MATHE-BRIEF

November 2010 — Nr. 8

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Von Pythagoras zu Ptolemäus.

Ziel dieses kurzen Ausfluges durch die Geometrie ist ein bemerkenswerter kreisgeometrischer Satz des ägyptischen Naturforschers Claudius Ptolemäus (85–165), der sich besonders mit der Bewegung der Planeten und des Mondes beschäftigte. Das „ptolemäische Weltsystem“ sieht die Erde im Mittelpunkt des Planetensystems. Es wurde vom „kopernikanischen Weltsystem“ des deutschen Mathematikers und Astronomen Nikolaus Kopernikus (Niklas Koppernigk jun., 1473–1543) abgelöst, in dem die Sonne im Mittelpunkt des Planetensystems steht. Als Raststätten für diesen Ausflug dienen vier bekannte geometrische Sätze.

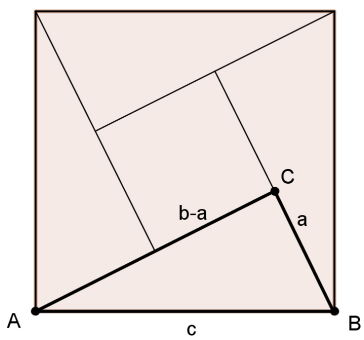
Der Satz von Pythagoras. (ca. 580–500 v.Chr.) Die Aussage dieses Satzes gehört heute fast zur Allgemeinbildung:

In einem rechtwinkeligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der Katheten:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Unter den vielen Beweisen des Satzes von Pythagoras ist der folgende besonders augenfällig: Vier kongruente rechtwinkelige Dreiecke sind einem Quadrat mit der Seitenlänge c eingeschrieben und lassen in seinem Inneren ein Quadrat mit der Seitenlänge $b-a$ frei. Damit ergibt sich:

$$c^2 = (b-a)^2 + 2ab = a^2 + b^2.$$



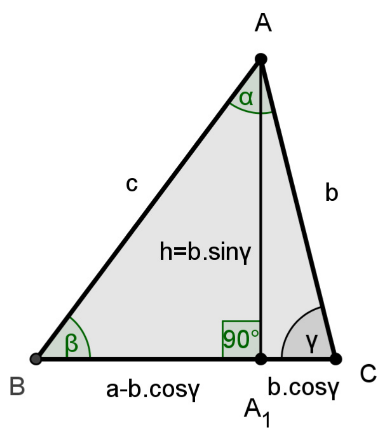
Der Cosinus-Satz. Dieser sieht auf den ersten Blick wie ein großer Bruder des Satzes von Pythagoras aus, der als Spezialfall des Cosinus-Satzes angesehen werden kann:

In einem Dreieck, in dem die Seiten a und b den Winkel γ *einschließen, gilt für die dritte Seite c*:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Dabei kann er leicht aus dem Satz von Pythagoras abgeleitet werden. Bezeichnen wir mit A_1 den Fußpunkt der Höhe, die wir aus dem Punkt A auf die gegenüberliegende Seite a fällen. Diese Höhe AA_1 hat die Länge $b\sin\gamma$, die Strecke CA_1 hat die Länge $b\cos\gamma$. Nach dem Satz von Pythagoras gilt für das rechtwinkelige Dreieck AA_1B

$$\begin{aligned} c^2 &= (a-b\cos\gamma)^2 + (b\sin\gamma)^2 \\ &= a^2 + b^2\cos^2\gamma - 2ab\cos\gamma + b^2\sin^2\gamma, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$



Aus dem gleichen Bild kann man auch den Partner des Cosinus-Satzes ableiten:

Der Sinus-Satz. *In einem Dreieck, in dem die Winkel* α, β *und* γ *den Seiten* a, b *und* c *gegenüberliegen, gilt* $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.

Wenn h die Höhe aus dem Punkt A auf die Dreiecksseite a ist, gilt nämlich

$$h = b\sin\gamma = c\sin\beta \implies \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

und in analoger Weise erhalten wir

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Ähnliche Dreiecke. Zwei Dreiecke heißen *ähnlich*, wenn ihre Winkel gleich sind. Sinus-Satz und Cosinus-Satz zusammen helfen uns, diese Eigenschaft zweier Dreiecke auch anders zu beschreiben:

Wenn zwei Dreiecke mit den Seiten a, b, c *und* a', b', c' *ähnlich sind, dann gilt*

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}. \tag{*}$$

Umgekehrt folgt aus (*)*, dass die beiden Dreiecke mit diesen Seiten ähnlich sind.*

Aus $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ folgt nämlich nach dem Sinus-Satz

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a'}{b'}, \quad \text{d.h.} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

und in gleicher Weise $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

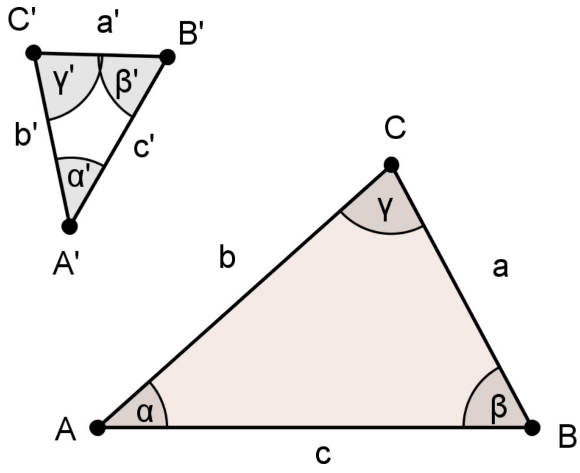
Umgekehrt seien α, β und γ bzw. α', β' und γ' beziehungsweise die Winkel der beiden Dreiecke. Wenn der *Ähnlichkeitsfaktor* q der gemeinsame Wert der Brüche in (*) ist, folgt nach dem Cosinus-Satz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

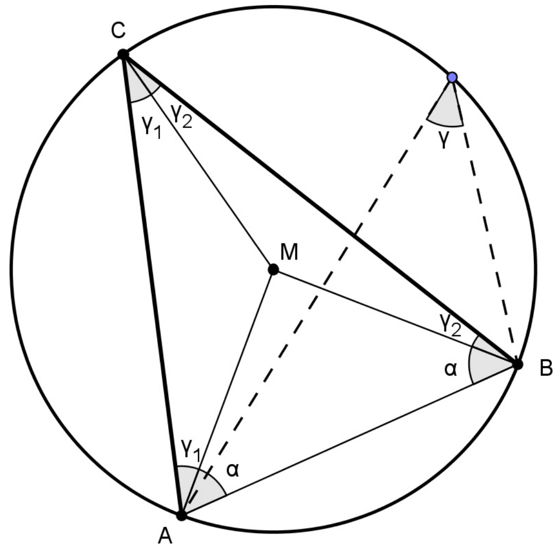
also

$$\begin{aligned}\cos\gamma &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\\ &= \frac{(a'q)^2+(b'q)^2-(c'q)^2}{2(a'q)(b'q)}\\ &= \frac{a'^2+b'^2-c'^2}{2a'b'}\\ &= \cos\gamma'\end{aligned}$$

und schließlich $\gamma = \gamma'$. In gleicher Weise folgt $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$.



Der Peripheriewinkel-Satz. Schreiben wir das Dreieck ABC einem Kreis mit dem Mittelpunkt M ein. Dann gilt: *Wenn die Kreis-Sehne AB festgehalten wird, bleibt der gegenüberliegende Dreieckswinkel γ konstant, wenn sich der Dreieckspunkt C auf dem Kreisumfang bewegt.*



Um das einzusehen, verbinden wir den Kreismittelpunkt M mit den drei Punkten A, B und C. Das Dreieck ABC wird dadurch in drei gleichschenkelige Dreiecke AMC, BMC und AMB zerlegt. Die Basiswinkel der ersten beiden Dreiecke bezeichnen wir mit γ_1 bzw. γ_2. Der Basiswinkel des Dreiecks AMB, der bei der Bewegung des Punktes C auf dem Kreisumfang fest bleibt, soll mit α bezeichnet werden. Dann gilt:

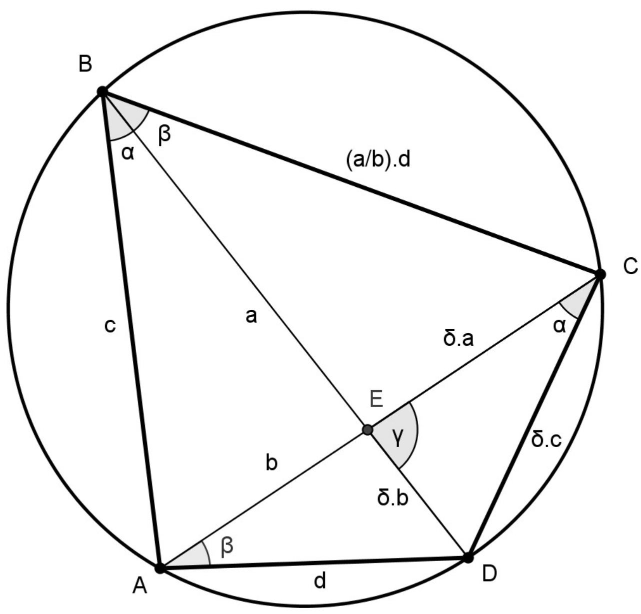
$$2\alpha + 2\gamma_1 + 2\gamma_2 = \pi$$
$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Also bleibt auch γ bei der Bewegung von C auf dem Kreisumfang konstant. Gleichzeitig erhalten wir die Information, daß der Peripheriewinkel γ halb so groß ist wie der zugehörige Zentriwinkel $\sphericalangle AMB = \pi - 2\alpha$.

Der Peripheriewinkelsatz verallgemeinert den Satz von Thales von Milet (625–547 v.Chr.), nach dem der Peripheriewinkel im Halbkreis immer ein rechter ist. Der Cosinus-Satz und der Peripheriewinkel-Satz helfen zusammen, um einen auf den ersten Blick verblüffenden Satz der Kreis-Geometrie zu beweisen.

Der Satz von Ptolemäus. (85–165)

Wenn ein Viereck einem Kreis eingeschrieben ist, dann ist die Summe der Produkte gegenüberliegender Seiten gleich dem Produkt der Diagonalen.



Das Viereck $ABCD$ sei einem Kreis eingeschrieben. Den Schnittpunkt der Diagonalen bezeichnen wir mit E. Außerdem verwenden wir die folgenden Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} a &= BE \\ b &= AE \\ c &= AB \\ d &= AD \\ \gamma &= \sphericalangle AEB = \sphericalangle CED \end{aligned}$$

Nach dem Satz über den Peripheriewinkel ist $\alpha = \sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$. Weil die Dreiecke AEB und DEC auch noch den Winkel γ in E gemeinsam haben, sind sie ähnlich. Für einen bestimmten Ähnlichkeitsfaktor $\delta > 0$ gilt also

$$CE = \delta \cdot a, \quad DE = \delta \cdot b, \quad CD = \delta \cdot c.$$

Außerdem ist nach dem Satz über den Peripheriewinkel $\beta = \sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC$, und auch die Dreiecke AED und BEC sind ähnlich, diesmal mit dem Ähnlichkeitsfaktor $\frac{a}{b}$. Damit erhalten wir noch

$$BC = \frac{a}{b} \cdot d$$

und nach dem Cosinus-Satz

$$\begin{aligned}
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \\
d^2 &= b^2(1+\delta^2) - 2\delta \cdot b^2 \cos(\pi - \gamma) \\
&= b^2(1+\delta^2) + 2\delta \cdot b^2 \cos\gamma \\
AB \cdot CD &= \delta \cdot c^2 \\
&= \delta \cdot (a^2 + b^2) - 2\delta \cdot ab\cos\gamma \\
AD \cdot BC &= \frac{a}{b} \cdot d^2 \\
&= ab(1+\delta^2) + 2\delta \cdot ab\cos\gamma \\
AB \cdot CD + AD \cdot BC &= \delta \cdot (a^2 + b^2) + ab(1+\delta^2) \\
&= (b + \delta \cdot a)(a + \delta \cdot b) \\
&= AC \cdot BD
\end{aligned}$$

Das ist die Aussage des Satzes von Ptolemäus. Dieser hat als Nachtisch noch eine kleine Überraschung für uns bereit: Wenn wir ihn auf ein Rechteck anwenden, das ja jedenfalls einem Kreis eingeschrieben ist, dann liefert er uns wieder den Satz von Pythagoras. Unser Geometrie-Ausflug hätte also auch heißen können: Von Pythagoras zu Ptolemäus und zurück.