfaches davon.

(2a) Sei $f(x) = x$ im Intervall $(1, \infty)$. Es gilt

$$\frac{f'}{f'-f} = \frac{1}{1-x}$$

und daher $\phi(x) = -\ln|1-x| = -\ln(x-1) = \ln\frac{1}{x-1}$. Dies ergibt $g(x) = \frac{1}{x-1}$ bzw. ein Vielfaches davon.

(2b) Sei $f(x) = x$ im Intervall $(-\infty, 1)$. Es gilt

$$\frac{f'}{f'-f} = \frac{1}{1-x}$$

und daher $\phi(x) = -\ln|1-x| = -\ln(1-x) = \ln\frac{1}{1-x}$. Dies ergibt $g(x) = \frac{1}{1-x}$ bzw. ein Vielfaches davon. Dies ist dieselbe Lösung wie in Beispiel (2a), weil $\frac{1}{x-1}$ und $\frac{1}{1-x}$ durch Multiplikation mit -1 auseinander hervorgehen.

(3) Sei $f(x) = \frac{1}{x}$ im Intervall $(0, \infty)$, so ist

$$\frac{f'}{f'-f} = \frac{1}{1+x},$$

also $\phi(x) = \ln|1+x| = \ln(1+x)$. Dann ist $g(x) = 1+x$ bzw. ein Vielfaches davon. Führt man dieselbe Rechnung in den Intervallen $(-1, 0)$ und $(-\infty, -1)$ durch, erhält man dieselbe Lösung.

Man vergesse nicht, zu diesen Beispielen die Probe zu rechnen, nämlich die Gleichung $(f \cdot g)' = f' \cdot g'$ zu verifizieren.

Man kann ähnliche Überlegungen mit der Quotientenregel anstellen, wo f die gegebene und g die gesuchte Funktion ist. Der Fall

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'}{f'}$$

lässt sich auf den vorigen Fall zurückführen, wenn man $k = \frac{g}{f}$ setzt. Dann ist ja

$$f' \cdot k' = g' = (kf)'.$$

Bei gegebenem f kann man k berechnen und somit auch g.

(4) Sei $f(x) = x^2$. Dann ist

$$\frac{k'}{k} = \frac{2}{2-x}.$$

Dies ergibt $k(x) = \frac{1}{(2-x)^2}$ und $g(x) = \frac{x^2}{(2-x)^2}$.

Die Gleichung

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g'}$$

muss anders untersucht werden. Die Gleichung

$$\frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{f'}{g'}$$

führt auf die quadratische Gleichung

$$\left(\frac{g'}{g}\right)^2 \cdot f - \frac{g'}{g} \cdot f' + f' = 0.$$

Daraus kann man den Quotienten $\frac{g'}{g}$ berechnen (soweit die Diskrimante nicht negativ ist) und durch Integration theoretisch eine Funktion g berechnen. Man muss aber etwas geschickt vorgehen, um „schöne“Beispiele zu finden!

(5) Wir nehmen $f(x) = \frac{x}{1-x}$. Die quadratische Gleichung lautet dann

$$\left(\frac{g'(x)}{g(x)}\right)^2 \cdot \frac{x}{1-x} - \frac{g'(x)}{g(x)} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = 0.$$

So findet man zwei verschiedene Lösungen $g_1(x) = x$ und $g_2(x) = \frac{1}{1-x}$.

F. Schweiger