Österreichische Mathematische Gesellschaft

MATHE-BRIEF

Oktober 2020 — Nr. 102

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http://www.oemg.ac.at/Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

WEGE ZU EINER GESCHLOSSENEN FORMEL FÜR QUADRATSUMMEN

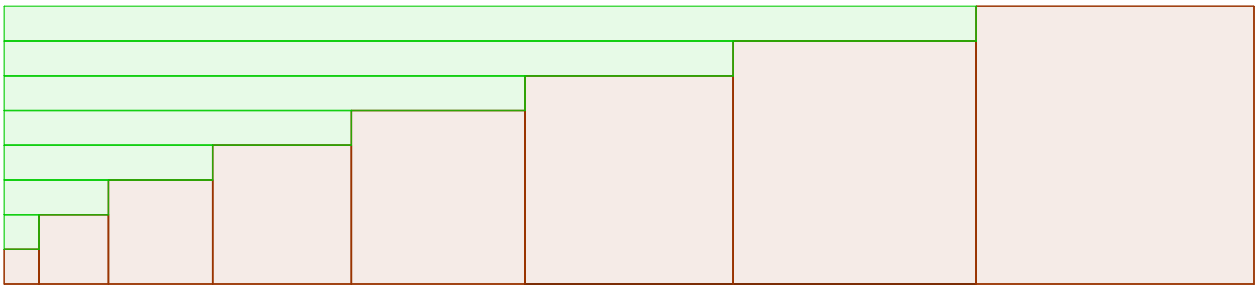
Einleitung. In diesem Artikel soll anhand von unterschiedlichen Entwicklungen geschlossener Formeln für die via

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} k^2$$

definierte Quadratsumme die Vielseitigkeit mathematischer Argumentation und Kreativität aufgezeigt werden. Dabei entstand diese kleine Arbeit aus der folgenden Situation:

Der erste der beiden Autoren besucht das schulübergreifende Mathematik-Wahlpflichtfach beim zweiten Autor, wo die erste Herleitung einer geschlossenen Formel für s_n zusammen mit der ganzen Wahlpflichtfachgruppe erfolgte, woraufhin der Erstautor die Idee zur zweiten Herleitung in völliger Eigenständigkeit entwickelt hat.

Eine erste Herleitung. Ausgehend von der Abbildung,



welche s_n für $n = 8$ grafisch illustriert, ergibt sich durch zwei Möglichkeiten der Berechnung des Flächeninhalts des Gesamtrechtecks der Ansatz

$$s_n + 1 + (1+2) + (1+2+3) + \ldots + (1+2+3+\ldots+n-1) = (1+2+3+\cdots+n)\cdot n$$

bzw. unter Berücksichtigung der Summenformel von Gauss:

(1) $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$ und

(2) $$s_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}$$

resp. durch weiteres Umformen,

$$(2) \iff 2s_n + \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k = n^2(n+1) \iff 3s_n - \frac{n(n+1)}{2} = n^2(n+1)$$
$$\iff 6s_n = n(n+1) + 2n^2(n+1) \iff 6s_n = n(n+1)(1+2n)$$

schließlich mit

$$s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{3}$$

die gewünschte geschlossene Formel für s_n.

Eine zweite Herleitung. Ausgehend von s_n lässt sich s_{2n} wie folgt auf zwei Arten aufteilen, wobei wiederum von (1) Gebrauch gemacht wird:

Aufteilung in gerade und ungerade Summanden:

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 + \sum_{k=1}^{n} (2k)^2 \implies s_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \left(4k^2 - 4k + 1\right) + \sum_{k=1}^{n} 4k^2$$

bzw.

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \left(8k^2 - 4k + 1\right) \implies s_{2n} = 8s_n - 4 \cdot \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1,$$

ergo

$$s_{2n} = 8s_n - 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n \implies s_{2n} = 8s_n - 2n^2 - 2n + n$$

und damit schließlich

$$s_{2n} = 8s_n - 2n^2 - n. \tag{4}$$

Aufteilung in die ersten n und die letzten n Summanden:

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} (k+n)^2 \implies s_{2n} = s_n + \sum_{k=1}^{n} \left(k^2 + 2kn + n^2\right)$$

bzw.

$$s_{2n} = s_n + \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} 2nk + \sum_{k=1}^{n} n^2 \implies s_{2n} = 2s_n + 2n \cdot \sum_{k=1}^{n} k + n^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} 1,$$

ergo

$$s_{2n} = 2s_n + 2n \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n^2 \cdot n \implies s_{2n} = 2s_n + n^3 + n^2 + n^3$$

und damit schließlich

$$s_{2n} = 2s_n + 2n^3 + n^2. \tag{5}$$

In weiterer Folge ergibt sich durch Vergleich von (4) und (5) zunächst die Identität

$$8s_n - 2n^2 - n = 2s_n + 2n^3 + n^2 \tag{6}$$

bzw. durch Vereinfachung

$$(6) \iff 6s_n = 2n^3 + 3n^2 + n \implies s_n = \frac{n\left(2n^2 + 3n + 1\right)}{6}$$

$$\text{resp. } s_n = \frac{n\left(2n^2+2n+n+1\right)}{6} \iff s_n = \frac{n\left[2n(n+1)+n+1\right]}{6}$$

schließlich

$$s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

ergo wiederum (3).

Abschließende Bemerkungen. Eine Auswahl weiterer schöner Herleitungen von (3) findet man beispielsweise in [RESEL 2017a, S. 7ff], insbesondere S. 7f wiederum unter Verwendung von s_{2n}, in [RESEL 2017b, S. 152ff], insbesondere S. 156 wiederum unter Verwendung von s_{2n}, sowie in [RESEL 2020, S. 89f, 91ff], wobei der Autor der drei genannten Werke (der zweite Autor dieses Artikels) erst durch einen Anstoß in [LIETZMANN 1943, S. 238f] zur Verwendung von s_{2n} geführt wurde, wozu es beim ersten Autor nicht bedurfte.

Wien, im Januar 2020. Benedikt Fegerl und Robert Resel

Anschrift der Verfasser: Benedikt Fegerl. Schüler der 8A im Schuljahr 2019/20 im Bundesgymasium und Bundesrealgymnasium Zirkusgasse 48, 1020 Wien. *Dr. Robert Resel.* AHS Heustadelgasse 4, 1220 Wien.

LITERATUR

LIETZMANN, Walther (1943): *Lebendige Mathematik*. Hirt, Breslau.
RESEL, Robert (2017a): *20000 Kurven unter der Enveloppe*. Logos, Berlin.
RESEL, Robert (2017b): *Von der Addition bis zur z-Koordinate*. Logos, Berlin.
RESEL, Robert (2020): *Mathematik(er) von A bis Z*. Logos, Berlin.