MATHE-BRIEF

April 2010 — Nr. 2

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Liebe Kolleginnen und Kollegen,

Dürfen wir Ihnen eingangs das Redaktionsteam vorstellen, das Anregungen und Kritik unter der oben angegebenen Emailadresse gerne entgegennimmt?

Dorfmayr Anita (Uni Wien)
Helmberg Gilbert (Uni Innsbruck)
Heugl Helmut (Landesschulrat Niederösterreich)
Kirchner Gerhard (Uni Innsbruck)
Schlöglmann Wolfgang (Uni Linz)
Schweiger Fritz (Uni Salzburg)
Wallner Johannes (TU Graz)

Im Schuljahr 2013/14 werden die ersten 'Vorwissenschaftlichen Arbeiten' nach der neuen Matura-Ordnung zur Vergabe kommen. Aus diesem Grund enthält dieser Brief einen Vorschlag einer Themenstellung für eine solche vorwissenschaftliche Matura-Arbeit.

PYTHAGOREISCHE ZAHLENTRIPEL

Aufgabenstellung: Finde alle sogenannten *pythagoreischen Tripel* natürlicher Zahlen (a,b,c): Das sind diejenigen mit der Eigenschaft

$$a^2+b^2=c^2.$$

Motivation: Wie kann man mit möglichst primitiven Materialien und Methoden einen rechten Winkel herstellen, zum Beispiel um ein rechteckiges Feld oder den rechteckigen Grundriss eines Hauses abzustecken? Eine Idee beruht auf dem Satz des Pythagoras für ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c: Die Seiten mit den Abmessungen a und b schließen genau dann einen rechten Winkel ein, wenn $a^2+b^2=c^2$. Knüpft man in eine Schnur dreizehn Knoten in gleichem Abstand voneinander und verbindet dann den ersten und letzten Knoten, so erhält man eine geschlossenen Schnur, die durch zwölf Knoten in zwölf gleiche Teile geteilt wird. Es gilt $3+4+5=12$, also kann man durch Spannen dieser sogenannten *Zwölfknotenschnur* ein Dreieck erzeugen, das die Seitenlängen 3, 4 und 5 besitzt. Wegen

$$3^2+4^2=5^2$$

ist dieses Dreieck rechtwinkelig. Die Zwölfknotenschnüre sind seit langer Zeit bekannt und möglicherweise schon im alten Ägypten zum Zwecke der Landvermessung in Verwendung gewesen. Was zweifelsfrei belegt ist, ist jedoch das sehr frühe Interesse an weiteren pythagoreischen Tripeln, die über den einfachsten Fall $(a,b,c)=(3,4,5)$ hinausgehen: Die unter dem Namen *Plimpton 322* bekannte Keilschrifttafel (ca. 1900–1600 v. Chr.) enthält einige mit sehr großen Zahlen, wie zum

Beispiel $12709^2 + 13500^2 = 18541^2$. Dies wird allgemein als ein Beleg dafür angesehen, dass bereits in dieser frühen Zeit eine systematische Methode zum Erzeugen von pythagoreischen Tripeln bekannt war.

Mögliche Bearbeitungsschritte:

(1) Es genügt, alle solchen Zahlentripel zu finden, für die der größte gemeinsame Teiler $(a,b) = 1$ ist.
(Ein gemeinsamer Teiler von a und b ist auch Teiler von c; in der obigen Gleichung kann durch sein Quadrat gekürzt werden.)
(2) Genau eine der Zahlen a und b muss gerade sein.
(Die Summe der Quadrate zweier ungerader natürlicher Zahlen ist durch 2, aber nicht durch 4 teilbar, kann also kein Quadrat einer natürlichen Zahl sein.)
(3) Wenn a gerade ist, sind die Zahlen $c-a$ und $c+a$ teilerfremde Quadratzahlen.
(Ein gemeinsamer Primteiler von $c-a$ und $c+a$ müsste ungerade und auch Teiler von c und a sein. Wegen $b^2 = (c-a)\cdot(c+a)$ muss jeder Primteiler von b in einer geraden Potenz vorkommen.)
(4) Die Menge aller teilerfremden pythagoreischen Zahlentripel besteht aus den Zahlentripeln (a,b,c), die den folgenden Bedingungen genügen:
$$a = \frac{k^2 - l^2}{2}, \quad b = k \cdot l, \quad c = \frac{k^2 + l^2}{2},$$
wobei $k > l$ zwei beliebige ungerade teilerfremde natürliche Zahlen sind.
($c + a = k^2$, $c - a = l^2$.)
(5) Alternative Beschreibung:
$$a = 2m \cdot n, \quad b = m^2 - n^2, \quad c = m^2 + n^2,$$
wobei $m > n$ zwei beliebige teilerfremde natürliche Zahlen sind, und $m - n$ ungerade ist.
(Wenn b und c ungerade sind, gilt $c + b = 2p$ und $c - b = 2q$, wobei p und q Quadrate teilerfremder natürlicher Zahlen m und n sind. Damit b ungerade ist, muss das auch für $m - n$ zutreffen.)
(6) Beispiele pythagoreischer Zahlentripel.

Mögliche Erweiterungen der Fragestellung:

- Die Gleichung $a^4 + b^4 = c^4$ ist in ganzen Zahlen a, b, c nicht erfüllbar.
- Die Geschichte des Fermatschen Satzes.
- Welche Zahlen sind als Summe von 3 Quadraten natürlicher Zahlen darstellbar?
- Jede natürliche Zahl ist als Summe von 4 Quadraten natürlicher Zahlen darstellbar.

Mögliche Literatur:

- BAUER, FRIEDRICH: *Pythagoreische Tripel*. Informatik-Spektrum 28/5 (2005), 417-423.
- HARDY, G. H., WRIGHT, E. M.: *Einführung in die Zahlentheorie*. Oldenbourg 1958. Übersetzung von: *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford Univ. Press, 2008
- LEVEQUE, W. J.: *Topics in Number Theory I*. Addison-Wesley, Reading 1958.
- SINGH, S.: *Fermats letzter Satz*. DTV München 2001.

Mit freundlichen Grüßen, das Redaktionsteam