



Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft  
<http://www.oemg.ac.at/Mathe-Brief> — [mathe-brief@oemg.ac.at](mailto:mathe-brief@oemg.ac.at)

## REGULARISIERENDE KONSTRUKTIONEN AN DREIECKEN, VIERECKEN UND SECHSECKEN

In der Folge sollen einige interessante Sachverhalte der ebenen Geometrie vorgestellt werden, die als regularisierende Konstruktionen an Dreiecken und (ebenen) Vierecken zu sehen sind. Sie können leicht als Experiment in der Klasse entweder klassisch mit Zeichengeräten oder mit einem dynamischen Zeichenprogramm durchgeführt werden. Nach einer gewissen Anzahl von Konstruktionschritten stellen sich dabei die Ecken von gleichseitigen Dreiecken bzw. Quadraten ein. Da am Ende regelmäßige Figuren erzeugt werden, werden die Vorgehensweisen als *regularisierend* bezeichnet. Freilich stellen sich die Fragen nach der Korrektheit dieser Aussagen und einem Beweis der Sachverhalte - eine einfache Variante aus der analytischen Geometrie wird hier jeweils vorgestellt. Die zugehörige allgemeine Theorie für  $n$ -Ecke kann bei P. Pech in [1] nachgelesen werden.

**Regularisierung von Dreiecken - der Satz von Napoleon.** Wir zeichnen auf dem Blatt ein beliebiges Dreieck, dessen Ecken wir der Reihe nach mit  $p_0, p_1, p_2$  bezeichnen - wir werden das Dreieck mit  $D := (p_0, p_1, p_2)$  identifizieren. Nun definieren wir zwei Konstruktionsvorschriften zur Ermittlung eines neuen Dreiecks:

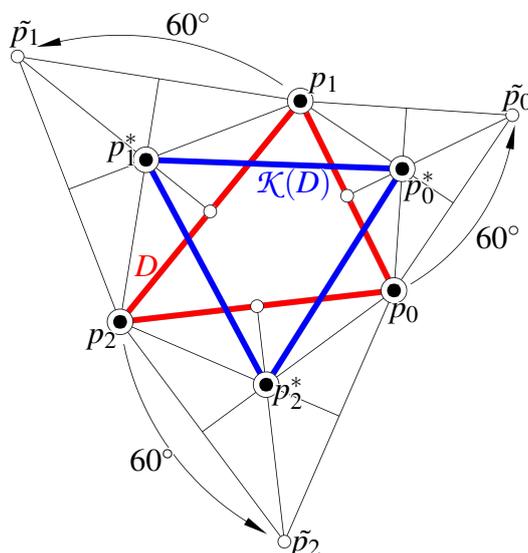


ABBILDUNG 1. Die Konstruktion  $\mathcal{K}$  für das Ausgangsdreieck  $D = (p_0, p_1, p_2)$  liefert das Bilddreieck  $\mathcal{K}(D) = (p_0^*, p_1^*, p_2^*)$ .

**Konstruktion  $\mathcal{K}$ :** Wir drehen den Punkt  $p_0$  des Ausgangsdreiecks um den Punkt  $p_1$  im mathematisch positiven Sinn um 60 Grad und erhalten den Punkt  $\tilde{p}_0$ . Der Mittelpunkt (gleichzeitig In-

und Umkreismitte etc.) des so entstandenen gleichseitigen 'Aufsatzdreiecks'  $p_0, p_1, \tilde{p}_0$  sei der neue Punkt  $p_0^*$ . Analog verfahren wir für die Punkte  $p_1$  und  $p_2$ , wobei wir entsprechend um die Zentren  $p_2$  bzw.  $p_0$  drehen. Die Mitten der so erzeugten gleichseitigen Aufsatzdreiecke  $p_1, p_2, \tilde{p}_1$  und  $p_2, p_0, \tilde{p}_2$  bezeichnen wir mit  $p_1^*$  bzw.  $p_2^*$ . Sie bilden gemeinsam mit dem Punkt  $p_0^*$  ein Dreieck  $\mathcal{K}(D) := (p_0^*, p_1^*, p_2^*)$ , das als *das nach Konstruktion  $\mathcal{K}$  aus dem Dreieck  $D$  konstruierte Dreieck* bezeichnet werde. Figur 1 zeigt diese Vorgangsweise für ein Beispiel.

*Konstruktion  $\mathcal{K}'$* : Werden bei obiger Konstruktion die Drehungen im mathematisch negativen Sinn durchgeführt, so bilden die Mitten der entsprechenden gleichseitigen 'Aufsatzdreiecke' das nach *Konstruktion  $\mathcal{K}'$*  aus dem Dreieck hervorgehende Bilddreieck  $\mathcal{K}'(D)$ .

Experimente mit verschiedenen Startdreiecken zeigen, dass die beiden neuen Dreiecke  $\mathcal{K}(D)$  und  $\mathcal{K}'(D)$  'sehr nach gleichseitigen Dreiecken' aussehen. Und das lässt sich tatsächlich beweisen! Das Ergebnis wird häufig als *Satz von Napoleon*<sup>1</sup> bezeichnet:

**Satz:** *Unabhängig vom gewählten Ausgangsdreieck  $D$  sind sowohl das Dreieck  $\mathcal{K}(D)$  als auch das Dreieck  $\mathcal{K}'(D)$  stets gleichseitige Dreiecke.* Die einzige Ausnahme stellt sich dann ein, wenn das Ausgangsdreieck  $D$  bereits gleichseitig war - dann fallen alle drei Ecken von  $\mathcal{K}(D)$  oder  $\mathcal{K}'(D)$  in den Mittelpunkt von  $D$ .

*Beweis:* Wir verwenden zur Beschreibung von Punkten in der euklidische Ebene ein kartesisches Koordinatensystem  $\{O, x, y\}$  - zusätzlich benützen wir komplexe Zahlen  $z = x + iy$  zur Festlegung dieser Punkte (wir identifizieren  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ ). Drehungen von Vektoren um  $60^\circ$  werden durch Multiplikation mit der komplexen Zahl  $\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$  dargestellt. So ermitteln wir aus dem Punkt  $p_j$  ( $j = 0, 1, 2$  - alle Indizes sind stets Modulo drei zu nehmen) durch Drehung um den Punkt  $p_{j+1}$  den Punkt

$$\tilde{p}_j = p_{j+1} + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(p_j - p_{j+1}) = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}p_j + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}p_{j+1}$$

sowie die Ecken des neuen Dreiecks  $\mathcal{K}(D)$  zu

$$p_j^* = \frac{1}{3}(p_j + p_{j+1} + \tilde{p}_j) = \frac{3+i\sqrt{3}}{6}p_j + \frac{3-i\sqrt{3}}{6}p_{j+1}.$$

Für die Verbindungsvektoren von  $p_j^*$  und  $p_{j+1}^*$  erhalten wir daraus

$$p_{j+1}^* - p_j^* = -\frac{3+i\sqrt{3}}{6}p_j + \frac{i\sqrt{3}}{3}p_{j+1} + \frac{3-i\sqrt{3}}{6}p_{j+2}.$$

Drehung um 60 Grad liefert

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(p_{j+1}^* - p_j^*) = -\frac{i\sqrt{3}}{3}p_j - \frac{3-i\sqrt{3}}{6}p_{j+1} + \frac{3+i\sqrt{3}}{6}p_{j+2} = p_{j+1}^* - p_{j+2}^*.$$

Aufeinanderfolgende Seiten dieses neuen Dreiecks gehen daher jeweils durch  $60^\circ$ -Drehungen ineinander über - das Dreieck  $\mathcal{K}(D)$  ist daher im Allgemeinen gleichseitig. Analoge Berechnungen können für die Konstruktionsvorschrift  $\mathcal{K}'$  durchgeführt werden - es ist nur konsequent  $i$  durch  $-i$  zu ersetzen. □

<sup>1</sup>Und dies, obwohl nicht klar ist ob dieses Resultat wirklich Napoleon Bonaparte zugeschrieben werden kann (siehe dazu auch F. Schmidt [2]).

**Regularisierung von Vierecken.** Wir zeichnen auf dem Blatt ein beliebiges Viereck, dessen Ecken der Reihe nach mit  $p_0, p_1, p_2, p_3$  bezeichnet werden - wir werden das Viereck mit  $V = (p_0, p_1, p_2, p_3)$  identifizieren. Wie vorhin werden wir auf die Seiten des Vierecks Quadrate aufsetzen und deren Mittelpunkte verwenden. Zu diesen Mittelpunkten gelangen wir auch durch  $90^\circ$ -Drehungen der Ecken  $p_j$  um die Seitenmitte von  $p_j p_{j+1}$  (siehe Figur 2). Wir definieren daher als erste Konstruktionsvorschrift zur Ermittlung eines neuen Vierecks:

*Konstruktion  $\mathcal{A}$ :* Wir drehen den Punkt  $p_0$  um den Mittelpunkt der Seite  $p_0 p_1$  (im mathematisch positiven Sinn) um  $90^\circ$ . Der so ermittelte Punkt sei  $p_0^*$ . Dann drehen wir  $p_1$  um den Mittelpunkt der Seite  $p_1 p_2$  um  $90^\circ$  und verfahren mit  $p_2$  (Drehung um Mitte von  $p_2 p_3$ ) sowie  $p_3$  (Drehung um Mitte von  $p_3 p_0$ ) in analoger Weise. Die entstehenden Punkte werden der Reihe nach mit  $p_1^*, p_2^*, p_3^*$  bezeichnet - sie bilden die Ecken eines neuen Vierecks. Dieses soll als *das nach Konstruktion  $\mathcal{A}$  aus dem Viereck  $V$  konstruierte Viereck  $\mathcal{A}(V) := (p_0^*, p_1^*, p_2^*, p_3^*)$*  bezeichnet werden.

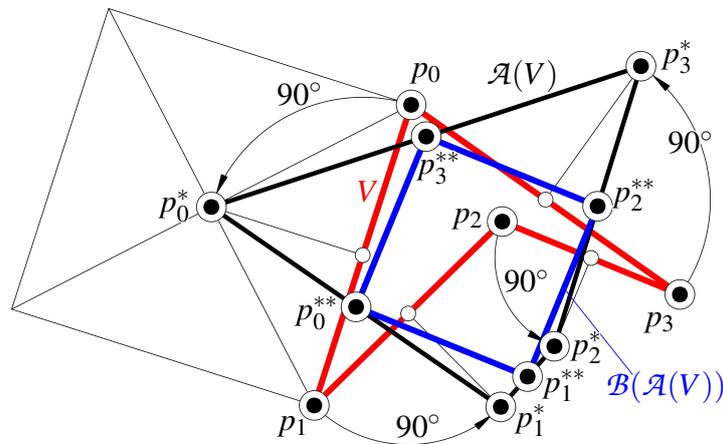


ABBILDUNG 2. Konstruktion  $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$  für Vierecke - aus dem Viereck  $V$  (rot) wird in einem ersten Schritt das Viereck  $\mathcal{A}(V)$  mit den Ecken  $p_0^*, \dots, p_3^*$  (schwarz). Seine Seitenmitten  $p_0^{**}, \dots, p_3^{**}$  bilden die Ecken des Quadrats  $\mathcal{B}(\mathcal{A}(V))$  (blau).

Zusatz: Werden die bei dieser Konstruktion verwendeten  $90^\circ$ -Grad-Drehungen alle im mathematisch negativen Sinne durchgeführt, so werden wir von *Konstruktion  $\mathcal{A}'$*  sprechen.

Die nach Konstruktionsvorschrift  $\mathcal{A}$  erzeugten Vierecke  $\mathcal{A}(V)$  werden im Allgemeinen keine Quadrate sein (siehe Figur 2) - wir haben daher noch nicht 'fertig regularisiert'. Dies erreichen wir durch Anwendung einer weiteren Konstruktion auf  $\mathcal{A}(V)$ :

*Konstruktion  $\mathcal{B}$ :* Diese Konstruktion transformiert das Ausgangsviereck  $V = (p_0, p_1, p_2, p_3)$  in das Viereck seiner Seitenmitten  $\mathcal{B}(V) := (p_0^*, p_1^*, p_2^*, p_3^*)$ . Dabei sei  $p_0^*$  der Mittelpunkt der Seite  $p_0 p_1$ ,  $p_1^*$  der von  $p_1 p_2$  usw.

Wird nun die Konstruktionsvorschrift  $\mathcal{B}$  auf das Viereck  $\mathcal{A}(V)$  angewandt, so entsteht ein neues Viereck  $\mathcal{B}(\mathcal{A}(V)) = (p_0^{**}, p_1^{**}, p_2^{**}, p_3^{**})$  (Viereck der Seitenmittelpunkte von  $\mathcal{A}(V)$ ), das in Figur 2 in blauer Farbe dargestellt ist. Es sieht aus wie ein Quadrat.

Überraschend gilt tatsächlich unabhängig vom gewählten Ausgangsviereck  $V = (p_0, p_1, p_2, p_3)$  der

**Satz:** Das Viereck  $\mathcal{B}(\mathcal{A}(V)) = (p_0^{**}, p_1^{**}, p_2^{**}, p_3^{**})$  ist bei allgemeinem Startviereck  $V$  ein Quadrat.

*Beweis:* Wir identifizieren wieder  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ . Drehungen um 90 Grad werden dann durch Multiplikation mit der imaginären Einheit  $i$  dargestellt. Aus den Ecken  $p_0, p_1, p_2, p_3$  des Ausgangsvierecks  $V$  (rot in Figur 2) werden durch die Konstruktion  $\mathcal{A}$  folgende vier neue Eckpunkte von  $\mathcal{A}(V)$ :

$$p_j^* = \frac{1}{2}[p_j + p_{j+1} + i(p_j - p_{j+1})] = \frac{1+i}{2}p_j + \frac{1-i}{2}p_{j+1},$$

wobei  $j = 0, \dots, 3$  und diesmal alle Indizes Modulo vier zu sehen sind. Daraus gewinnen wir nach Konstruktion  $\mathcal{B}$  die neuen Ecken

$$p_j^{**} = \frac{1+i}{4}p_j + \frac{1}{2}p_{j+1} + \frac{1-i}{4}p_{j+2}.$$

Das liefert für die Ecken des Vierecks  $\mathcal{B}(\mathcal{A}(V))$  (blau in Figur 2)

$$p_{j+1}^{**} - p_j^{**} = \frac{1+i}{4}(p_{j+2} - p_j) + \frac{1-i}{4}(p_{j+3} - p_{j+1}),$$

woraus unschwer

$$p_{j+2}^{**} - p_{j+1}^{**} = i(p_{j+1}^{**} - p_j^{**})$$

für alle  $j = 0, \dots, 3$  nachgewiesen werden kann. Die Seiten des Vierecks  $\mathcal{B}(\mathcal{A}(V))$  gehen jeweils durch Drehung um 90 Grad in die nächste Seite über -  $\mathcal{B}(\mathcal{A}(V))$  muss i.A. ein Quadrat sein.  $\square$

*Bemerkungen:*

- Wenn wir statt der Konstruktionsvorschrift  $\mathcal{A}$  Drehungen um  $-90$  Grad vornehmen, haben wir in den obigen Gleichungen nur konsequent  $i$  durch  $-i$  zu ersetzen. Damit ist auch hier das Viereck  $\mathcal{B}(\mathcal{A}'(V))$  im Allgemeinen ein Quadrat.
- Interessant ist auch, dass das Vertauschen der Konstruktionen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  ebenfalls zu den Ecken  $p_j^{**}$  von oben führt und daher sogar

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$$

gilt. Genauso gilt

$$\mathcal{A}' \circ \mathcal{B} = \mathcal{B} \circ \mathcal{A}'.$$

- Diese Regularisierung bleibt sogar dann gültig, wenn zwei aufeinanderfolgende Ecken des Ausgangsvierecks  $V$  zusammenfallen.

**Regularisierung von Sechsecken.** Solche regularisierenden Konstruktionen existieren für allgemeine  $n$ -Ecke (siehe [1]). Eine besonders schöne für allgemeine Sechsecke sei hier ohne Beweis noch vorgestellt: Hier führen die folgenden drei Konstruktionsschritte schließlich zu einem regulären Sechseck: Konstruktionsschritt  $\mathcal{A}$  liefert zu einem allgemeinen Sechseck  $S = (p_0, \dots, p_5)$  das Sechseck  $\mathcal{A}(S)(\tilde{p}_0, \dots, \tilde{p}_5)$  seiner Kantenmittelpunkte (siehe Figur 3).

In Konstruktionsschritt  $\mathcal{B}$  werden der Reihe nach die Schwerpunkte je dreier aufeinanderfolgender Ecken eines Sechsecks als Ecken eines neuen Sechsecks konstruiert (in der Figur das blaue Sechseck  $\mathcal{B}(\mathcal{A}(S)) = (p_0^*, \dots, p_5^*)$ ).

In Konstruktionsschritt  $\mathcal{C}$  (bzw.  $\mathcal{C}'$ ) Werden auf die Seiten eines Sechsecks konsequent 'nach außen' (oder konsequent nach innen) gleichseitige Dreiecke aufgesetzt. Ihre neuen Spitzen bilden der Reihe nach die Ecken des vermöge  $\mathcal{C}$  konstruierten Bildsechsecks. Figur 3 zeigt dieses Vorgehen: Das Sechseck  $\mathcal{C}(\mathcal{B}(\mathcal{A}(S))) = (p_0^{**}, \dots, p_5^{**})$  wird bei allgemeinem Startsechseck  $S$  ein reguläres Sechseck sein.

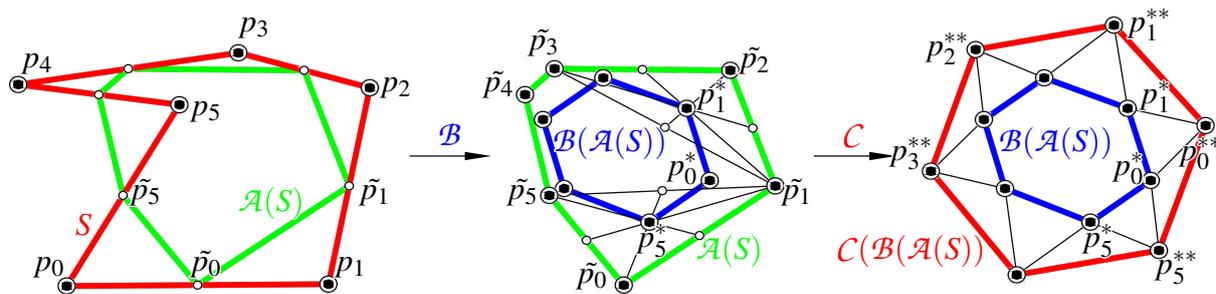


ABBILDUNG 3. Regularisierung eines Sechsecks in drei Schritten

**Bemerkung zu den Konstruktionsverfahren.** Die allgemeinen regularisierenden Verfahren für ebene  $n$ -Ecke beruhen im Wesentlichen auf folgendem Sachverhalt (Näheres findet sich zum Beispiel in [1]): Jedes ebene  $n$ -Eck kann als Vektor im  $n$ -dimensionalen Vektorraum  $\mathbb{C}^n$  aufgefaßt werden. Die oben angeführten Konstruktionsschritte induzieren im  $\mathbb{C}^n$  lineare Abbildungen, deren Eigenvektoren genau zu den regulären Vielecken passen. Dabei sind als 'regulär' auch regelmässige  $n$ -eckige Sterne und spezielle degenerierte  $n$ -Ecke anzusehen. Jeder der (für  $n$ -Ecke natürlich stets 'passend' zu ermittelnden) Konstruktionsschritte liefert den Wert 0 als Eigenwert eines dieser Eigenvektoren. Nach  $n - 2$  Schritten bleibt dann nur mehr ein unwesentlicher und der zum gewünschten regulären  $n$ -Eck gehörige übrig, der durchaus auch ein Stern sein kann. Damit kann die Regularisierung auf jeden Fall nach geeigneten  $n - 2$  Schritten erfolgreich abgeschlossen werden. Dass das durch geeignetes Kombinieren von Konstruktionen in einem Konstruktionsschritt auch nach weniger Schritten möglich ist, zeigt die oben vorgestellte Regularisierung für Sechsecke: Hier werden in Konstruktionsschritt  $\mathcal{B}$  sogar zwei dieser Eigenwerte gleichzeitig zu 0, sodass die Regularisierung bereits in drei Schritten gelingt.

Otto Röschel

#### LITERATUR

- [1] Pavel Pech: The Harmonic Analysis of Polygons and Napoleon's Theorem. *Journal for Geometry and Graphics* 5/1 (2001), 13-22. 1, 4, 5
- [2] Fritz Schmidt: 200 Jahre französische Revolution - Problem und Satz von Napoleon mit Variationen. *Didaktik der Mathematik* 18 (1990), 15 -29. 2