Österreichische Mathematische Gesellschaft

MATHE-BRIEF

Dezember 2020 — Nr. 104

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http://www.oemg.ac.at/Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

EXISTENZBEWEISE

Oft ist man in der Mathematik damit konfrontiert, die Existenz eines Objekts nachzuweisen, das gewisse Eigenschaften besitzt bzw. nicht besitzt. Etwa eine Quadrik, die für jeden ihrer Punkte eine ganze Gerade durch diesen Punkt enthält, eine reellwertige Funktion auf dem Intervall $[0,1]$, die genau an den irrationalen Zahlen dieses Intervalls stetig ist oder eine endliche Gruppe, deren Ordnung keine Primzahl ist und die keine echten Normalteiler besitzt. Interessante Beispiele findet man in jedem Teilgebiet der Mathematik in unterschiedlichster Form, dennoch ist das Vorgehen zum Beweis der Existenz der gesuchten Objekte, so sie existieren, fast immer dasselbe, nämlich konstruktiv: man findet bzw. konstruiert ein Objekt und weist anschließend nach, dass es die geforderten Eigenschaften besitzt. So auch in den drei konkret genannten Beispielen.

Viel seltener sind die Fälle, wo ein Existenzbeweis auf nicht konstruktive Art geführt wird, d.h. man zwar die Existenz nachweist, allerdings ohne ein konkretes Beispiel angeben zu müssen oder zu können. Dies soll anhand der folgenden zwei Fragestellungen illustriert werden.

1844 war Joseph Liouville der erste Mathematiker, der die Existenz von transzendenten Zahlen (das sind reelle Zahlen, die nicht algebraisch, also Nullstelle eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten sind) nachweisen konnte. Dazu zeigte er zunächst, dass es bei algebraischen Zahlen α vom Grad d (das ist der kleinste Grad eines solchen Polynoms) eine untere Schranke für die Güte der Approximation durch rationale Zahlen gibt, die vom Nenner der rationalen Zahl und von d abhängt, nämlich

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c(\alpha)}{q^d},$$

wobei $c(\alpha)$ eine nur von α abhängige Konstante bezeichnet. Dann wies er nach, dass für die reelle Zahl

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$$

für kein d eine solche Konstante c existiert, sodass die so definierte Zahl nicht algebraisch sein kann. Schlampig gesprochen könnte man also sagen, dieses α ist zu gut approximierbar, um algebraisch zu sein. Zahlen dieser Gestalt heissen seither Zahlen vom Liouvilletyp und bildeten hier die Grundlage für einen konstruktiven Beweis der Existenz von transzendenten Zahlen.

Etwa dreißig Jahre später revolutionierte Georg Cantor die Mengenlehre, indem er den Begriff der Mächtigkeit von Mengen einführte und damit in der Lage war, zwischen unendlichen Mengen eine Hierarchie herzustellen. Insbesondere nannte er unendliche Mengen, die bijektiv auf die natürlichen Zahlen abgebildet werden können, abzählbar und solche, für die keine derartige Bijektion existiert, überabzählbar. Während man leicht zeigen kann, dass die Gesamtheit aller algebraischen Zahlen abzählbar ist, war es eine Pionierleistung Cantors, mit Hilfe des von ihm ersonnenen Diagonalverfahrens nachzuweisen, dass die Menge der reellen Zahlen überabzählbar ist. Damit war gleichzeitig der Beweis für die Existenz transzendenter Zahlen erbracht, weil es schlichtweg nicht genug algebraische Zahlen gibt, als dass diese ganz $\mathbb{R}$ ausfüllen könnten.

Anstatt auf Cantors Diagonalverfahren hier näher einzugehen, sei wie angekündigt ein zweites Beispiel für einen nicht konstruktiven Existenzbeweis angeführt, diesmal aus dem Gebiet der Analysis. Auch in diesem Fall war der konstruktive Beweis schon vorher bekannt, es ergeben sich aber noch weitere Parallelen zum bereits kenenngelernten Vorgehen.

Die Frage nach der Existenz überall stetiger, nirgends differenzierbarer Funktionen wurde 1872 von Weierstraß mit Ja beantwortet, indem er nachwies, dass z.B. die Abbildung

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(3^n x)}{2^n}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, aber für kein $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Die Stetigkeit folgt dabei aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe, die Hauptarbeit steckte also im Nachweis der Nichtdifferenzierbarkeit.

Nun zum nicht konstruktiven Beweis. Wieder war ein revolutionärer Fortschritt in der Mathematik nötig, um auch hier eine Quantifikationsgröße für Mengen einzuführen, die feinere Unterteilungen als nur nach deren Mächtigkeit erlaubt. Das entscheidende Hilfsmittel entstammt diesmal der Topologie, wo man zwischen Mengen von erster und zweiter Kategorie unterscheidet. Eine Teilmenge eines topologischen Raums heißt nirgends dicht, wenn das Innere ihres Abschlusses leer ist. Abzählbare Vereinigungen von nirgends dichten Mengen heissen von erster Kategorie oder auch *mager*, und alle nicht mageren Mengen werden als Mengen zweiter Kategorie bezeichnet. Der Satz von Baire besagt, dass jeder vollständig metrische Raum (d.h. ein topologischer Raum, dessen Topologie durch eine Metrik induziert wird und der bez. dieser Metrik vollständig ist) von zweiter Kategorie in sich ist. Insbesondere kann ein solcher Raum niemals als abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen dargestellt werden.

Damit ist der Weg frei für eine nicht konstuktiven Antwort auf die Frage nach der Existenz stetiger, nirgends differenzierbarer Funktionen, wobei wir uns der Einfachheit halber auf die stetigen, reellwertigen Funktionen auf $[0,1]$, also den Raum $C([0,1])$, beschränken. Die durch

$$d(f,g) := \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$$

gegebene Metrik induziert die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf $C([0,1])$ und da der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen wieder stetig ist, folgt die Vollständigkeit.

Nunmehr bezeichnen wir mit $\mathcal{A}$ die Menge der an mindestens einem Punkt differenzierbaren Funtionen aus $C([0,1])$. Wenn wir nun noch $\mathcal{A}$ als abzählbare Vereinigung von in $C([0,1])$ abgeschlossenen Mengen $\mathcal{A}_n$, die leeres Inneres besitzen, darstellen können, so folgt aus dem Satz von Baire, dass $\mathcal{A}$ nicht ganz $C([0,1])$ ausfüllen kann, also mindestens eine nirgends differenzierbare Funktion in $C([0,1])$ liegen muss.

Dazu bemerken wir zunächst, dass für jedes $f \in C([0,1])$, das in a differenzierbar ist, der Ausdruck

$$\sup_{h\neq 0} \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right|$$

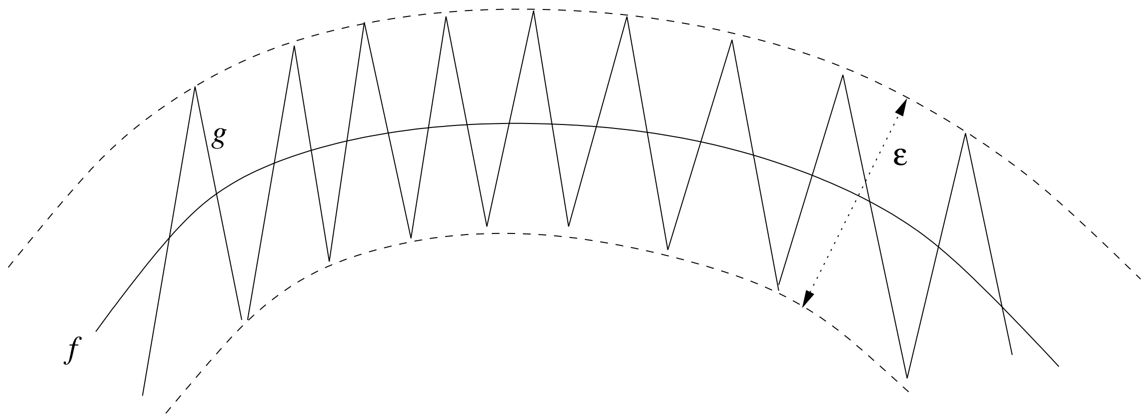
beschränkt ist, da der Quotient wegen der vorausgesetzten Differenzierbarkeit von f für $0 < |h| < h_0$ beschränkt bleibt und für $|h| \geq h_0$ trivial abgeschätzt werden kann. Dies motiviert die Definition

$$\mathcal{A}_n := \left\{ f \in C([0,1]) : \sup_{h \neq 0} \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right| \leq n \text{ für ein } a \in [0,1] \right\},$$

und es ist klarerweise

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n.$$

Man zeigt leicht, dass die $\mathcal{A}_n$ abgeschlossen sind. Die Tatsache, dass jedes $\mathcal{A}_n$ leeres Inneres hat, ist zwar plausibel, aber doch recht aufwendig zu zeigen. Es genügt nachzuweisen, dass es für jedes $f \in C([0,1])$, jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ eine stückweise lineare Funktion g mit $d(f,g) < \varepsilon$ und $|g'(x)| > n$ an allen $x \in [0,1]$ wo g differenzierbar ist, gibt. Nun können stetige Funktionen sehr wild aussehen, sodass dies keineswegs selbstverständlich ist. Da kommt einem aber der Approximationssatz von Weierstraß zu Hilfe, der besagt, dass jede stetige Funktion auf $[0,1]$ gleichmäßig durch Polynome approximiert werden kann, sodass es genügt, den Fall zu betrachten, wo f ein Polynom ist. Für Polynome kann man nämlich folgende, sehr anschauliche Konstruktion leicht zu einem Beweis ausbauen:



Damit ist der Nachweis der Existenz einer nirgends differenzierbaren Funktion aus $C([0,1])$ erbracht. Man kann dem Beweis sogar entlocken, dass die Menge dieser nirgends differenzierbaren Funktionen auch dicht in $C([0,1])$ liegt. In gewissem Sinn ist für stetige Funktionen die Eigenschaft, nirgends differenzierbar zu sein, vielmehr die Regel als die Ausnahme. Da aber die stetigen Funktionen, die wir uns vorstellen können, an den meisten Punkten auch differenzierbar sind, bestätigt sich hiermit eindrucksvoll die Unvollständigkeit unserer Anschauung und der daraus resultierende Bedarf an rigorosen Beweisführungen.

L. Summerer

Literatur:

P. BUNDSCHUH: *Einführung in die Zahlentheorie*, Springer 2008, pp 241-280.
J. C. OXTOBY: *Maß und Kategorie*, Springer Hochschultext 1971, pp 33-55.