MATHE-BRIEF

Mai 2010 — Nr. 3

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Damals entstand die Wahrscheinlichkeitstheorie.

Was, würden Sie vermuten, kommt öfter vor: mindestens eine ‚Sechs', wenn man mit einem Würfel viermal wirft, oder mindestens eine ‚Doppelsechs', wenn man mit zwei Würfeln vierundzwanzigmal wirft? Eine absurde Frage, meinen Sie?

In der Mitte des siebzehnten Jahrhunderts hatte sich ein gebildeter französischer Adeliger und passionierter Spieler, der Chevalier de Méré, tatsächlich eine begründete Meinung darüber gebildet — offenbar hatte er Zeit, Lust und möglicherweise auch Geld genug, um genügend viele Ergebnisse bei Spielen mit Freunden zu sammeln und für sich gewinnbringend auszuwerten. Nach seiner Erfahrung kam das erste Ereignis — beim Würfeln mit einem Würfel — deutlich öfter vor, als das zweite. Das veranlasste ihn auch zu einem abschätzigen Urteil über die Mathematik, die ja der Meinung sei, der Anteil des ersten Ereignisses in einer großen Anzahl von Wiederholungen des Experimentes wäre vier Sechstel, und das wäre doch das Gleiche wie der Anteil des zweiten Ereignisses in einer großen Anzahl von Wiederholungen des entsprechenden Experimentes mit zwei Würfeln, nämlich vierundzwanzig Sechsunddreißigstel, also $4/6 = 24/36$!

Diese Überlegungen brachte er einem gewissen Blaise Pascal (1623–1662) zur Kenntnis, offenbar in neugieriger Erwartung, was dieser wohl dazu zu sagen hätte. Blaise Pascal war ein inzwischen durch Arbeiten über Kegelschnitte, physikalische Erscheinungen und die Konstruktion einer Rechenmaschine bekannt gewordenes Mitglied der Académie de Mersenne, einer Vorgängerin der französischen Académie des Sciences. Chevalier de Méré hatte an Pascal noch eine weitere Frage als Pfeil im Köcher, die auf folgendes Problem hinauslief: Gesetzt den Fall, zwei gleich starke Spieler, Adolphe und Bertrand (also mit gleich großen Chancen, jedes Einzel-Spiel zu gewinnen), setzten je 24 Dukaten ein und vereinbarten, die Summe erhielte jener Spieler, der zuerst vier Spiele gewönne. Von den ersten drei Spielen gewinnt Adolphe zwei und Bertrand eines. Danach tritt irgendein Ereignis ein, das einen vorzeitigen Abbruch der Spiele erzwingt, und die Einsatzsumme soll jetzt ehrlich verteilt werden. Was für eine Aufteilung ist dann ehrlich?

Über Fragen dieser Art hatten sich schon früher Mathematiker Gedanken gemacht. Der Vorschlag von Luca Pacioli (1445–1514?), Minorit und Professor für Mathematik in Perugia, Neapel, Mailand, Florenz, Venedig und Rom, wäre gewesen, nach der Anzahl der bereits gewonnen Spiele aufzuteilen; demnach bekäme Adolphe zwei Drittel, also 32, und Bertrand ein Drittel der eingesetzten 48 Dukaten, also 16. Diese Überlegung schien zwei anderen italienischen Mathematikern, Geronimo Cardano (1501–1576) und Niccolò Tartaglia (1499?–1557), Prioritätskonkurrenten für die Lösung einer algebraischen Gleichung dritten Grades, unpassend: wenn Bertrand bei Abbruch noch kein Spiel gewonnen hätte, bekäme er gar nichts, und das wäre doch unsinnig. Nach der Meinung Cardanos käme es darauf an, wieviel Spiele jeder von beiden noch bis zur Entscheidung zu spielen hätte, was bei Adolphe 1 oder 2, bei Bertrand aber 1 oder 2 oder 3 wäre (auch eine anfechtbare Überlegung), also hätte Adolphe Recht auf $(1+2+3)/9 = 2/3$, Bertrand aber Recht auf $(1+2)/9 = 1/3$ von 48 Dukaten, also 32 bzw. 16 Dukaten; das kommt im gegenständlichen Fall allerdings auf die gleiche Verteilung wie nach dem System von Pacioli hinaus, wenn Bertrand aber beispielsweise noch kein Spiel gewonnen hätte, würde er doch noch einige Dukaten erhalten. Nach Auffassung von Tartaglia hingegen käme es darauf an, wie weit Adolphe vor Bertrand liegt, also hätte Adolphe, der eines von vier erforderlichen Spielgewinnen vor Bertrand liegt, Recht auf seine eingesetzten 24 Dukaten und ein Viertel der restlichen 24 Dukaten, also insgesamt $24 + 24/4 = 30$ Dukaten, Bertrand hätte den Rest, also 18 Dukaten zu erhalten.

Pascal korrespondierte über diese Fragen mit seinem geschätzten älteren Fachkollegen Pierre de Fermat (1601–1665). Dieser war als Jurist Rat am Gericht zu Toulouse und ein bereits wegen seiner Erfolge anerkannter Mathematiker, wenn er auch sein Hobby nur in der Freizeit betrieb. Beide kamen zum gemeinsamen Schluss: wenn dieselbe Ausgangssituation (Adolphe fehlen noch 2 und Bertrand noch 3 Spielgewinne) ein große Zahl von Malen bis zum Gewinn eines der beiden durchgespielt würde, würde Adolphe A Male und Bertrand B Male von insgesamt $A+B$ Entscheidungen die 48 Dukaten gewinnen. Eine gerechte Aufteilung zum Zeitpunkt der Ausgangssituation sollte dann Adolphe $A/(A+B)$ als Anteil und Bertrand $B/(A+B)$ als Anteil des Spielgewinnes von 48 Dukaten zuteilen. Dabei ist $A/(A+B)$ offenbar die Gewinnchance von Adolphe bei Weiterführung der Spiele, und $B/(A+B)$ die von Bertrand.

Kann man diese Gewinnchancen von vornherein berechnen? Jedenfalls entscheidet sich, wer den Einsatz gewinnt, innerhalb der nächsten vier Spiele; dann hat nämlich entweder Adolphe noch zwei Spiele gewonnen, oder Bertrand hat die ihm noch fehlenden drei Spiele gewonnen (innerhalb der nächsten drei Spiele könnte ja Adolphe erst noch eines und Bertrand gerade zwei Spiele gewonnen haben, also keiner bereits vier Spiele insgesamt). Bei jedem dieser vier Spiele haben Adolphe und Bertrand die gleiche Chance, zu gewinnen. Wenn a ‚Gewinn für Adolphe' und b ‚Gewinn für Bertrand' bedeutet, gibt es für die nächsten vier Spiele also die sechzehn gleich wahrscheinlichen Ausgangsmöglichkeiten

$$\begin{array}{cccccccc} aaaa & aaab & aaba & abaa & baaa & aabb & abab & baab \\ bbbb & bbba & bbab & babb & abbb & bbaa & baba & abba. \end{array}$$

Von diesen führen alle jene zum Gewinn von Adolphe, in denen Adolphe mindestens zweimal gewinnt, also elf, während die übrigen Sätze von vier Spielen, in denen Bertrand mindestens dreimal gewinnt, also fünf von sechzehn, Bertrand den Gewinn verschaffen. Eine ‚ehrliche' Gewinnaufteilung, die jedem den Anteil am Gewinn verschafft, wie er ihn bei oftmaliger Wiederholung dieser Wette mit gleicher Ausgangssituation (Adolphe hat noch einen Spielgewinn nötig, Bertrand noch zwei) erwarten könnte, überlässt also Adolphe elf Sechzehntel (also 33 Dukaten) und Bertrand fünf Sechzehntel (also 15 Dukaten) des Gesamteinsatzes von 48 Dukaten.

Die 1654 begonnene Korrespondenz von Pascal und Fermat über diese Fragen wird heute allgemein als Anfangspunkt der Wahrscheinlichkeitstheorie betrachtet. Weitergeführt haben die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie der Holländer Christian Huygens (1629–1695), dann Jacob Bernoulli (1654–1705), Abraham De Moivre (1667–1754), Pierre Raymond de Momort (1678–1719), Daniel Bernoulli (1700–1782), Leonhard Euler (1707–1783), Joseph Louis Lagrange (1736–1813), Pierre-Simon Laplace (1749–1827) und viele weitere ebenso bekannt gewordene Mathematiker.

Ach ja, wir hatten ja mit einer Frage von Chevalier de Méré begonnen, die noch nicht beantwortet ist. Seine Berechnung der Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse war natürlich unbegründet und unsinnig. Wenn bei vier Würfen eines Würfels niemals eine Sechs, sondern immer nur eine Eins, Zwei, Drei, Vier oder Fünf auftaucht, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür bei jedem Wurf $5/6$, bei vier Würfen insgesamt also $(5/6) \cdot (5/6) \cdot (5/6) \cdot (5/6) = 625/1296$, auf zwei Stellen gerundet also $0,48$. Die Wahrscheinlichkeit des ‚komplementären' Ereignisses, also gewissermaen des Gegenteiles, dass nämlich mindestens einmal eine Sechs gewürfelt wird, ist dann $1 - 0,48 = 0,52$. Analog dazu ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 24 Würfen mit zwei Würfeln niemals eine Doppelsechs (eines von 36 möglichen Ergebnissen) auftritt, gleich der 24. Potenz von $35/36$, auf zwei Stellen gerundet $0,51$. Das komplementäre Ereignis (mindestens einmal taucht eine Doppelsechs auf) hat also die Wahrscheinlichkeit $1 - 0,51 = 0,49$. Der Unterschied beträgt gerade einmal drei Prozent. Wie oft muss Chevalier de Méré wohl gespielt haben, um so sicher sein zu können, dass er lieber auf eine Sechs bei vier Würfen mit einem Würfel als auf eine Doppelsechs bei 24 Würfen mit zwei Würfeln gewettet hätte?

Gilbert Helmberg

Quellen.

* *Brockhaus Enzyklopädie.* Leipzig 2001.
* BELL, E.T.: *Men of Mathematics*. Dover Publications, New York 1937.
* EVES, HOWARD: *Great Moments in Mathematics. After 1650*. Mathematical Association of America, Washington DC 1983.
* KAISER, HANS/NÖBAUER, WILFRIED: *Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht.* Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1984.
* RENYI, ALFRED: *Briefe über die Wahrscheinlichkeit.* Birkhäuser, Basel 1969.
* Internet: *de Méré's Problem.*
* Internet: *Pierre Raymond de Montmort.*