MATHE-BRIEF

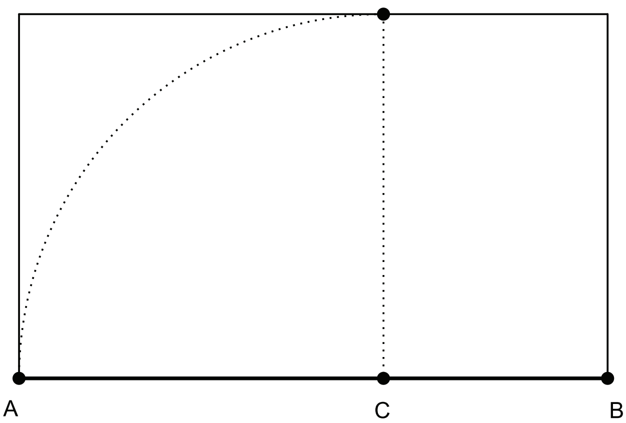
Jänner 2011 — Nr. 10

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Liebe Kolleginnen und Kollegen,

der heutige Vorschlag einer Themenstellung für eine vorwissenschaftliche Matura-Arbeit (auch wenn eine solche erst in einiger Zeit aktuell wird) betrifft den *Goldenen Schnitt*, der sowohl in der Natur als auch seit alten Zeiten als ästhetisches Prinzip in der Kunst und der Architektur eine bedeutsame Rolle spielt: eine Strecke AB wird von einem Punkt C nach dem Goldenen Schnitt geteilt, wenn die kürzere Strecke CB sich zur längeren Strecke AC so verhält wie diese Strecke AC zur ganzen Strecke AB, also zur Summe von AC und CB.

Figur 1

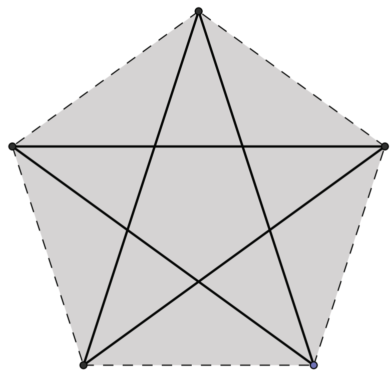


Im Rechteck der Figur 1 verhält sich die Breite zur Länge nach dem Goldenen Schnitt; es ähnelt unserem DIN-Format, das aber durch die Forderung bestimmt ist, dass das in der Hälfte gefaltete Rechteck wieder das gleiche Seitenverhältnis aufweist. In dem nach dem Goldenen Schnitt konstruierten Rechteck hat das Rechteck, das nach Abtrennen eines Quadrates mit der Breite als Seitenlänge übrig bleibt, wieder das Seitenverhältnis des ursprünglichen Rechtecks.

Beispielsweise teilt die Säulenhöhe des griechischen Parthenon die gesamte Gebäudehöhe nach dem Goldenen Schnitt. Leonardo da Vinci, Dürer und Raffael haben die Proportionierung von Gemälden nach dem Goldenen Schnitt vorgenommen, Le Corbusier hat den Goldenen Schnitt mit dem Bau des menschlichen Körpers verglichen und der Konstruktion von Wohnbauten zugrunde gelegt.

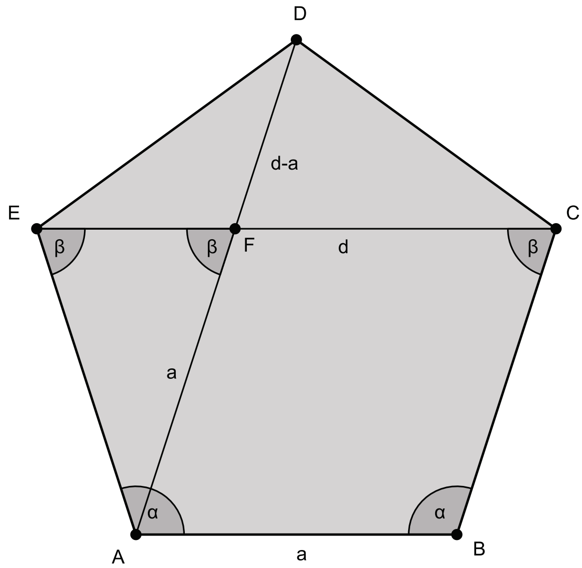
Angewendet haben den Goldenen Schnitt schon viel früher die Seesterne mit ihren fünf Armen, mathematisch modelliert durch das Pentagramm der fünf Diagonalen eines regelmäßigen Fünfecks. Das ist auch der Hintergrund des vorgeschlagenen Themas: *Das Pentagramm und der Goldene Schnitt.*

DAS PENTAGRAMM UND DER GOLDENE SCHNITT



Figur 2

Aufgabenstellung. Erläutere die Definition und den Zusammenhang dieser zwei Objekte.



Figur 3

Mögliche Bearbeitungsschritte. Diese beziehen sich auf Figur 3.

(1) *Jede Seite eines regelmäßigen Fünfecks ist parallel zur gegenüberliegenden Diagonale* (in Figur 3 ist AB parallel zu CE; wenn a die Länge der Fünfeckseite und α der Innenwinkel in jedem Eckpunkt ist, so ist der Abstand von C und E zur Geraden durch A und B jeweils $a \sin \alpha$).

(2) *Das Dreieck AEF ist gleichschenkelig* (die Diagonale AD und die Seite BC sind parallel und schließen mit der Diagonale CE den gleichen Winkel β ein).

(3) *Die Dreiecke ADE und DEF sind ähnlich* (beide Dreiecke sind gleichschenkelig und haben den gleichen Basiswinkel).

(4) Für die Längenverhältnisse gilt $AD/AF = AF/FD$, also das Längenverhältnis des Goldenen Schnittes (der Ähnlichkeitsfaktor der beiden Dreiecke ist $\varphi = d/a = AD/AF$).

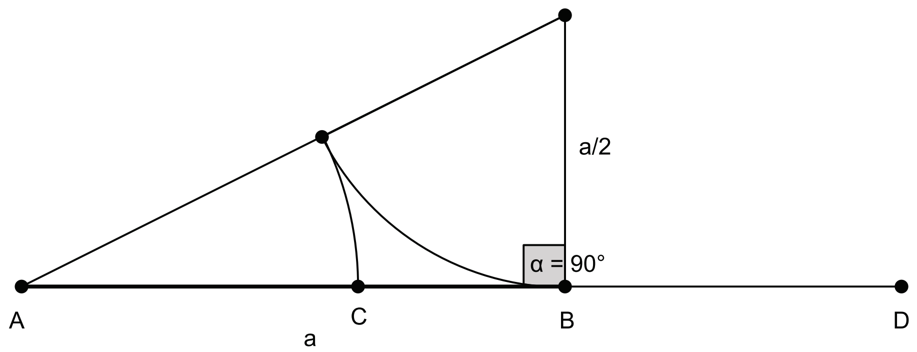
(5) *Der Ähnlichkeitsfaktor φ erfüllt die Gleichung*

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi},$$

(denn $\frac{d}{a} = 1 + \frac{d-a}{a} = 1 + \frac{a}{d}$).

(6) Es gilt $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (d.h. φ ist die positive Lösung der quadratischen Gleichung $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$).
(7) Der Punkt C, der die Strecke $a = AB$ nach dem Goldenen Schnitt teilt, kann nach Figur 4 konstruiert werden:

Figur 4



(8) Diese Konstruktion erlaubt die Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks mit gegebener Diagonalenlänge a, und die Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks mit gegebener Seitenlänge a (für die zweite Aufgabe: die Seite AB verlängert um die Strecke AC liefert mit AD die Länge der Diagonale).
(9) *Das Problem des pythagoräischen Philosophen Hippasos von Metapont* (ca 450 v.Chr.): φ ist keine rationale Zahl! (Wenn φ als Bruch zweier teilerfremden ganzen Zahlen $\frac{a}{b}$ darstellbar wäre, dann müssten diese die Gleichung

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a^2 - b^2}{ab} = 1$$

erfüllen; aber jeder Primteiler des Nenners ist entweder nicht Primteiler von b^2 oder nicht Primteiler von a^2.)

Mögliche Erweiterungen.

* Ausfüllen des Rechtecks in Figur 1 durch eine Folge von jeweils im Verhältnis $1/\varphi$ verkleinerten Quadraten.
* Konstruktion einer Keplerschen ‚Goldenen Spirale' durch fortgesetzte Übertragung von Figur 1 auf das nach Abtrennung des Quadrates verbleibende Rest-Quadrat.

Mögliche Literatur.

* BEUTELSBACHER, A., PETRI, B. *Der Goldene Schnitt.* BI-Wissenschaftsverlag, Wien 1988.
* HAGENMAIER, O. *Der Goldene Schnitt.* Impuls-Verlag, Buchschlag 1958.
* WALSER, H. *Der Goldene Schnitt.* B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1993.
* WIKIPEDIA, *Goldener Schnitt.*
* LEXIKON DER MATHEMATIK, *Goldener Schnitt*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 2001.

(von den ersten drei Büchern gibt es auch spätere Auflagen)

Allen Kolleginnen und Kollegen wünschen wir ein erfolgreiches Jahr 2011!
Das Redaktionsteam