

Anwendungen der Graphentheorie im modernen Leben

VORWISSENSCHAFTLICHE ARBEIT

LEONHARD HOCHFILZER

KLASSE: 8A

BETREUER: MAG. PETER POLLAK

JÄNNER 2016

BG|BRG PURKERSDORF

HERRENGASSE 4, 3002 PURKERSDORF

Abstract

Diese Arbeit befasst sich mit dem mathematischen Teilgebiet der Graphentheorie. Es werden Anwendungen, die erst mit neueren technologischen Entwicklungen Sinn machen, vorgestellt. Auch der Entstehungsprozess der Graphentheorie wird nähergebracht. Dabei werden die Anwendungen hinsichtlich ihrer Zweckdienlichkeit betrachtet und es wird der Frage des praktischen Nutzens der Graphentheorie nachgegangen. Außerdem ist die These, dass Graphentheorie nützlich für das moderne Leben ist, zu prüfen. Zu diesem Zweck wird Literaturrecherche betrieben, sowie ein Experiment an einem Gleichstromkreis und eine Analyse einer Ampelschaltung durchgeführt. Außerdem werden teilweise Hilfsgrößen eingeführt, um die anhand der Graphentheorie ermittelten Ergebnisse mit den Messergebnissen objektiv vergleichen zu können. Die durchgeführte Recherche ergibt, dass die Einfärbung von Graphen, um Frequenzen von Mobilfunkmasten zu verteilen, nicht effizient genug ist, dass aber eine erweiterte Form des Dijkstra-Algorithmus zur Bestimmung kürzester Routen in Navigationssystemen angewendet wird. Aus dem Experiment an dem Gleichstromkreis ist zu schließen, dass es mit graphentheoretischen Methoden möglich ist, die Spannungen eines Gleichstromkreises gut zu modellieren. Durch die Analyse der Kreuzung lässt sich vermuten, dass es sinnvoll ist, graphentheoretische Methoden zu nutzen, um eine optimale Ampelschaltung einer Kreuzung zu erhalten.

Inhalt

Abstract	2
1 Einleitung	5
2 Historischer Aspekt der Graphentheorie.....	7
2.1 Königsberger Brückenproblem	7
2.2 Eulersche Polyederformel	10
2.3 Das Versorgerproblem.....	11
3 Anwendungen der Graphentheorie	14
3.1 Routenplanung.....	14
3.1.1 Verdeutlichung des Dijkstra-Algorithmus anhand eines Beispiels.....	14
3.1.2 Gültigkeitsbeweis des Dijkstra-Algorithmus	19
3.2 Frequenzplanung im Mobilfunk	21
3.3 Gleichstromkreise	24
3.3.1 Zufallswanderung.....	26
3.3.2 Verallgemeinerung.....	29
3.4 Optimierung von Ampelschaltungen.....	32
4 Vergleich von Erhebungsergebnissen mit den ermittelten Ergebnissen.....	35
4.1 Lokalanalyse einer Kreuzung in Wien Penzing	35
4.1.1 Ermitteln möglicher Schaltungen durch graphentheoretische Methoden	36
4.1.2 Observierung der Kreuzung	38

4.1.3 Vergleich der Beobachtung mit den ermittelten Ergebnissen.....	38
4.2 Messen der Spannungen eines Gleichstromkreises	40
4.2.1 Rechnerisches Ermitteln der Potenziale.....	40
4.2.2 Messung der Widerstände	42
4.2.3 Vergleich der Rechen- und Messergebnisse	43
Resümee.....	44
Literaturverzeichnis	46
Abbildungsverzeichnis.....	47
Glossar	48

1 Einleitung

Graphentheorie. Die meisten Menschen, die sich nicht näher mit diesem Thema befasst haben, werden denken, dass die Graphentheorie in Zusammenhang mit Funktionsgraphen steht. Tatsächlich unterscheiden sich die hier untersuchten Graphen grundlegend von Funktionsgraphen. In dieser Arbeit werden Graphen betrachtet, die aus einer Menge von Knoten und Kanten bestehen, wobei eine Kante immer zwei Knoten miteinander verbindet (siehe Abbildung 1).

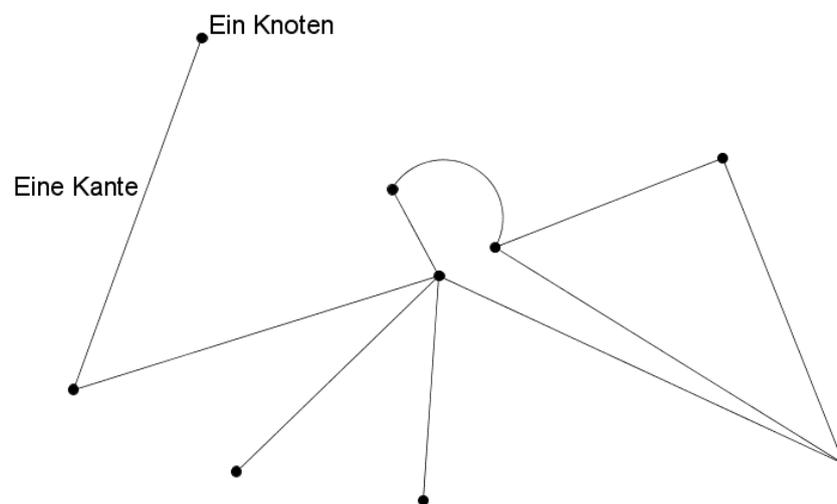


Abb. 1: Ein Graph im graphentheoretischen Sinn

Vieles, wie etwa Prozesse oder Geräte, wird durch das mathematische Instrument der Graphentheorie verbessert oder gar ermöglicht. Das Ziel dieser Arbeit ist einerseits, einige dieser Anwendungen vorzustellen und so dem Leser die Bedeutung der Graphentheorie vor Augen zu führen. Andererseits soll durch die Vorstellung jener Anwendungen auch ein Einblick in die Graphentheorie aus mathematischer Sicht gewährt werden. Zusätzlich soll der historische Hintergrund erläutert werden, um zu verstehen, wie es zu der abstrakten Idee eines Graphen kam und wie sie sich entwickelt hat.

Im Hauptteil werden zunächst die Anfänge der Graphentheorie erläutert, um den Leser der Arbeit in das Thema einzuführen. Dabei wird auch das „Königsberger Brückenproblem“ vorgestellt, eines der bekanntesten mittels Graphentheorie gelösten Probleme. Dabei wird sich vor allem auf das Werk Wladimir Welminskis gestützt, der Eulers Manuskripte digital verschriftlichte und dies herausgab [vgl. 11]. Danach werden eine Reihe von Anwendungen erläutert, die ohne dem Grundgerüst der Graphentheorie nicht oder zumindest

nicht so existieren würden, hauptsächlich basierend auf den Ausführungen von Krumke et al. [vgl. 7]. Hierbei handelt es sich um Themenebereiche wie zum Beispiel Routenplanung oder Ampeln, die dem Leser aus dem Alltag wohlbekannt sind. Das letzte Kapitel widmet sich ausschließlich den Ampelschaltungen und Gleichstromkreisen. Die Ergebnisse, die mittels der graphentheoretischen Methoden gefunden wurden, werden mit den Erhebungsergebnissen verglichen und eventuelle Abweichungen evaluiert.

Es handelt sich bei der vorliegenden Arbeit vorwiegend um eine Literaturarbeit, da der Großteil der Arbeit auf mathematischen, beziehungsweise graphentheoretischen Konzepten basiert, die in der angeführten Literatur dargeboten werden. Das letzte Kapitel lässt sich als „empirischer Teil“ kategorisieren, da selbstständige Untersuchungen und Beobachtungen durchgeführt werden. Die meisten Graphen und Diagramme sind eigenständig erstellt worden.

Auch wenn die Graphentheorie in dieser Arbeit aus möglichst mathematischer Sicht betrachtet werden soll, wird darauf verzichtet, jeden einzelnen Satz zu beweisen, da die Komplexität mancher Beweise den Umfang einer vorwissenschaftlichen Arbeit sprengen würde. Die meisten Sätze, die nicht bewiesen werden, sind zudem intuitiv verständlich.

2 Historischer Aspekt der Graphentheorie

Auch wenn die Graphentheorie vor allem Anwendung in Technologien findet, die es erst seit dem 20. Jahrhundert gibt, war es bereits im 18. Jahrhundert Leonhard Euler, der die Idee hatte, Gegebenheiten aus der echten Welt in „Knoten“ und „Kanten“ zu abstrahieren. Diese Methode legte den Grundstein für ein Konzept, das über die letzten Jahrhunderte stetig weiterentwickelt wurde und heute einen großen Teilbereich der Mathematik darstellt: Die Graphentheorie. Aufgrund ihrer Anwendungsorientiertheit und extremen Nützlichkeit ist sie die Basis vieler Algorithmen, die sich zum Beispiel in Routenplanern finden. Die Entstehung der Graphentheorie fand vor ungefähr 270 Jahren statt, als Leonhard Euler die Lösung des wohlbekannten „Königsberger Brückenproblems“ dem Plenum der St. Petersburger Akademie der Wissenschaft vorstellte [vgl. 11, S.12 ff.].

Euler hatte jedoch weit mehr im Bereich der Graphentheorie zu verzeichnen, als nur die Lösung des Königsberger Brückenproblems. Er schaffte es mit ähnlichen Methoden Rätsel über sogenannte *magische Quadrate* und *Rösselsprünge* zu lösen, die zwar auf den ersten Blick über keine direkte Anwendung verfügen, jedoch einen großen Einfluss auf die Graphentheorie selbst hatten. [vgl. 11, S.88 ff.]. Bemerkenswert ist außerdem seine Arbeit der Erforschung von 3-dimensionalen topologischen Oberflächen, wobei er viele Eigenschaften fand, und Probleme durch die Anwendung der Graphentheorie löste. [vgl. 11, S.29 ff.]

2.1 Königsberger Brückenproblem

Leonhard Euler wurde erstmals mit dem „Königsberger Brückenproblem“ vertraut, als Carl Leonhard Gottlieb Ehler ihm 1736 einen Brief schickte, in dem er um eine Lösung des folgenden Problems bat [vgl. 11, S. 152 f.]:

Ist es möglich, einen Rundgang durch Königsberg zu machen, bei dem man jede Brücke genau einmal passiert und am Ende am Anfangspunkt landet (siehe Abbildung 2)?

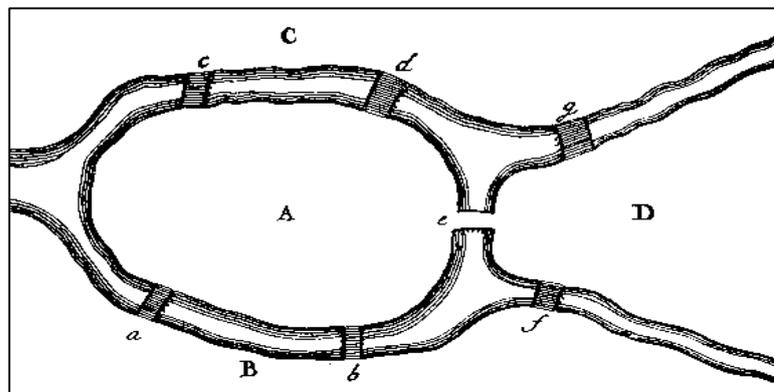


Abb. 2: Skizze des Stadtplans

Zunächst könnte man versuchen, alle möglichen Routen zu ermitteln und dann auf eine Antwort zu schließen. Euler verwarf diesen Ansatz jedoch, da es einerseits einen enormen Arbeitsaufwand bedeutet hätte und sich diese Methode nicht verallgemeinern ließe, um ähnliche Probleme zu lösen [vgl. 11, S.14].

Eulers ursprüngliche Lösung nimmt weit mehr Platz als die hier vorgestellte ein, weil Graphentheorie bis dahin noch nicht existierte, und daher Begriffe, Definitionen und Schreibweisen, um vieles abzukürzen und zu präzisieren, damals noch nicht vorhanden waren [vgl. 11, S.12 ff.]. Die Ideen und Ansätze der angeführten Lösung bleiben jedoch erhalten:

Euler bezeichnete die Landschaftsstücke mit den Großbuchstaben A, B, C, D und die Brücken mit den Kleinbuchstaben a, b, c, d, e, f (siehe Abbildung 2 und Abbildung 3).

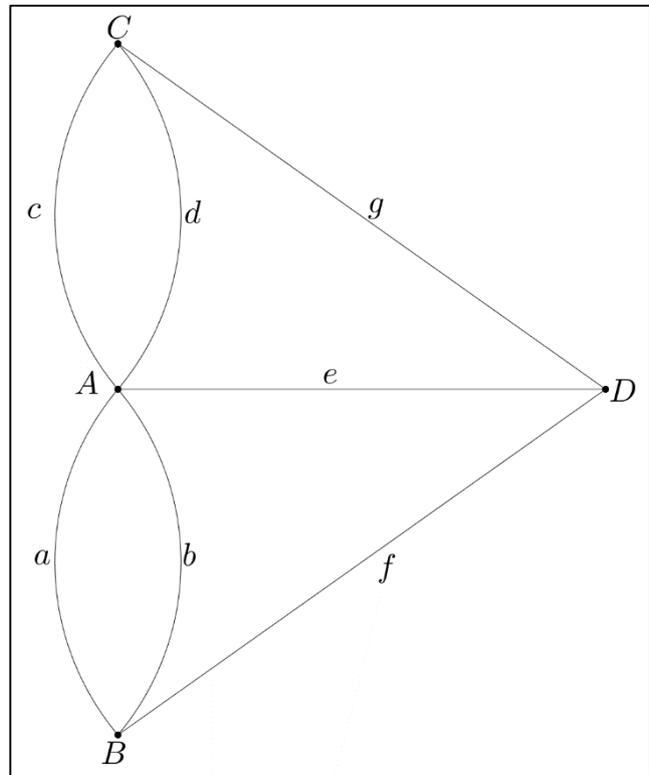


Abb. 3: Beschrifteter Graph von Königsberg

DEFINITION:

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist ein Paar disjunkter Mengen mit $E \subseteq [V]^2$; die Elemente aus E werden als Kanten und diejenigen aus V als Knoten (Ecken) bezeichnet.

Bei dem Königsberger Brückenproblem behandeln wir also den Graphen $G = (V, E)$ auf $V = \{A, B, C, D\}$ mit der Kantenmenge $E = \{\{A, B\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}$.

Die beiden zweielementigen Mengen $\{A, B\} = a = b$ und $\{A, C\} = c = d$ kommen zweimal in der Kantenmenge vor, da es zur Verbindungsstrecke von A nach B beziehungsweise A nach C jeweils zwei Brücken gibt.

Die grafische Darstellung erfolgt, indem man für jedes Element $v \in V$ einen Punkt zeichnet und für jedes Element $e \in E$ eine Verbindungslinie zwischen den beiden Knoten des Paares zieht. Entscheidend für die Lösung des Problems ist die Tatsache, dass die graphen-

theoretischen Eigenschaften unabhängig von der Geographie des zu untersuchenden Geländes sind. Es gibt unendlich Möglichkeiten einen Graphen darzustellen, ohne die graphentheoretischen Eigenschaften zu verändern. Eine Möglichkeit den Graphen von Königsberg darzustellen findet sich in Abbildung 2.

Hierbei lässt sich gut erkennen, dass die Form der Brücken und Landschaftsstücke unbedeutend für die Lösung des Problems ist, und dass die Abstraktion in Kanten und Ecken einen besseren Überblick über das Problem ermöglicht.

Die Verallgemeinerung des Problems führte zu der Formulierung des *Satzes von Euler*.

DEFINITION:

Der Grad $d(v)$ eines Knotens (Ecke) v ist die Anzahl $|E(v)|$ der zu v inzidenten Kanten. Eine Kante e und ein Knoten v inzidieren miteinander, wenn $v \in e$ gilt.

SATZ VON EULER FÜR UNGERICHTETE GRAPHEN:

Ein endlicher ungerichteter Graph ist genau dann eulersch, wenn alle Ecken geraden Grad haben. Er hat genau dann einen eulerschen Weg, wenn genau zwei Ecken ungeraden Grad haben (diese bilden Anfangs- und Endecke jedes eulerschen Weges).

Wenn ein Graph eulersch ist, dann ist es möglich einen Rundweg zu gehen, wobei man jede Kante genau einmal verwendet. Der Gedanke, um den ersten Teil dieses Satzes zu erklären, ist folgender: Immer, wenn man ein Landschaftsstück betritt, muss man es auch wieder verlassen (außer beim End-/Anfangspunkt; diesen verlässt man, woraufhin man ihn wieder betreten muss). Nun wird sowohl beim Betreten, als auch beim Verlassen eine Brücke überquert. Da man wissen will, ob es möglich ist, einen Rundgang zu finden, bei dem jede Brücke lediglich einmal überquert wird, ist daher eine gerade Anzahl von Brücken, die an jedes Landschaftsstück anschließt, notwendig, um einen solchen Rundweg gehen zu können.

Der zweite Teil des Satzes behandelt eulersche Wege, dies sind Wege, bei denen jede Brücke zwar nur einmal überquert wird, jedoch Anfangs- und Endpunkt verschieden sind. Dies lässt sich folgendermaßen begründen: Unterscheidet sich nun der Anfangs- vom Endpunkt, so muss der Anfangspunkt immer einmal mehr verlassen werden, als er betreten wird. Analog dazu muss der Endpunkt immer einmal mehr betreten werden, als er

verlassen wird. Da die Summe zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen immer ungerade ist, folgt daher, dass der Grad des End- und Anfangspunkts ungerade sein muss. Da der Grad der Ecke A ungerade ist, folgt aus dem obigen Satz, dass der Graph nicht eulersch ist, sprich, dass es keinen Rundweg gibt, bei dem man jede Brücke nur einmal überquert. Auch ein eulerscher Weg ist nicht möglich, da der Grad jeder Ecke ungerade ist, und da $|V| > 2$.

Mit der Lösung dieses Problems legte Leonhard Euler den Grundstein für die Graphentheorie.

2.2 Eulersche Polyederformel

Wie oben schon erwähnt, beschäftigte Euler sich ausgiebig mit graphentheoretischen Strukturen von 3-dimensionalen Körpern [vgl. 11, S.31 ff.]. Viele Beobachtungen stehen in Zusammenhang mit der Anzahl der Kanten und Flächen verschiedener Polyeder. Vor allem die Aufstellung der folgenden Gleichung ist von Bedeutung.

SATZ:

Für jedes Polyeder gilt die Gleichung $V - E + F = 2$. V bezeichnet hierbei die Anzahl der Knoten, E gibt die Anzahl der Kanten an und F die Anzahl der Flächen.

Dies zu beweisen ist am einfachsten, wenn man ein allgemeines Polyeder auf einen planaren Graphen in der euklidischen Ebene reduziert. Planar bedeutet in diesem Zusammenhang, dass sich zwei Kanten nicht schneiden dürfen. Auf einen formellen Beweis, dass es möglich ist jedes Polyeder in einen planaren Graphen einzubetten, wird hier verzichtet. Intuitiv kann man es sich aber folgendermaßen vorstellen:

Man entfernt eine beliebige Seite eines Polyeders und zieht die angrenzenden Kanten auseinander, sodass man das Polyeder auf eine Ebene „auflegen“ kann. Damit die Gleichung auf der rechten Seite noch immer 2 ergibt, zählt man die Außenfläche als eigene Fläche hinzu.

Nun ist nur zu zeigen, dass die obige Gleichung für jeden planaren und zusammenhängenden Graphen gilt. Dies kann per mathematischer Induktion relativ einfach gezeigt werden, wobei es sich im Folgenden wieder um einen eher wenig formellen und intuitiven Beweis handelt:

Man betrachte den *trivialen Graphen*. Dieser enthält nur einen Knoten und keine Kanten und erfüllt damit die Gleichung, da $1 - 0 + 1 = 2$. Fügt man nun ein Objekt hinzu, gibt es zwei Fälle:

I: Es werden zwei bereits bestehende Knoten, die auch bereits an andere Kanten anschließen, miteinander verbunden. Durch die Verbindung jener zwei Knoten entsteht eine neue Fläche. Dadurch erhöht sich die Zahl der Flächen und die der Kanten um eins, und man rechnet:

$$V - (E + 1) + (F + 1) = V - E + F + 1 - 1 = V - E + F$$

Die linke Seite der Gleichung verändert sich also nicht, und bleibt immer gleich, wenn man lediglich eine Kante hinzufügt. Unter Voraussetzung, dass die Gleichung vor dem Hinzufügen der Kante bereits wahr ist, impliziert dies, dass sie das auch nach dem Hinzufügen bleibt.

II: Wenn man einen Knoten hinzufügt, muss dieser mit einer Kante an einen bereits bestehenden Knoten verbunden sein, da es sich sonst um zwei verschiedene, nicht zusammenhängende Graphen handeln würde. Das heißt, bei Erhöhung der Knotenzahl um eins, nimmt gleichzeitig die Kantenzahl um eins zu. Die Flächenzahl kann sich nicht erhöhen, da an jeden Knoten einer Fläche mindestens zwei Kanten anknüpfen müssen. Man erhält:

$$(V + 1) - (E + 1) + F = V - E + F + 1 - 1 = V - E + F$$

Auch hier verändert sich die linke Seite der Gleichung nicht, und wenn man voraussetzt, dass die Gleichung für den unbearbeiteten Graphen bereits galt, gilt sie nach dem Hinzufügen des Knotens auch.

Es wurde nun gezeigt, dass die linke Seite der Gleichung konstant bleibt, egal welche (erlaubte) Veränderung man an einem Graphen vornimmt. Damit die Polyederformel aber auch nach einer Veränderung wahr bleibt, wurde angenommen, dass sie bereits davor wahr war. Da bereits gezeigt wurde, dass sie für den trivialsten Graphen gilt, und da jeder planare Graph nur durch Hinzufügen von Knoten und Kanten des trivialen Graphen entsteht, folgt daraus sofort, dass die eulersche Polyederformel für jeden planaren (überschneidungsfreien) Graphen gelten muss.

Verallgemeinert wird die eulersche Polyederformel auch *Euler Charakteristik* genannt. Zusammen mit der Orientierbarkeit ermöglicht diese es, verschiedene topologische Oberflächen zu unterscheiden [vgl. 9, S.178 ff.].

2.3 Das Versorgerproblem

Dieses Problem stellt ein Beispiel der Anwendung der eulerschen Polyederformel dar. Die Fragestellung ist folgende: Ist es möglich, die drei Versorger von Gas (G), Strom (S)

und Wasser (W) jeweils mit drei Häusern zu verbinden, ohne dass sich die Leitungen dabei schneiden (siehe Abbildung 4)?

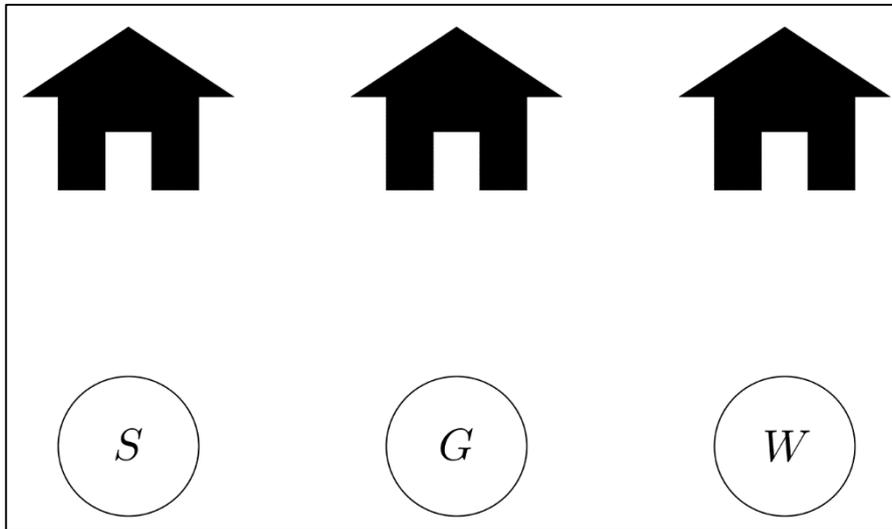


Abb. 4: Verbildlichung des Versorgerproblems.

Eine Umformulierung der Bedingung, dass sich die Leitungen nicht schneiden dürfen, ist, dass eine planare Einbettung des zugehörigen Graphen gibt.

Sei $G_v = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{S, G, W, H_1, H_2, H_3\}$ wobei S, G und W für die Versorger stehen, und $E = \{\{S, H_i\}, \{G, H_i\}, \{W, H_i\} | i \in \mathbb{N}: 0 < i < 4\}$.

Da die Kanten- und die Knotenzahl bereits bekannt sind, lässt sich die Flächenzahl, unter der Annahme, dass der Graph planar ist, errechnen.

$$6 - 9 + F = 2 \leftrightarrow F = 5$$

Nun wird jede Kante von je einer Fläche pro Seite begrenzt. In diesem Graphen werden alle möglichen Flächen von 4 oder 6 Kanten begrenzt. 2-kantige Flächen werden ausgeschlossen, denn diese wären in diesem Kontext sinnlos, da kein Haus zweimal von demselben Versorger angeschlossen werden muss. Ungerade Anzahlen an Kanten (also 3 und 5) sind auch unmöglich, da dafür entweder zwei Häuser oder zwei Versorger miteinander verbunden werden müssten, was für dieses Beispiel sinnlos ist. Eine Anzahl an Kanten, die 6 überschreitet ist ebenso sinnlos, da nur 6 Knoten zur Verfügung stehen.

Wenn man für jede Fläche 4 oder 6 Kanten zählt, erhält man als kleinsten Wert für $|E|$:

$$|E| = \frac{4 + 4 + 4 + 4 + 4}{2} = 10$$

Die Summe muss halbiert werden, da eine Kante immer an zwei Flächen angrenzt und sonst doppelt gezählt werden würde.

Alle anderen Kombinationen würden größeren Wert für E ergeben, da aber bereits 10 den tatsächlichen Wert überschreitet, stellt dies einen Widerspruch zur Annahme dar, dass es sich um einen planaren Graphen handelt, und das Rätsel ist somit unlösbar.

Interessanterweise kann man auf ähnliche Weise zeigen, dass und wie es möglich ist, dieses Rätsel auf der topologischen Oberfläche eines Torus zu lösen (siehe Abbildung 5). Auf einem Torus gilt aufgrund der verallgemeinerten Euler Charakteristik [vgl. 9, S. 176]:

$$|V| - |E| + F = 0$$

Aus derselben Rechnung wie oben erhält man:

$$6 - 9 + F = 0 \leftrightarrow F = 3$$

Wieder wird eine Fläche durch entweder 4 oder 6 Kanten begrenzt. Die Summe der Kanten muss auch wieder halbiert werden, da man sie doppelt zählt. Daraus ergibt sich, dass jede Fläche von 6 Kanten begrenzt wird, da:

$$|E| = \frac{6 + 6 + 6}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

Dies zeigt, dass der Graph auf einem Torus planar ist, sofern jede Fläche von 6 Kanten begrenzt wird. Diese „Lösung“ des Originalproblems entspricht der teilweise angeführten Lösung, einen Tunnel zu graben, durch den ein Kabel durchgeführt wird. Eine Kugel mit einem Tunnel entspricht topologisch gesehen der Oberfläche eines Torus.

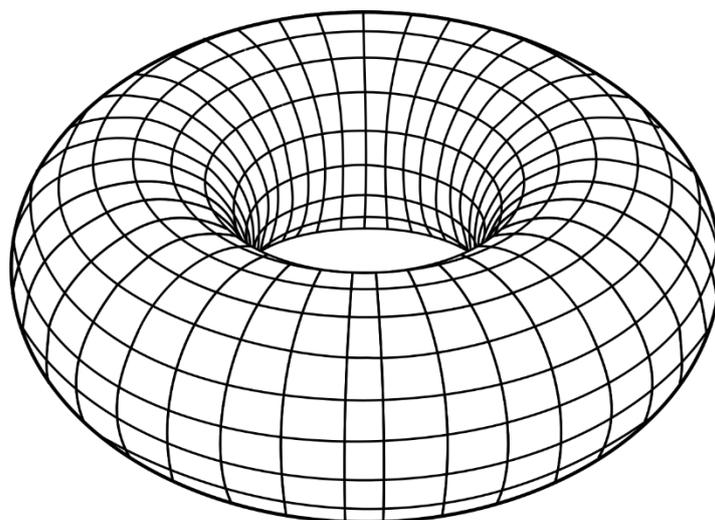


Abb. 5: Ein Torus

3 Anwendungen der Graphentheorie

3.1 Routenplanung

Eine der vermutlich bedeutendsten und bekanntesten Anwendungen der Graphentheorie ist die Routenplanung. Das grundlegende Problem der Routenplanung liegt darin, folgende Frage zu beantworten: Welcher ist der schnellste Weg von A nach B? Die „triviale“ Lösung bestünde darin, alle möglichen Wege zu bestimmen und einfach den kürzesten zu wählen. Die Anzahl der möglichen Wege von einem Punkt zum anderen ist bei komplexen Graphen sehr groß. Alle Wege zu bestimmen würde einen enormen Rechenaufwand darstellen. Daher sucht man nach Algorithmen, die den Rechenaufwand minimieren.

Ein Beispiel für einen solchen Algorithmus ist der *Algorithmus von Dijkstra*, der es einem ermöglicht, den kürzesten Weg von einem Startknoten zu jedem anderen Knoten in einem endlichen, nicht negativ bewerteten Graphen, zu errechnen. Auf diesem basiert auch die Routenplanung von *Google Maps* [vgl. 2].

Die Arbeitsweise des Algorithmus kann folgendermaßen verstanden werden: In einem Graphen werden kürzeste Wege von einem Ausgangsknoten A errechnet, indem man zuerst die kürzeste zu A inzidente Kante sucht. Lautet nun der dazu adjazente Knoten B, dann vergleicht der Algorithmus erneut alle zu A inzidenten Kanten, aber diesmal auch zusätzlich noch alle zu B inzidenten Kanten, und sucht wieder den kürzesten Weg. So werden der Reihe nach der nächstgelegene Knoten bis zum n-nächstgelegenen Knoten bezüglich des Ausgangsknotens A ermittelt. Dadurch erhält man einen Baum (kreisfreier Graph, $F = 0$) kürzester Wege bezüglich eines Ausgangsknotens.

3.1.1 Verdeutlichung des Dijkstra-Algorithmus anhand eines Beispiels

In diesem Beispiel wird der kürzeste Weg von Wien (W) nach Klagenfurt (K) gesucht, wobei man über Eisenstadt (E), Linz (L), Salzburg (S), und Graz (G) navigieren kann. Die zu den Kanten zugehörigen Zahlen repräsentieren die ungefähre Entfernung zwischen zwei Knoten in Kilometern. Die Zeichnungen sind nicht maßstabsgetreu (siehe Abbildung 6-11).

Schritt 1:

Zuerst wird der zu W nächstgelegene Knoten gesucht. Dabei werden nur jene Knoten berücksichtigt, die adjazent zu W sind, da alle anderen Knoten mit Sicherheit weiter entfernt sind, da mindestens eine zusätzliche Kante nötig wäre, um zu ihnen zu gelangen.

Die möglichen Kanten werden mit unterbrochenen Linien indiziert und die ausgewählten Kanten mit fetten blauen Linien markiert.

Mögliche Wege:

W-L: 184km; W-E: **61km**

Ergebnis: E ist der nächstgelegene Knoten zu W. Der kürzeste Weg zu E ist: W-E (siehe Abbildung 6).

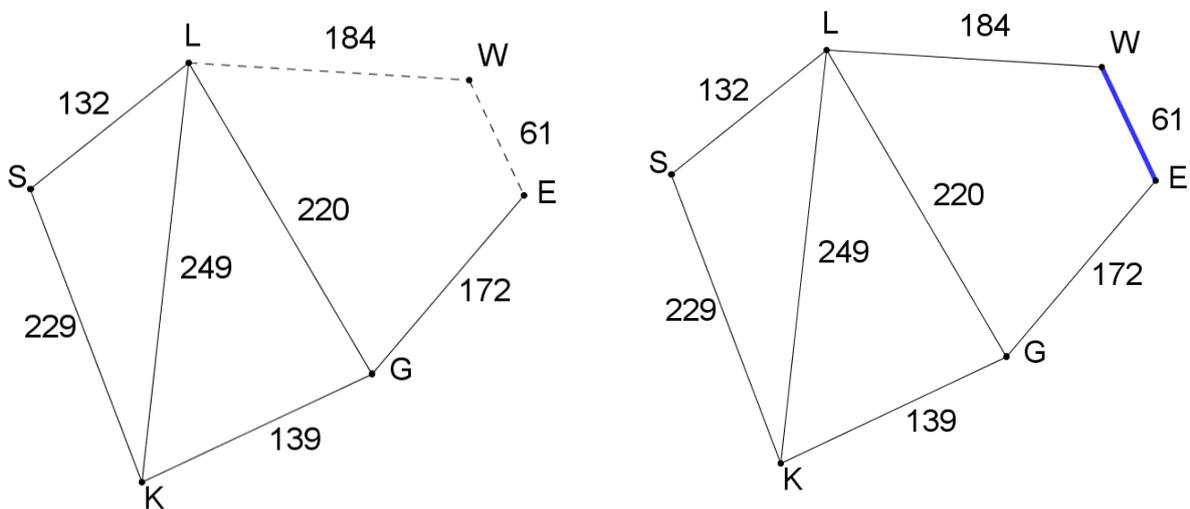


Abb. 6: Input & Output Schritt 1

Schritt 2:

Nun wird der zu W zweitnächstgelegene Knoten gesucht. Hierbei werden nur zu W und diesmal auch zu E adjazente Knoten berücksichtigt, da alle anderen Knoten aus denselben Gründen, wie oben bereits erwähnt, sicher weiter entfernt sind.

Mögliche Wege:

W-E-G: 233km; W-L: **184km**

Ergebnis: L ist der zweitnächstgelegene Knoten zu W. Der kürzeste Weg zu L ist: W-L (siehe Abbildung 7).

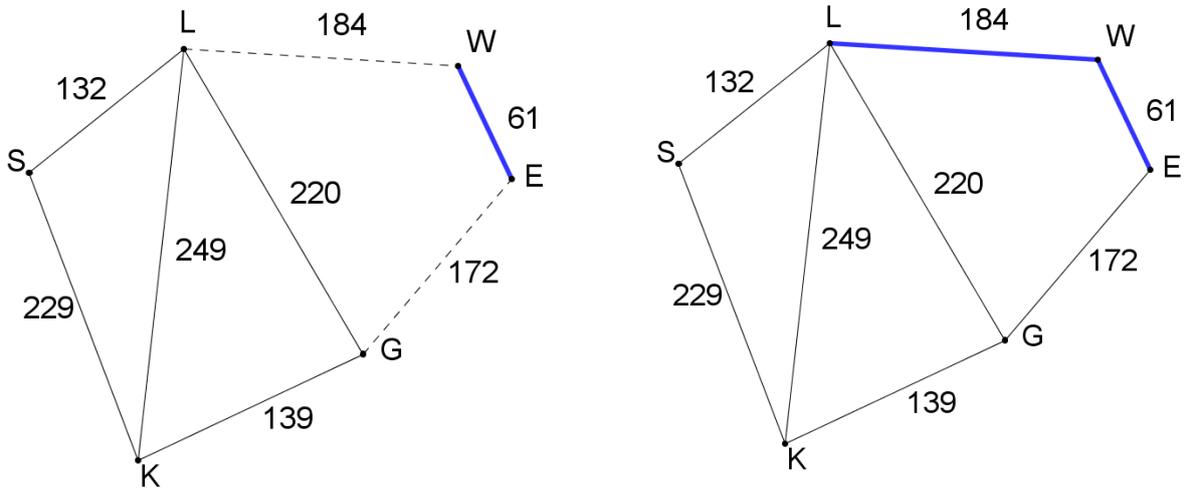


Abb. 7: Input & Output Schritt 2

Schritt 3:

Nun wird der zu W drittnächstgelegene Knoten gesucht. Diesmal werden nur zu E und L adjazente Knoten untersucht (es gibt keinen weiteren zu W adjazenten Knoten). Die Argumente bleiben dieselben, wie bereits oben erwähnt.

Mögliche Wege:

W-L-S: 316km; W-L-K: 433km; W-L-G: 404km; W-E-G: **233km**

Ergebnis: G ist der drittnächste Knoten zu W. Der kürzeste Weg zu G ist: W-E-G (siehe Abbildung 8).

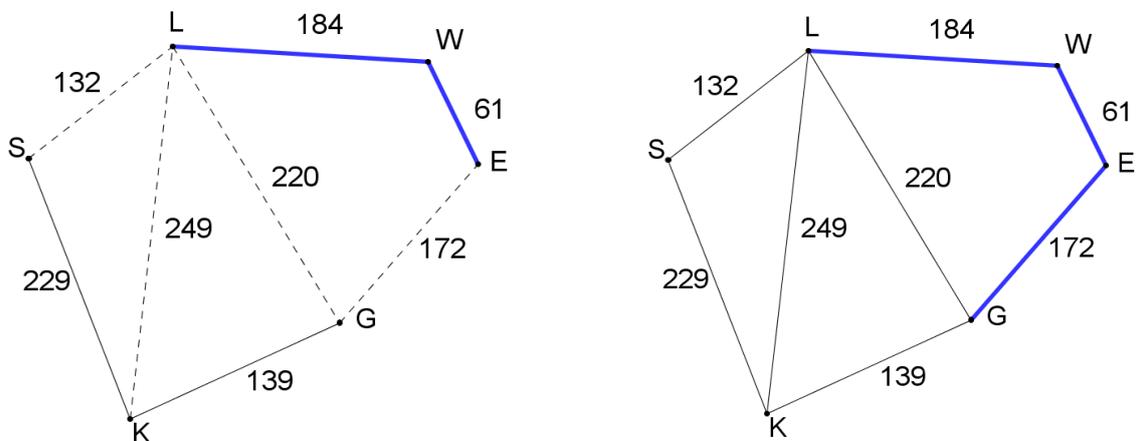


Abb. 8: Input & Output Schritt 3

Schritt 4:

Nun wird der zu W viertnächstgelegene Knoten gesucht. Dabei werden aus denselben Gründen, wie in Schritt 1 erwähnt, nur zu G und L adjazente Knoten untersucht, abgesehen natürlich von der Kante {L,G}, da L beziehungsweise G schon als zweit- beziehungsweise drittnächsten Knoten ermittelt wurde.

Mögliche Wege:

W-L-K: 433km; W-E-G-K: 372km; W-L-S: **316km**

Ergebnis: S ist der viertnächste Knoten zu W. Der kürzeste Weg zu S ist: W-L-S (siehe Abbildung 9)

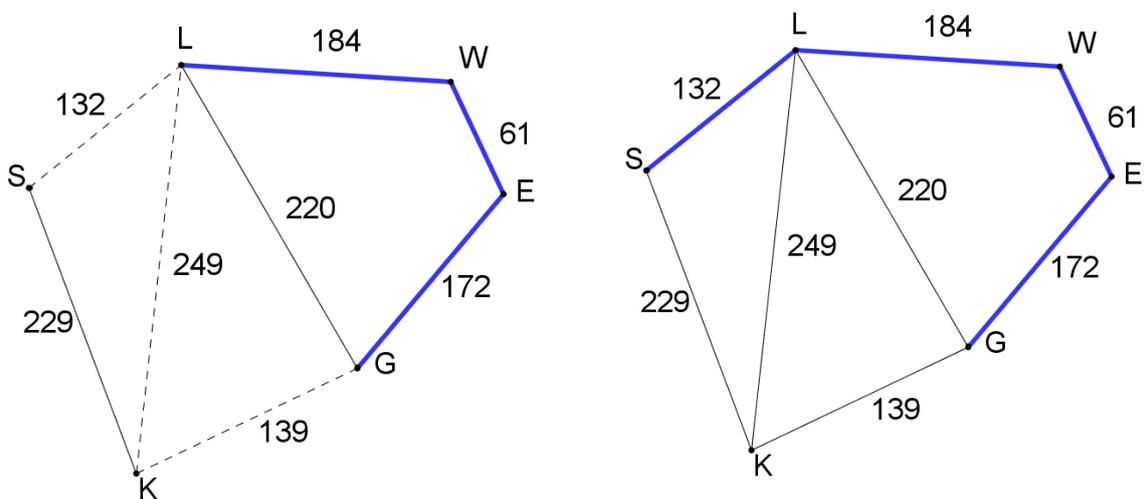


Abb.9: Input & Output Schritt 4

Schritt 5:

Zuletzt wird der zu W fünfnächstgelegene Knoten ermittelt. Hierbei werden alle zu S, L und G adjazenten Knoten betrachtet.

Mögliche Wege:

W-L-S-K: 545km; W-L-K: 433km; W-E-G-K: **372km**

Ergebnis: K ist der fünfnächste Knoten zu W. Der kürzeste Weg zu K ist: W-E-G-K (siehe Abbildung 10)

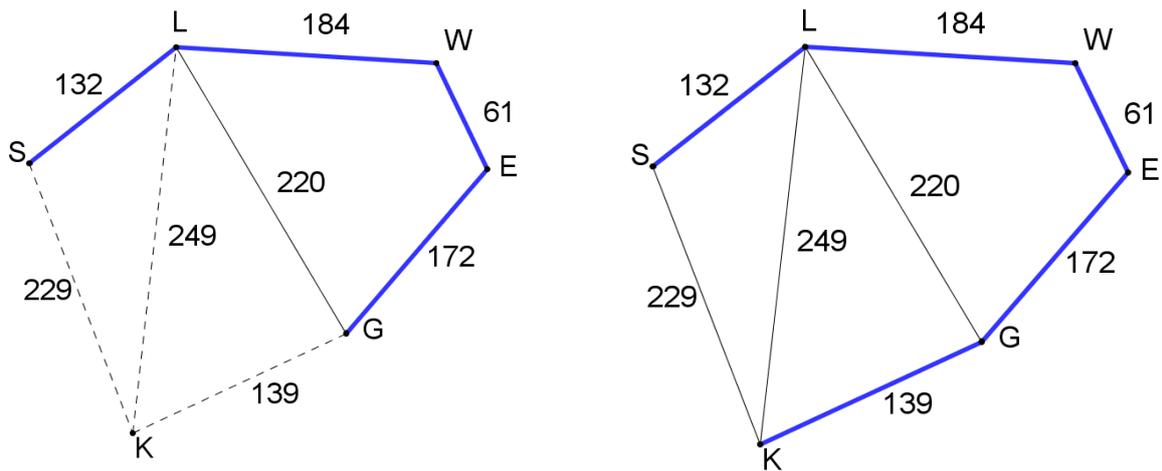


Abb. 10: Input & Output Schritt 5

Nun ist der Algorithmus zu seinem Ende gekommen, da es keine weiteren zu untersuchenden Knoten gibt. Das eigentliche Resultat ist der Baum kürzester Wege, der diesen Namen deswegen trägt, da es zu jedem Knoten in diesem Baum genau einen Weg bezüglich eines Anfangsknotens gibt, der auch gleichzeitig der kürzeste Weg ist (siehe Abbildung 11).

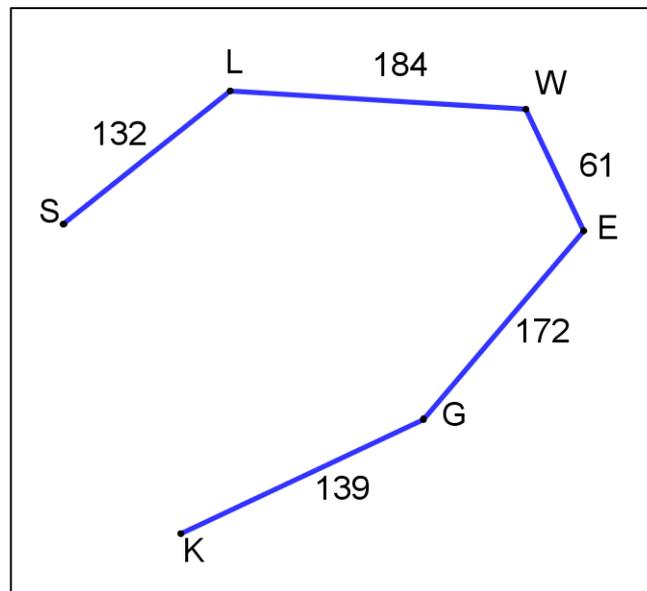


Abb. 11: Baum kürzester Wege bezüglich W

Auch wenn dieses Problem sehr schnell durch Probieren gelöst werden kann, dient es gut zur Veranschaulichung der ungefähren Funktionsweise des Algorithmus von Dijkstra. Obwohl hier der kürzeste Weg und nicht der schnellste ermittelt wurde, ändert sich an der

Funktionsweise des Algorithmus nichts, wenn man den schnellsten suchen würde. Die Kanten würden mit Zeitwerten und nicht mit Entfernungen bewertet werden.

3.1.2 Gültigkeitsbeweis des Dijkstra-Algorithmus

Der Beweis wird per Induktion durchgeführt.

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Für alle $X, Y \in V$ wird ein Wert $length(X, Y)$ zugeordnet, der die Entfernung zwischen ihnen beschreibt. Alle bereits besuchten Knoten werden mit B_i , für $i \in \mathbb{N}: 1 \leq i \leq n$ bezeichnet. $dist(B_i)$ wird definiert, als die kürzeste Entfernung von einem fixierten Ausgangsknoten A zu B_i . Alle unbesuchten Knoten werden mit U_j bezeichnet, für $j \in \mathbb{N}: 1 \leq j \leq m$. $dist(U_j)$ definiert die kürzeste Entfernung von A zu U_j , wobei der Weg nur über bereits besuchte Knoten führt. Es wird nicht vorausgesetzt, dass $dist(U_j)$ die tatsächlich kürzeste Entfernung von A zu U_j ist. Überdies gilt: $n + m + 1 = |V|$.

Induktionsbehauptung $I(n)$:

Von einem Ausgangsknoten A aus liefert der Dijkstra-Algorithmus für einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ stets den kürzesten Weg zu jedem Knoten. n gibt die Anzahl der bereits besuchten Knoten an.

Induktionsanfang:

Man betrachte den trivialen Graphen $G_0 = (V, E)$, wobei $E = \emptyset$ und $V = \{A\}$. Die Behauptung ist hierfür offensichtlich. Somit gilt $I(0)$.

Induktionsschritt:

Man nehme an, die Behauptung gelte für $I(n - 1)$. Nun wählt man o.B.d.A. (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) eine Kante $\{B_1, U_1\}$, wobei $dist(U_1)$ für alle U_j die kleinste Entfernung von allen B_i ist, sodass gilt: $dist(U_1) = dist(B_1) + length(U_1, B_1)$. $dist(U_1)$ muss die kürzeste Entfernung zwischen A und U_1 sein. Man nehme an, dies sei nicht der Fall. Dann müsste es einen Weg geben, der über mindestens einen unbesuchten Knoten führt. Man nenne den ersten unbesuchten Knoten, der auf diesem Pfad liegt W . Laut der Induktionsbehauptung muss aber gelten: $dist(W) > dist(U_1)$. Dies steht im Widerspruch zur Annahme, dass $dist(U_1)$ für alle U_j die kleinste Entfernung von allen B_i ist. Der Weg über W könnte unmöglich kürzer sein. Daher ist $dist(U_1)$ die kürzeste Entfernung zwischen A und U_1 . Da der Weg mit dem Dijkstra-Algorithmus gefunden wurde, ist die Induktionsbehauptung somit bewiesen.

Der Algorithmus ist in seiner erweiterten Form auch für gerichtete Graphen und für Graphen mit bewerteten Knoten anwendbar, falls man zum Beispiel über mehrere Knoten zu einem Endknoten will [vgl. 7, S. 177-179].

3.2 Frequenzplanung im Mobilfunk

Ein weiteres Anwendungsgebiet der Graphentheorie liegt in der Frequenzplanung von Mobilfunkbetreibern. Für jene ist es wichtig zu wissen, wie sie am besten die ihnen zugewiesenen Kanäle (Frequenzen) auf ihre Sendemasten verteilen. Wenn sich ein Kunde nämlich zwischen zwei Sendemasten befindet, die mit derselben Frequenz senden, kommt es mitunter zu Interferenz, die das Signal verschlechtert und die Gesprächsqualität negativ beeinflusst [vgl. 7, S. 1-2].

Die theoretische Grundlage zur Lösung solcher Probleme sind sogenannte *Färbungen*. Das Konzept von Färbungen ist es, jedem Knoten eine Farbe zuzuweisen, wobei meist angestrebt wird, dass zwei adjazente Knoten nicht dieselbe Farbe besitzen. Für dieses Problem kann man einen *Interferenzgraphen* definieren: Die Knoten stellen die Sendemasten dar und zwei Sendemasten werden dann mit einer Kante verbunden, wenn es zwischen ihnen zu Interferenz kommt. Die Färbung eines Knotens bedeutet in diesem Sinne, welche Frequenz ein Sendemast sendet. Wird von Färbungen gesprochen, darf der folgende Satz nicht unerwähnt bleiben.

Vier Farben Theorem:

Ein planarer Graph in der euklidischen Ebene lässt sich immer mit mindestens vier Farben einfärben, sodass zu einem beliebigen Knoten v_i alle benachbarten Knoten $v_j \in N_i$ eine andere Farbe besitzen. [vgl. 8]

N_i bezeichnet in diesem Fall die Menge aller zu v_i benachbarten Knoten und ein Graph wird als planarer Graph bezeichnet, wenn es eine Darstellung des Graphen in der Ebene gibt, bei der sich die Kanten nicht schneiden, wie bereits in 2.2 erwähnt wurde.

Dieser Satz nimmt eine besondere Stellung in der Geschichte der Graphentheorie ein, da der Beweis darin besteht, dass zu färbende Graphen auf eine bestimmte Anzahl von Fällen reduziert werden, die dann mittels eines Computerprogramms überprüft wurden. Die Skepsis gegenüber eines Computerbeweises ist groß, da er nicht von einem Menschen auf seine Validität überprüft werden kann. Außerdem erhält man im Gegensatz zu vielen konstruktiven Beweisen kein tieferes Verständnis für das Problem. Der Beweis des Vier-Farben-Theorems löste eine große, viel diskutierte philosophische Debatte aus, ob Computerbeweise anerkannt werden sollen [vgl. 9, S. 300-305] [vgl. 3, S. 155].

Die relevante Frage für einen Mobilfunkbetreiber ist nun, wie genau die Frequenzen auf die verschiedenen Sendemasten zu verteilen sind, sodass man so wenige verschiedene Frequenzen wie möglich benötigt. Es gibt Algorithmen, die Färbungen für planare, sowie nicht planare Graphen finden. Es ist möglich, mittels eines Algorithmus eine Färbung mit höchstens $\Delta + 1$ Farben auskommt, wobei Δ der höchste Grad eines Graphen ist [vgl. 7, S. 67].

Bei einfacheren Graphen reicht jedoch meist Probieren aus, um eine optimale Färbung zu erhalten. Betrachten wir einen ungerichteten Beispielgraphen (siehe Abbildung 12) $G_0 = (V, E)$ wobei $V = \{v_i | i \in \mathbb{N}: 0 < i < 9\}$ und

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_7\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_8\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}, \{v_5, v_8\}, \{v_6, v_7\}, \{v_7, v_8\}\}.$$

Die Knoten der Menge $V_c = \{v_2, v_3, v_4, v_5\} \subset V$ bilden eine Clique, das heißt sie sind jeweils paarweise miteinander verbunden [vgl. 7, S.2]. Jeder der vier Knoten muss eine andere Farbe besitzen, weil ansonsten zwei Knoten mit derselben Farbe mit einer Kante verbunden wären. Für diesen Graph benötigt man also mindestens vier Farben

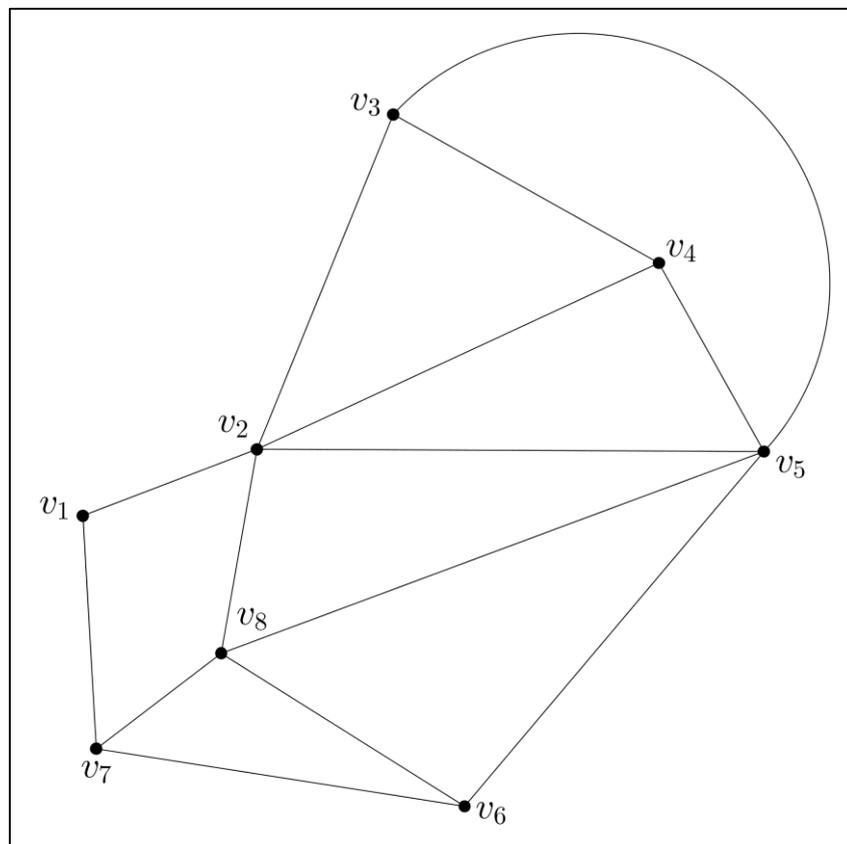


Abb. 12: Beispielgraph G_0

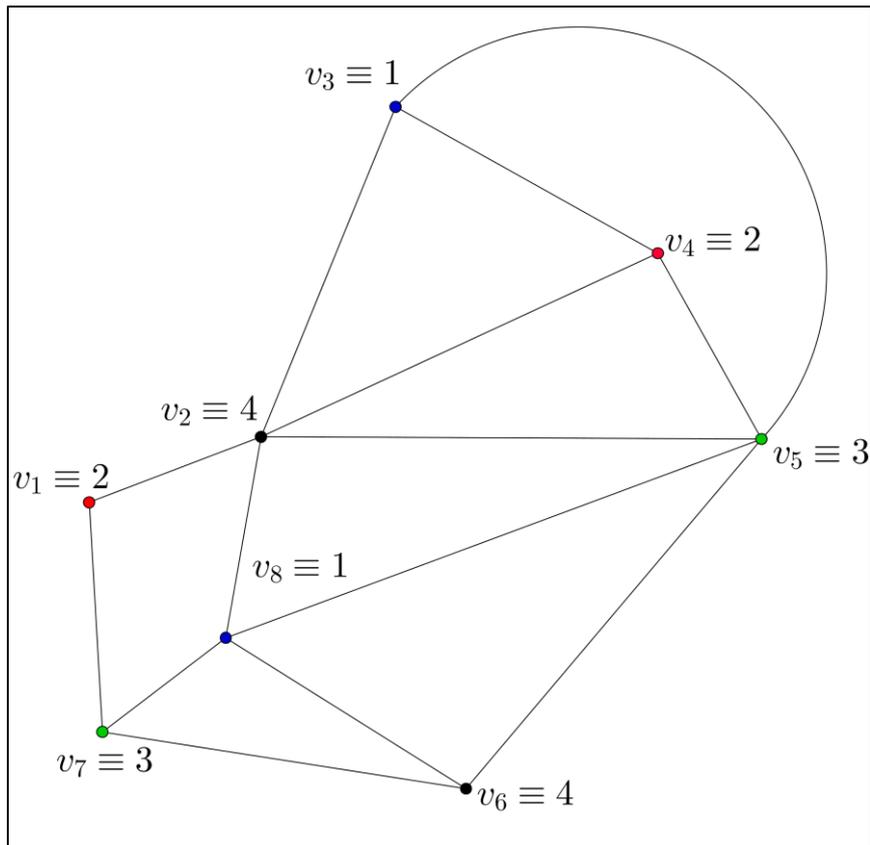


Abb. 13: Beispiel einer geeigneten Färbung für G_0

Durch Probieren findet man in diesem Fall relativ schnell eine geeignete Färbung. Eine solche Färbung zu dem Beispielgraphen G_0 findet sich auf Abbildung 13. Jede Farbe wird hierbei einer Zahl zugeordnet:

- | | |
|-----------|--------------|
| 1....blau | 3....grün |
| 2....rot | 4....schwarz |

Jede Zahl könnte aber auch einer bestimmten Frequenz oder irgendeiner anderen Eigenschaft zugeordnet werden, bei der es gewünscht ist, dass zwei adjazente Knoten nicht dieselbe Eigenschaft besitzen.

Diese Methode liefert zwar ein Beispiel, wie man das Problem der Frequenzplanung lösen könnte, wird aber aus mehreren Gründen nicht von Mobilfunkbetreibern verwendet. Ein solches Verfahren würde zum Beispiel sehr lange Laufzeiten mit sich bringen. Geeignete Vereinfachungen, um die Lösung zu approximieren, sind nicht weniger umständlich. Zusätzlich gibt es Nebenbedingungen, wie das Nichtverfügbarsein bestimmter Frequenzen an bestimmten Orten, die diese Methode nicht passend berücksichtigen kann [vgl. 5, S.21].

3.3 Gleichstromkreise

Auch Gleichstromkreise können in Graphen abstrahiert werden. Man kann jedem Graphen einen zugehörigen Gleichstromkreis zuordnen (und natürlich vice versa): Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Der zu G korrespondierende Gleichstromkreis $H = (V, E)$ wird folgendermaßen definiert:

- Jede Kante von G wird durch einen 1Ω Widerstand ersetzt.
- Eine Spannung von $1V$ wird zwischen zwei beliebigen Knoten v_a und v_b angelegt, wobei $U_a = 1V$ und $U_b = 0V$ die Spannungen an den jeweiligen Knoten ist.

In einem einfachen Gleichstromkreis gelten folgende physikalischen Gesetze:

- $I = \frac{U}{R}$ (Ohmsches Gesetz) (I)
- $L := \frac{1}{R}$ „Leitwert“
- Aus der obigen Definition folgt $I = UL$
- Zusätzlich gilt noch die Kirchhoffsche Regel:

$$\forall i \in \mathcal{J}: \sum_{j \in N_i} I_{ji} = 0 \text{ wobei } \mathcal{J} = \{i | v_i \in V\} \text{ und } N_i = \{j | \{v_i, v_j\} \in E\} \quad (\text{II})$$

Sei U_i das Potenzial bei v_i . Dann folgt daraus: $U_{ij} = U_j - U_i$. (III) Weiters gilt: $\forall i, j: R_{ij} = 1\Omega$, was den Widerstand von v_i nach v_j bezeichnet. I_{ij} ist definiert als die Stromstärke von v_i nach v_j . Daher gilt auch: $I_{ij} = -I_{ji}$.

Um nun die Potenziale $U_i, i \in \mathcal{J}$ auszurechnen, geht man folgendermaßen vor:

$$I_{ji} = \frac{U_{ji}}{R_{ij}} = \frac{U_{ji}}{1} = U_i - U_j \text{ aufgrund von (I) und (III)}$$

$$\rightarrow \sum_{j \in N_i} (U_i - U_j) = 0 \text{ durch Einsetzen von } I_{ji} = U_i - U_j \text{ in (II)}$$

Da U_i nicht an die Summe gebunden ist, kann man U_i auf einer Seite der Gleichung isolieren:

$$U_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j \in N_i} U_j, \quad n_i = |N_i| \quad (\dagger)$$

Man erhält ein lineares Gleichungssystem, mit $|V|$ Gleichungen und genau $|V| - 2$ Unbekannten. Um zu zeigen, dass dieses Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, nimmt man an, es gebe eine zu U_i verschiedene Lösung, die U'_i bezeichnet wird. Die Differenz dieser beiden Lösungen wird $c_i = U'_i - U_i$ genannt. Wenn nun gezeigt werden könnte, dass $\forall i \in \mathcal{J}: c_i = 0$ würde daraus sofort folgen, dass die beiden Lösungen ident sind.

Beweis:

Zunächst gilt in den betrachteten Gleichstromkreisen, dass es ein Potenzial $U_a = 1V$ und ein Potenzial $U_b = 0V$ gibt. Man ordne jedem Knoten v_i die Differenz der beiden verschiedenen Lösungen c_i zu. Nun erhält man wieder ein lineares Gleichungssystem:

$$c_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j \in N_i} c_j \leftrightarrow U'_i - U_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j \in N_i} (U'_j - U_j)$$

Dieses Gleichungssystem ist genau dasselbe Gleichungssystem wie oben, nur dass U_i durch c_i ersetzt wird, und dass $c_a = c_b = 0 \neq 1 = U_a$.

Man betrachte nun das größte c_i und nenne es o.B.d.A. c_x . Nun gilt:

$$c_x = \frac{1}{n_x} \sum_{j \in N_x} c_j \tag{A}$$

Da c_x größer als alle anderen c_i ist, gilt gleichzeitig:

$$c_x \geq c_j, j \in N_x \tag{*}$$

Addiert man nun alle Ungleichungen für alle $c_j, j \in N_x$ erhält man:

$$n_x c_x \geq \sum_{j \in N_x} c_j \leftrightarrow c_x \geq \frac{1}{n_x} \sum_{j \in N_x} c_j$$

Durch Einsetzen von (A) folgt:

$$\frac{1}{n_x} \sum_{j \in N_x} c_j \geq c_x \leftrightarrow \sum_{j \in N_x} c_j \geq n_x c_x$$

Die letzte Ungleichung kann als Summe von genau n_x vielen Ungleichungen folgender Form aufgefasst werden:

$$c_j \geq c_x, j \in N_x$$

Aus dieser Ungleichung und der Ungleichung (*) folgt:

$$c_x = c_j, j \in N_x$$

Dies bedeutet, dass jeder zu v_x inzidente Knoten denselben zugeordneten, maximalen Wert c_x besitzt. Wendet man dasselbe Argument, wie im Beweis gegeben, auf die zu v_x inzidenten Knoten an, erhält man wieder, dass der zugeordnete Wert maximal ist. Induktiv ist darauf zu schließen, dass schließlich jeder Knoten denselben zugeordneten, maximalen Wert besitzt. Da wir wissen, dass $c_a = c_b = 0$ folgt:

$$\forall i \in \mathcal{J}: c_i \leq 0$$

Wenn man nun analog dazu c_y als kleinsten Wert aller c_i definiert und dasselbe Argument erneut anwendet, folgt:

$$\forall i \in \mathcal{J}: c_i \geq 0$$

Das Kombinieren der Ungleichungen liefert das gewünschte Ergebnis:

$$\forall i \in \mathcal{J}: [(c_i \geq 0 \wedge c_i \leq 0) \rightarrow c_i = 0] \rightarrow N_i = N'_i$$

Dadurch ist die Eindeutigkeit des Gleichungssystems bewiesen.

Interessanterweise lösen die Potenziale auf demselben Graphen dasselbe Gleichungssystem, wie im folgenden Beispiel ausgeführt.

3.3.1 Zufallswanderung

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, endlicher und zusammenhängender Graph. Auf diesem Graphen befindet sich ein „Zufallswanderer“ (ZW), der bei jedem Knoten v_i zufällig und mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine Kante auswählt, mit der er zu einem adjazenten Knoten $v_j, j \in N_i$ gelangt. Die Frage lautet folgendermaßen: Wenn der ZW bei einem beliebigen Knoten v_i startet, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er zuerst bei einem bestimmten Knoten v_a ankommt, bevor er bei einem weiteren im Vorhinein bestimmten Knoten v_b ankommt?

$X(i) \in V$ bezeichnet den Aufenthaltsort des ZW im i -ten Schritt.

A beschreibt das Ereignis, dass der ZW zuerst in v_a ankommt, bevor er in v_b ankommt.

Ein wenig genauer könnte man A so definieren:

- T_a beschreibt die Anzahl der benötigten Schritte des ZW, bis er v_a erreicht.
- T_b beschreibt die Anzahl der benötigten Schritte des ZW, bis er v_b erreicht.

In beiden Fällen lautet der Ausgangsknoten v_i .

Dann wird p_i so definiert:

$$p_i := P(T_a < T_b) = P(A)$$

Die Verteilung hängt vom Startknoten ab. Ist der Startknoten v_a oder v_b ist die Verteilung trivial:

$$P(A|X(0) = v_a) = 1$$

$$P(A|X(0) = v_b) = 0$$

Bereits hier lässt sich eine Ähnlichkeit zu den Spannungen eines Gleichstromkreises erkennen.

Um nun die Wahrscheinlichkeiten für alle Knoten $v_i \in V$ zu bestimmen, wird zunächst der Beispielgraph $G_1 = (V, E)$ betrachtet (siehe Abbildung 14)

$$V = \{v_i | i \in \mathbb{N}: 0 < i \leq 12\}$$

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_6\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_7\}, \{v_4, v_8\}, \{v_5, v_6\}, \\ \{v_5, v_9\}, \{v_6, v_7\}, \{v_6, v_{10}\}, \{v_7, v_8\}, \{v_7, v_{11}\}, \{v_8, v_{12}\}, \{v_9, v_{10}\}, \{v_{10}, v_{11}\}, \{v_{11}, v_{12}\}\}$$

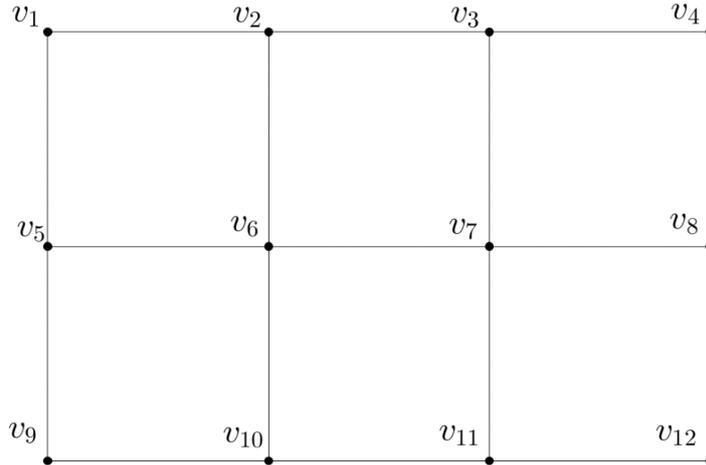


Abb. 14: Beispielgraph G_1

Sei $v_a = v_9$, $v_b = v_{12}$ und $X(0) = v_2$.

Gesucht ist nun:

$$p_2 = P(A|X(0) = v_2)$$

Durch Umformen erhält man:

$$P(A|X(0) = v_2) = P(A \wedge X(1) = v_1) \vee P(A \wedge X(1) = v_3) \vee P(A \wedge X(1) = v_6)$$

Dies entspricht:

$$P(A|X(0) = v_2) = P(A \wedge X(1) = v_1) + P(A \wedge X(1) = v_3) + P(A \wedge X(1) = v_6)$$

Aufgrund des Satzes der bedingten Wahrscheinlichkeit gilt [vgl. 6, S. 234]:

$$p_2 = P(A|X(1) = v_1) \times P(X(1) = v_1) + P(A|X(1) = v_3) \times P(X(1) = v_3) + \\ + P(A \wedge X(1) = v_6) \times P(X(1) = v_6)$$

$$\rightarrow p_2 = \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_3 + \frac{1}{3}p_6 = \frac{1}{3}(p_1 + p_3 + p_6)$$

Allgemein gilt:

$$\forall i \in \mathcal{J}: P(A|X(0) = v_i) = \sum_{j \in N_i} P(A \wedge X(1) = v_j) = \frac{1}{n_i} \sum_{j \in N_i} p_j$$

Die Wahrscheinlichkeiten des Zufallswanderers, wenn er an einem beliebigen Knoten v_i startet, zuerst an einem fixierten Knoten v_a vor einem fixierten Knoten v_b anzukommen, stimmen mit den Potenzialen eines Gleichstromkreises überein, sofern $U_a = 1V$, $U_b = 0V$ und $R = 1\Omega$ gegeben ist. Die Aussage lässt sich aber verallgemeinern, denn wenn $U_a = xV$, dann kann man entweder alle Lösungen des Gleichungssystems der Wahrscheinlichkeiten mit x multiplizieren, um auf die Potenziale zu kommen, oder alle Lösungen des Gleichungssystems der Potenziale durch x dividieren, um auf die Wahrscheinlichkeiten zu kommen.

Wenn man das Gleichungssystem G_1 löst, erhält man die Ergebnisse, die auf Abbildung 15 graphisch dargestellt werden.

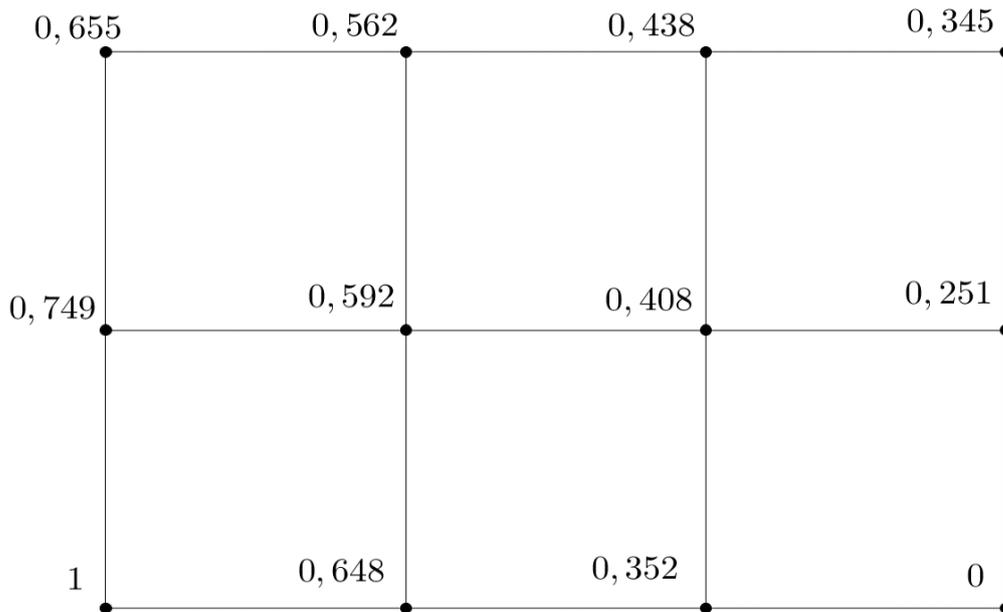


Abb. 15: p_i für G_1 ($v_a = v_9; v_b = v_{12}$)

Würde man nun eine Spannung von $U_a = xV$ anlegen, jede Kante mit einem 1Ω ersetzen und jeden Wert p_i mit x multiplizieren, erhielte man alle Potenziale in dem zu G_1 korrespondierenden Gleichstromkreis H_1 , der auf Abbildung 16 zu finden ist.

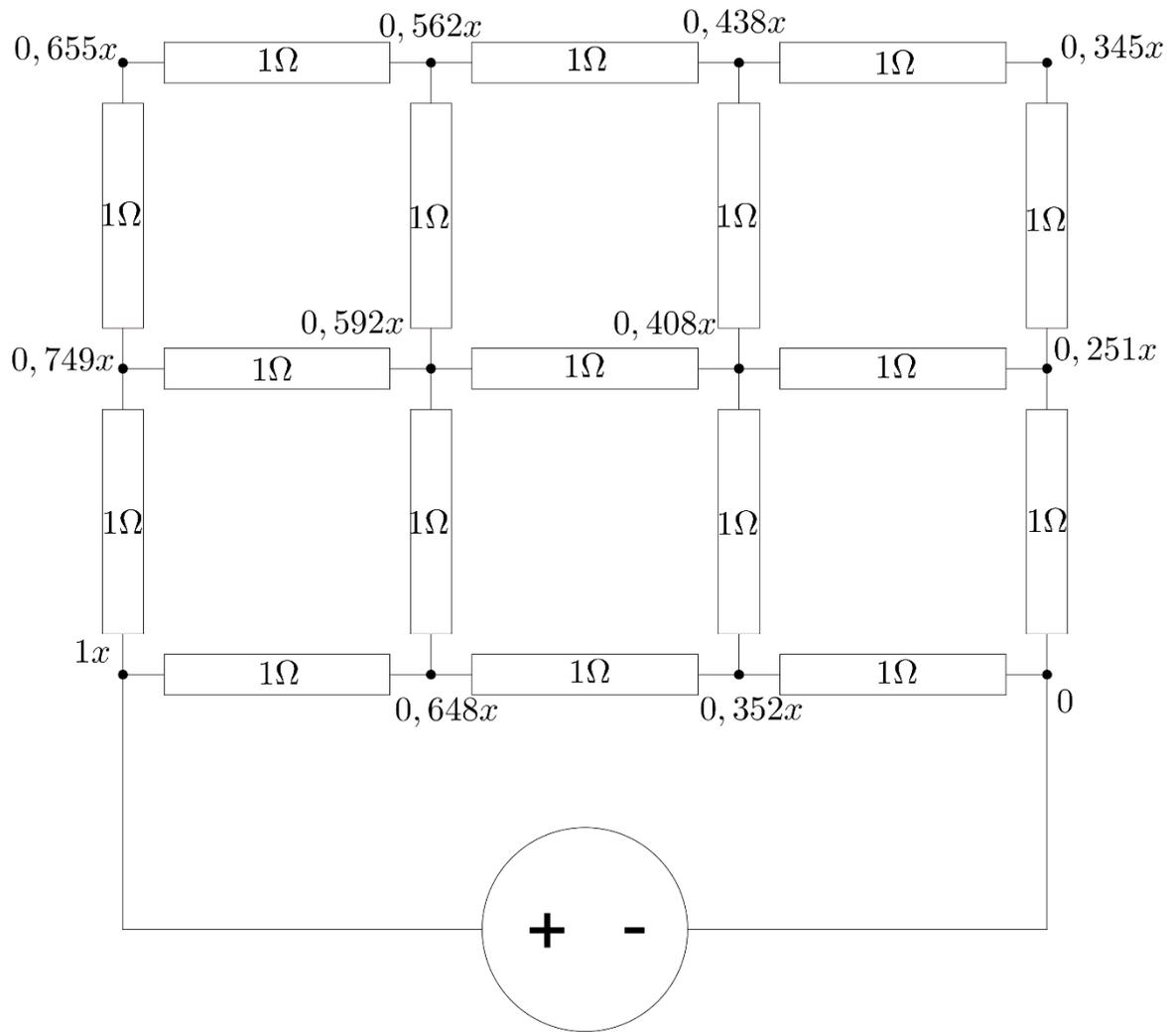


Abb. 16: Der zu G_1 korrespondierende Gleichstromkreis H_1

3.3.2 Verallgemeinerung

Der Gleichstromkreis lässt sich aber auch für beliebige Widerstände verallgemeinern. Der Widerstand $R_{ij} > 0\Omega$ wird definiert, als der Widerstand zwischen den Knoten v_j und v_i . Ähnlich wie oben lässt sich dadurch folgendermaßen eine neue Formel für die Potenziale herleiten:

Aufgrund der Kirchhoffschen Regel gilt:

$$\forall i \in \mathcal{J}: \sum_{j \in \mathcal{N}_i} I_{ji} = 0$$

Wegen des Ohmschen Gesetzes erhält man durch einsetzen:

$$\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{U_j - U_i}{R_{ij}} = 0$$

Da U_i nicht an die Summe gebunden ist, kann man die Gleichung nach U_i auflösen, und man erhält:

$$U_i = \frac{1}{\left(\sum_{j \in N_i} \frac{1}{R_{ij}}\right)} * \left(\sum_{j \in N_i} \frac{U_j}{R_{ij}}\right)$$

Um dies ein wenig zu vereinfachen, nimmt man sich den Leitwert zu Hilfe, wobei $L_{ij} = \frac{1}{R_{ij}}$ und erhält:

$$U_i = \frac{1}{\left(\sum_{j \in N_i} L_{ij}\right)} * \left(\sum_{j \in N_i} U_j L_{ij}\right)$$

Schnell erkennt man, dass man diese Gleichung für den Fall $\forall R: R = 1\Omega$ auf die Gleichung (†) zurückführen kann. Außerdem sieht man, dass sich die Koeffizienten der Potenziale immer auf 1 addieren, was wichtig ist, um folgende Aussage zu machen: Ein Potenzial besteht aus dem *gewichteten Mittelwert* der umliegenden Potenziale. Im obigen Beispiel, wo nur 1Ω Widerstände verwendet wurden, handelte es sich um den *arithmetischen Mittelwert* der umliegenden Potenziale.

Wie im 1Ω Beispiel erhält man wieder ein lineares Gleichungssystem mit $|V|$ unbekannt und $|V|$ Gleichungen, wobei $U_a = xV$ und $U_b = 0V$. Der Beweis, dass dieses Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, erfolgt im Prinzip gleich, wie der oben angegebene, nur muss eine kleine Anpassung vorgenommen werden. Hier wird darauf verzichtet.

Analog dazu kann man auch eine Zufallswanderung definieren, wobei der Zufallswanderer nicht mit gleicher, sondern mit unterschiedlicher Wahrscheinlichkeit zwischen jeweils zwei Knoten marschiert. Die Wahrscheinlichkeit, mit der er sich von einem Knoten v_j zu einem Knoten v_i bewegt, entspricht dem Leitwert L_{ij} . Hier kann verallgemeinernd auch wieder gezeigt werden, dass folgende Gleichung gilt:

$$p_i = \frac{1}{\left(\sum_{j \in N_i} L_{ij}\right)} * \left(\sum_{j \in N_i} p_j L_{ij}\right)$$

Gleichstromkreise stellen ein hervorragendes Beispiel dar, um aufzuzeigen, dass mathematische und physikalische Konzepte eng miteinander verbunden sind. In weiterer Folge

lassen sich zum Beispiel das *Dirichlet Prinzip* oder das *Thomson Prinzip*, zwei wichtige physikalische Prinzipien der Elektrotechnik, rein mathematisch mittels graphentheoretischer Konzepte herleiten [vgl. 6, S. 182 ff.]. Zusätzlich verdeutlicht dieses Beispiel auch, dass Mathematik an sehr vielen, teilweise auch unerwarteten Stellen des Lebens verborgen ist. Es mag zwar nicht unerwartet scheinen, dass man mathematische Mittel zur Hand nimmt, um Potenziale berechnen zu können, doch dass die Graphentheorie herangezogen wird, ist nicht unbedingt offensichtlich.

Jene oben behandelten Irrfahrten stellen Beispiele für sogenannte *Markovketten* dar. Auf diese wird nicht näher eingegangen, jedoch soll nicht unerwähnt bleiben, dass sie eines der wichtigsten Teilgebiete der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie darstellen [vgl. 6, S. 178]. Die Zufallswanderung zeigt die Verbundenheit verschiedener mathematischer Gebiete, obwohl sie auf den ersten Blick unabhängig voneinander zu sein scheinen.

3.4 Optimierung von Ampelschaltungen

Ampeln sind ein wichtiges Instrument, um den Verkehr zu regeln. Es ist wichtig durch geeignete Ampelschaltungen auf Durchzugsstraßen die Flüssigkeit des Verkehrs aufrecht zu erhalten, ohne dass dabei Autos aus Seitenstraßen benachteiligt werden. Die Frage, die hier erneut mit der Graphentheorie beantwortet werden soll, ist folgende:

Wenn man auf einer Kreuzung eine Ampel installieren möchte, wie soll sie geschaltet werden, sodass möglichst viele Verkehrsteilnehmer in möglichst kurzer Zeit die Kreuzung überqueren können?

Damit es leichter fällt, die Verallgemeinerung der Methode zur Lösung dieses Problems nachzuvollziehen, wird die Methode zunächst an einem Beispiel vorgestellt (übernommen [vgl. 7, S. 56]).

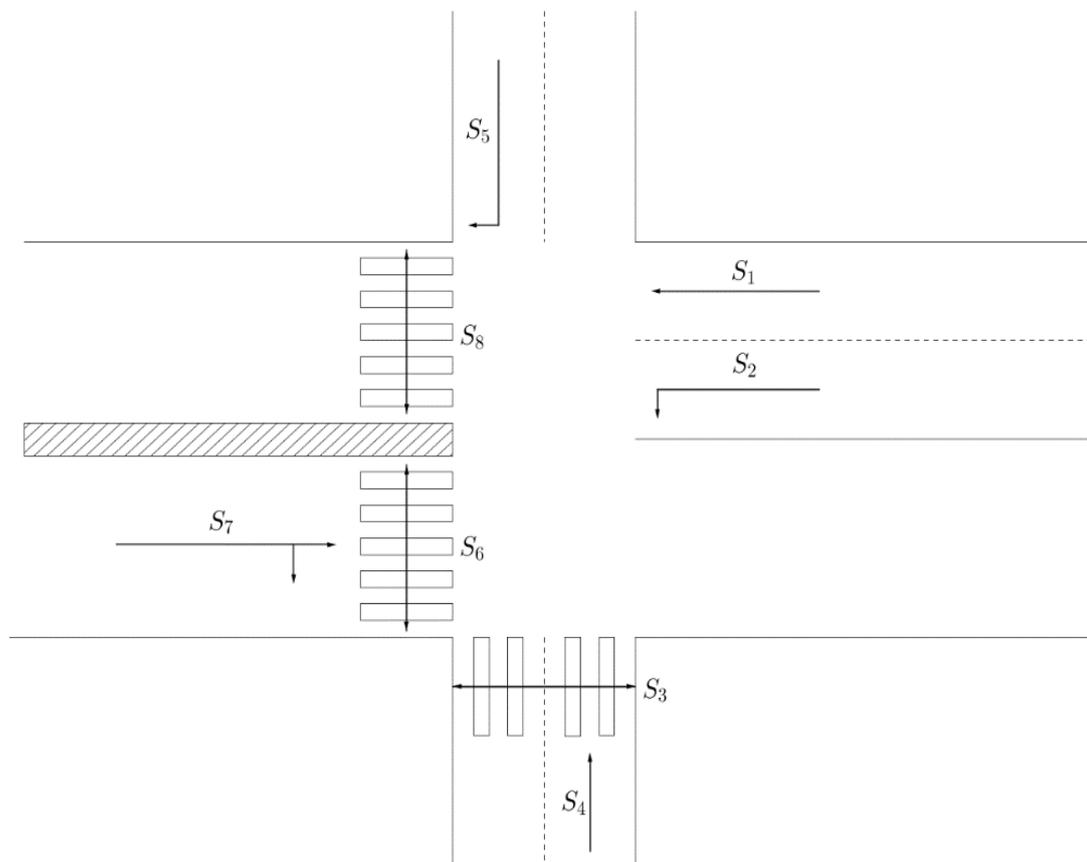


Abb. 17: Beispiel einer Kreuzung K_1 mit Verkehrsströmen

Das Ziel ist, eine optimale Ampelschaltung für die Kreuzung K_1 zu finden, um den Verkehr so flüssig wie möglich zu halten (siehe Abbildung 17). Die ‚naive‘ Lösung bestünde darin, jeden Verkehrsstrom der Reihe nach grün zu schalten, also zuerst S_1 , dann S_2 , und

so fort. Da aber bei vielen Kreuzungen mehrere Verkehrsströme gleichzeitig, reibungslos und kollisionsfrei fließen können, wäre es nützlich, möglichst vielen Verkehrsströme gleichzeitig grün zu schalten. Es wäre ein verlorenes Zeitersparnis, nur S_1 grün zu schalten, wenn zum Beispiel S_2 ohnehin gleichzeitig auf grün geschaltet sein könnte, ohne dass es zu Unfällen kommt. Um dies zu ermöglichen, wird zunächst ein sogenannter *Verträglichkeitsgraph* definiert.

DEFINITION:

$F = (V, E)$ ist der zu K korrespondierende Verträglichkeitsgraph, wobei die Knotenmenge $V = \{S_j | j \in \mathbb{N}: 0 < j \leq n\}$ die Verkehrsströme angibt, und die Kantenmenge wie folgt definiert ist:

$$E = \{\{S_j, S_i\} | S_j, S_i \in V: S_j \text{ \& \ } S_i \text{ können die Kreuzung simultan nutzen}\}.$$

Wenn zwei Verkehrsströme gleichzeitig fließen können, bezeichnet man sie als miteinander *verträglich*. Im Verträglichkeitsgraphen werden zwei miteinander verträgliche Verkehrsströme mit einer Kante verbunden. Der Graph F_1 ist auf Abbildung 18 skizziert.

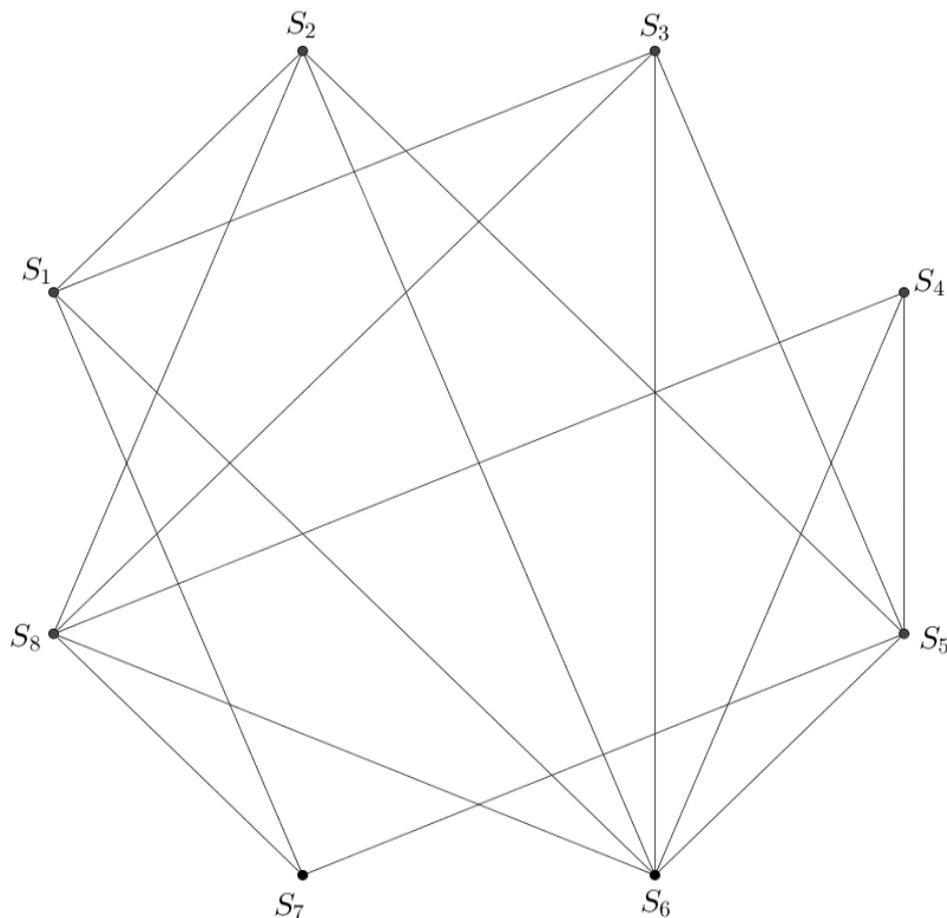


Abb. 18: Verträglichkeitsgraph F_1

Um nun möglichst effektive Ampelschaltungen zu finden, werden alle vollständigen Teilgraphen von F_1 gesucht. Ein vollständiger Teilgraph ist eine Teilmenge der Knotenmenge V , wobei alle Knoten paarweise mit Kanten verbunden sind. Ein solcher Teilgraph wird auch als *Clique* bezeichnet. In diesem Fall ergeben sich folgende Cliques:

$$\begin{array}{lll} C_1 = \{S_1, S_2, S_6\} & C_3 = \{S_3, S_5, S_6\} & C_5 = \{S_1, S_7\} \\ C_2 = \{S_2, S_5, S_6\} & C_4 = \{S_4, S_5, S_6\} & C_6 = \{S_7, S_8\} \end{array}$$

Nun ist man an einer sogenannten *Sequenz*, also einer Abfolge der Cliques interessiert. Man strebt einerseits an, mit so wenigen Cliques wie möglich alle Verkehrsströme abzudecken. Andererseits ist es auch günstig, wenn aufeinanderfolgende Cliques viele gleiche Elemente (Verkehrsströme) enthalten, um Gelbphasen zu vermeiden und somit zusätzliche Zeit zu sparen. In diesem Fall wäre eine Möglichkeit, die Knoten folgender Cliques hintereinander auf Grün zu schalten:

$$a_0 = \langle C_1, C_6, C_3, C_4 \rangle$$

Diese Folge an Grünschaltungen wird dann periodisch wiederholt.

Diese Methode scheint auf den ersten Blick nicht besonders viel Aufwand zu ersparen, vor allem weil man dieselbe Lösung vermutlich durch ein wenig Probieren ebenfalls finden könnte. Der Vorteil besteht darin, ein Problem wie dieses zu formalisieren und zu verallgemeinern. Hat man nämlich ein ähnliches Problem zu lösen, so erfordert es nicht viel Aufwand dieses zu lösen, wenn man bereits die Lösung für den allgemeinen Fall gefunden hat.

Die allgemeine Methode lässt sich anhand des vorhergehenden Beispiels gut nachvollziehen. Man fährt wie folgt fort: Es wird eine Kreuzung K betrachtet, die die Verkehrsströme S_1, S_2, \dots, S_n enthält. Danach wird der zu der Kreuzung K korrespondierende Verträglichkeitsgraph F erstellt. Alle Cliques dieses Verträglichkeitsgraphen werden herausgeschrieben. Nun sucht man eine Sequenz der Cliques, die sich periodisch wiederholt. Wie diese Sequenz aussieht, richtet sich nach verschiedenen Kriterien. Es muss aber auf jeden Fall sichergestellt werden, dass jeder Knoten in mindestens einer der Cliques vorkommt, denn sonst würde ein Verkehrsstrom komplett vernachlässigt werden.

4 Vergleich von Erhebungsergebnissen mit den ermittelten Ergebnissen

4.1 Lokalanalyse einer Kreuzung in Wien Penzing

Die in 3.4 vorgestellten Methoden sollen nun zu einer Anwendung eines Beispiels des echten Lebens kommen. Dazu wird die Kreuzung zwischen der Albert-Schweizer-Gasse und der B1 untersucht. Ziel der Untersuchung ist es, ob sich die Schaltungen, die man mittels der Methoden aus 3.4 herausfindet, von den tatsächlichen Schaltungen unterscheiden. Unterschiede und deren mögliche Gründe werden erläutert.

Auf Abbildung 19 findet sich eine Skizze der Kreuzung mit den eingezeichneten Verkehrsströmen.

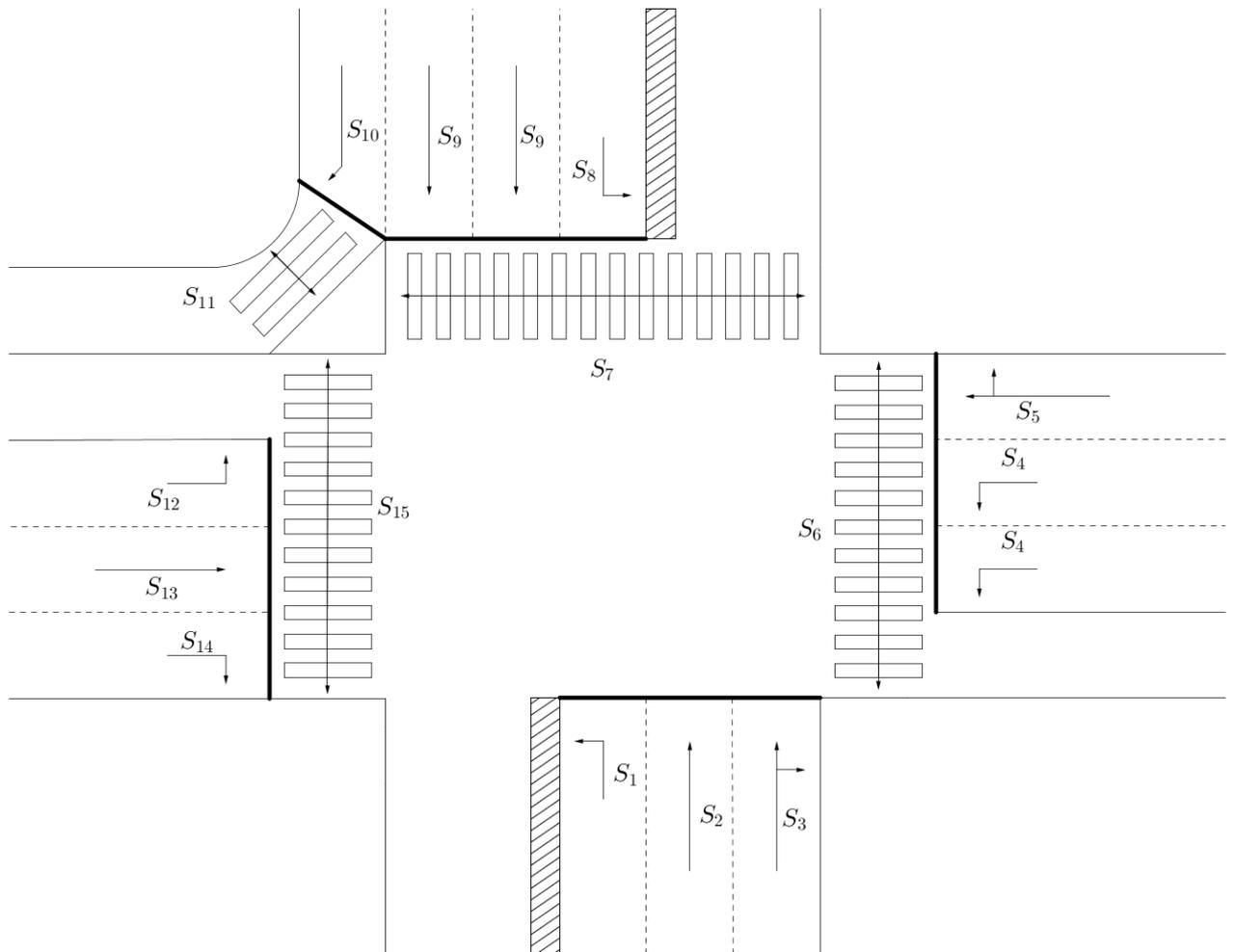


Abb. 19: Skizze der Kreuzung B1|Albert-Schweizer-Gasse

Anmerkung: Die B1 verläuft in dieser Skizze vertikal, die Albert-Schweizer-Gasse horizontal.

Cliquen, bei denen lediglich S_{10} und S_{11} ausgetauscht sind. Um den Arbeitsaufwand zu halbieren, enthält eine Clique C standardmäßig S_{10} und wird als C' bezeichnet, wenn man S_{11} mit S_{10} austauscht. Oder anders gesagt:

$$C' := \{S_{11}\} \cup C \setminus \{S_{10}\}$$

Die Cliques des Verträglichkeitsgraphen:

$$C_1 = \{S_1, S_2, S_3, S_6, S_{10}, S_{14}\}$$

$$C_6 = \{S_4, S_{10}, S_{12}\}$$

$$C_2 = \{S_1, S_8, S_{10}, S_{14}\}$$

$$C_7 = \{S_5, S_7, S_{10}, S_{13}, S_{14}\}$$

$$C_3 = \{S_2, S_3, S_9, S_{10}, S_{15}\}$$

$$C_8 = \{S_6, S_{10}, S_{12}, S_{14}\}$$

$$C_4 = \{S_4, S_{10}, S_{15}\}$$

$$C_9 = \{S_8, S_9, S_{10}, S_{15}\}$$

$$C_5 = \{S_4, S_5, S_7, S_{10}\}$$

$$C_{10} = \{S_{10}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\}$$

Ohne einen geeigneten Algorithmus, ist es relativ schwierig eine Sequenz zu finden, die einerseits die Anzahl der Cliques minimiert, und andererseits die Anzahl der gemeinsamen Elemente zweier aufeinanderfolgender Cliques maximiert. Einen solchen Algorithmus für diesen Fall zu implementieren, würde den Rahmen dieser Arbeit übersteigen. Deswegen wird lediglich eine Sequenz geliefert, die auf den ersten Blick einigermaßen sinnvoll erscheint:

$$a_1 = \langle C_1, C_5, C_{10}, C_8, C_6, C_9 \rangle$$

Bei dieser Sequenz wurde die Priorität auf den fahrenden Verkehr gesetzt, da es vor allem gilt, Staus zu vermeiden, um die Flüssigkeit des Verkehrs aufrecht zu erhalten. Fußgänger werden trotzdem berücksichtigt und jeder Verkehrsstrom für Fußgänger kommt mindestens einmal in der Sequenz vor. Außerdem würde das Vorhandensein von Schaltern für die Fußgänger das Einschleusen einer möglichst günstigen Clique ermöglichen, die einerseits möglichst viele Elemente, wie die vorherige Clique enthält, aber auch den Fußgängerübergang auf grün schaltet. Ein Beispiel: Ein Fußgänger möchte den Übergang S_{11} überqueren. Unter der Annahme, dass die nächste geplante Clique C_i wäre, wird in der Sequenz C_i einmalig gegen C_i' ausgetauscht. Da S_{10} ohnehin durchgehend auf grün geschaltet ist, würde dieses Vorgehen den Verkehrsfluss nicht allzu sehr behindern.

Zusätzlich ist auch die Zeit einer jeweiligen Grünschaltung von Interesse. Dies ist jedoch nicht einfach zu beantworten, da bekannt sein müsste, wie hoch das Verkehrsaufkommen der jeweiligen Verkehrsströme ist. Die Intensität der jeweiligen Verkehrsströme könnte auch die Sequenz beeinflussen, da den Verkehrsströmen möglicherweise unterschiedliche

Prioritäten zugeordnet werden. Messungen, die dies ermitteln, würden den Rahmen dieser Arbeit übersteigen und werden somit nicht durchgeführt.

4.1.2 Observierung der Kreuzung

Die Kreuzung B1|Albert-Schweizer-Gasse wurde am 31.12.2015 um ungefähr 12 Uhr beobachtet. Das Ziel war es, folgende Fragen zu beantworten:

1. Welche Verkehrsströme fließen in welcher Reihenfolge? Lässt sich eine Periodizität erkennen? Kann man die Abfolge der Verkehrsströme einer Sequenz von Cliques zuordnen?
2. Sind Schalter für die Fußgänger angebracht? Wenn ja, wie beeinflusst das Betätigen eines Schalters die Ampelschaltungen?

Ergebnisse:

Bei der Beobachtung der verschiedenen Grünschaltungen lässt sich folgende sich periodisch wiederholende Sequenz erkennen:

$$a_2 = \langle C_{10}, C'_5, C'_2, C_1, C_3 \rangle$$

Die Abfolge der gleichzeitig grün geschalteten Verkehrsströme lässt sich eindeutig einer Sequenz von Cliques zuordnen.

Die Antwort auf die zweite Frage ist zu verneinen, es waren keine Schalter angebracht.

4.1.3 Vergleich der Beobachtung mit den ermittelten Ergebnissen

Das Nichtvorhandensein von Schaltern für die Fußgängerampeln erfordert, dass die Sequenz Cliques enthält, die S_{11} enthalten. a_2 enthält für diesen Zweck C'_5 und C'_2 . Da $S_7, S_{11} \in C'_5$ ist es für einen Fußgänger möglich, die Straße ohne Pause auf der Verkehrsinsel zu überqueren (siehe Abb. 19). Da die meisten Fußgänger wahrscheinlich nicht lediglich anstreben, auf die Verkehrsinsel zu gelangen, ist das Kombinieren von zwei benachbarten Fußgängerübergängen äußerst sinnvoll.

Vergleicht man die Sequenzen a_1 und a_2 , so fällt auf, dass sie sich in der Länge der Periode $|a_i|$ unterscheiden. $|a_1| = 6$ und $|a_2| = 5$. a_2 übertrifft a_1 in dem Punkt, die Anzahl der Cliques zu minimieren.

Nun wird eine Hilfsgröße eingeführt, um die Minimierung der Gelbphasen der jeweiligen Sequenzen zu vergleichen. Man bezeichne das erste Glied einer Sequenz $a(1)$, das zweite Glied $a(2)$ und das n-te Glied $a(n)$. Nun betrachtet man die Kardinalität des Durchschnitts zweier aufeinanderfolgender Glieder:

$$|a(l) \cap a(l + 1)|$$

Die nun eingeführte Hilfsgröße $z(a_i)$ einer Sequenz a_i mit Länge $|a_i| = m$ wird wie folgt definiert:

$$z(a_i) = |a_i(m) \cap a_i(1)| + \sum_{s=1}^{m-1} |a_i(s) \cap a_i(s + 1)|$$

Diese Hilfsgröße gibt nun die Anzahl der vermiedenen Gelbphasen an. Je größer diese ist, desto mehr Zeit wird erspart, daher ist eine Maximierung dieses Wertes gesucht. Dieser Wert muss natürlich in Relation zu der Länge der Periode betrachtet werden, daher ist der Wert von $\frac{z(a_i)}{|a_i|}$ von Interesse. Da dieser Wert außerdem indirekt proportional zur Länge der Sequenz ist, umfasst die Maximierung dieses Wertes beide Kriterien.

$$\frac{z(a_1)}{|a_1|} = 1,5 > 1,4 = \frac{z(a_2)}{|a_2|}$$

Hierbei wird aber bei a_1 davon ausgegangen, dass S_{10} immer so lange in jeder Clique vorkommt, bis ein Fußgänger einen Schalter betätigt, um S_{11} zu überqueren. Geht man davon aus, dass dies ein bis zweimal pro Clique geschieht, verringert sich der Wert von $\frac{z(a_1)}{|a_1|}$.

$$\frac{z(a_1)}{|a_1|} \approx 1,3 < 1,4 = \frac{z(a_2)}{|a_2|}$$

Der Unterschied der beiden Werte bleibt jedoch in beiden Fällen marginal.

Den Werten zufolge ist die Sequenz a_2 der Sequenz a_1 überlegen. Die beobachtete Schaltung ist der gefundenen jedoch sehr ähnlich und es scheint, als befände man sich mit diesen Mitteln am richtigen Wege, um solche Probleme systematisch angehen zu können. Ein sehr wichtiger Aspekt, der hier vernachlässigt wurde, ist auch das Koordinieren der Ampelschaltungen nahe liegender Ampeln. Dies könnte auch eine Veränderung der gewählten Sequenz bewirken.

4.2 Messen der Spannungen eines Gleichstromkreises

Dieses Kapitel widmet sich dem Messen der Spannungen einzelner Knoten an einem Gleichstromkreis mit unterschiedlich starken Widerständen. Die Messergebnisse werden danach mit den Ergebnissen, die man durch rechnerisches Vorgehen erhält, verglichen. Mit rechnerischem Vorgehen ist das Aufstellen und Lösen eines Gleichungssystems, wie es in 3.3 getan wurde, gemeint.

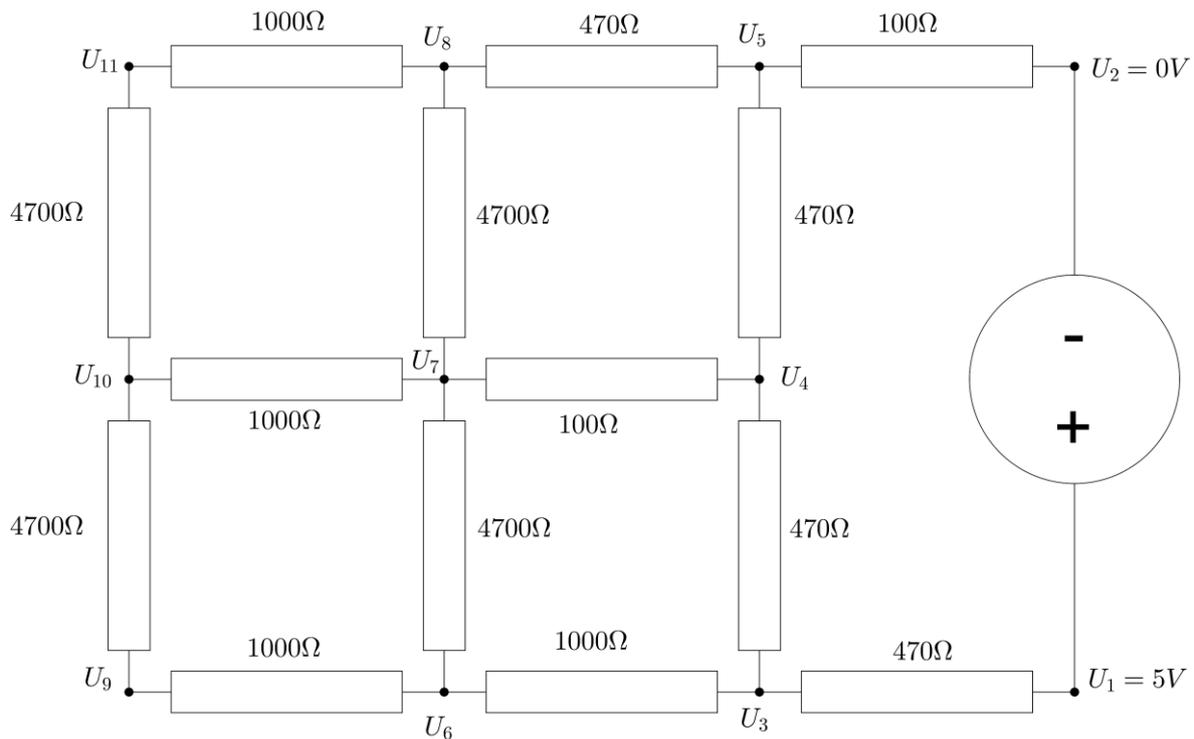


Abb. 21: Gleichstromkreis H_5

Die Messungen wurden bei dem Gleichstromkreis H_5 durchgeführt, dessen Aufbau auf Abbildung 21 zu sehen ist. Die Anordnung der Widerstände erfolgte nach keiner Systematik.

4.2.1 Rechnerisches Ermitteln der Potenziale

Um die Potenziale rechnerisch ermitteln zu können, benötigt man folgende Gleichung, die in Kapitel 3.3.2 hergeleitet wurde:

$$U_i = \frac{1}{\left(\sum_{j \in N_i} L_{ij}\right)} * \left(\sum_{j \in N_i} U_j L_{ij}\right)$$

Nun kann man ein lineares Gleichungssystem aufstellen:

$$U_1 = 5V$$

$$U_2 = 0V$$

$$U_3 = \frac{1}{\frac{1}{470} + \frac{1}{470} + \frac{1}{1000}} * \left(\frac{U_1}{470} + \frac{U_4}{470} + \frac{U_6}{1000} \right)$$

$$U_4 = \frac{1}{\frac{1}{470} + \frac{1}{470} + \frac{1}{100}} * \left(\frac{U_3}{470} + \frac{U_7}{100} + \frac{U_5}{470} \right)$$

$$U_5 = \frac{1}{\frac{1}{470} + \frac{1}{470} + \frac{1}{100}} * \left(\frac{U_2}{100} + \frac{U_4}{470} + \frac{U_8}{470} \right)$$

$$U_6 = \frac{1}{\frac{1}{1000} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{4700}} * \left(\frac{U_3}{1000} + \frac{U_9}{1000} + \frac{U_7}{4700} \right)$$

$$U_7 = \frac{1}{\frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{4700} + \frac{1}{4700}} * \left(\frac{U_4}{100} + \frac{U_{10}}{1000} + \frac{U_6}{4700} + \frac{U_8}{4700} \right)$$

$$U_8 = \frac{1}{\frac{1}{470} + \frac{1}{4700} + \frac{1}{1000}} * \left(\frac{U_5}{470} + \frac{U_7}{4700} + \frac{U_{11}}{1000} \right)$$

$$U_9 = \frac{1}{\frac{1}{1000} + \frac{1}{4700}} * \left(\frac{U_6}{1000} + \frac{U_{10}}{4700} \right)$$

$$U_{10} = \frac{1}{\frac{1}{4700} + \frac{1}{4700} + \frac{1}{1000}} * \left(\frac{U_9}{4700} + \frac{U_7}{1000} + \frac{U_{11}}{4700} \right)$$

$$U_{11} = \frac{1}{\frac{1}{1000} + \frac{1}{4700}} * \left(\frac{U_8}{1000} + \frac{U_{10}}{4700} \right)$$

Die Werte für U_1 und U_2 sind bereits im Vorhinein bekannt, da es für die Rechnung unentbehrlich ist, zu wissen an welchen zwei Knoten die Spannungsquelle angeschlossen ist. Zusätzlich muss die Ausgangsspannung bekannt sein.

Aufgrund des unverhältnismäßig großen Arbeitsaufwands beim händischen Lösen eines solchen Gleichungssystems, werden die Lösungen mithilfe eines CAS ermittelt.

Die berechneten Lösungen (auf zwei Nachkommastellen gerundet):

$$\begin{array}{lll} U_1 = 5V & U_5 = 0,36V & U_9 = 2,70V \\ U_2 = 0V & U_6 = 2,89V & U_{10} = 1,80V \\ U_3 = 3,31V & U_7 = 1,82V & U_{11} = 0,80 \\ U_4 = 1,82V & U_8 = 0,58V & \end{array}$$

4.2.2 Messung der Widerstände

Am 30.11.2015 wurde der Gleichstromkreis H_5 aufgebaut und die Spannung an den einzelnen Knoten wurde gemessen.

Durchführung:

Zu Beginn wurde der Gleichstromkreis H_1 , wie er in Abbildung 18 zu finden ist, aufgebaut und das Netzteil auf 5V eingestellt. Danach wurde ein Ende des Multimeters an v_2 angeschlossen. Das andere Ende wurde dann abwechselnd an alle anderen Knoten angeschlossen und die Spannungen wurden gemessen.

Anmerkung: U_i ist die Spannung am jeweiligen Knoten v_i des korrespondierenden Graphen.

Ergebnisse:

Die Potentiale an den jeweiligen Knoten (auf 10mV gerundet):

$$\begin{array}{lll} U'_1 = 5,00V & U'_5 = 0,36V & U'_9 = 2,71V \\ U'_2 = 0,00V & U'_6 = 2,91V & U'_{10} = 1,80V \\ U'_3 = 3,33V & U'_7 = 1,82V & U'_{11} = 0,80V \\ U'_4 = 1,83V & U'_8 = 0,59V & \end{array}$$

Um eine Unterscheidung zwischen den gemessenen und den berechneten Werten vornehmen zu können, werden die gemessenen Potentiale U'_i mit einem Apostroph gekennzeichnet.

4.2.3 Vergleich der Rechen- und Messergebnisse

Auf den ersten Blick scheinen die Ergebnisse der Rechnung weitreichend mit den gemessenen Werten übereinzustimmen. Um einen objektiveren Vergleich zu erhalten, wird nun die relative Messabweichung f (in Prozent) ermittelt. Eine oft verwendete Methode der Berechnung ist folgende [vgl. 10] [vgl. 1, S.24f.] [vgl. 12]:

$$f = \frac{x_a - x_r}{x_r} * 100\%$$

x_r ... „richtiger“ Wert

x_a ... angezeigter Wert

Es stellt keineswegs eine eindeutig zu beantwortende Frage dar, ob der berechnete oder der gemessene Wert der Potenziale den „richtigen“ Wert darstellt. Da aber eine Entscheidung getroffen werden muss, werden hier die berechneten Werte als „richtige“ Werte angesehen. In die obige Formel eingesetzt, erhält man:

$$f_i = \frac{U_i - U'_i}{U'_i} * 100\%$$

Die relativen Messabweichungen der verschiedenen Potenziale lauten also:

$$\begin{aligned} f_5 = f_7 = f_{10} = f_{11} &= 0\% & f_6 &= 0,69\% \\ f_3 &= 0,6\% & f_8 &= 1,7\% \\ f_4 &= 0,55\% & f_9 &= 0,37\% \end{aligned}$$

Anmerkung: Eine Messabweichung für U_1 und U_2 macht keinen Sinn, da diese Werte sowohl bei der Messung, als auch bei der Rechnung bereits im Vorhinein bekannt sind.

Um einen Wert zu erhalten, der die Messabweichung aller Potenziale umfasst, wird einfach das arithmetische Mittel verwendet:

$$\bar{f} = \frac{1}{8} \sum_{i=3}^{11} f_i = 0,49\%$$

Das Mittel aller Messabweichungen beläuft sich also auf nicht einmal einen halben Prozent. Interessant ist, dass die relative Messabweichung für keine Spannung negativ ist. Die Messwerte stimmen entweder mit den Rechenwerten überein oder sind leicht größer. Dieser Messfehler ist vermutlich verzeihbar und daher scheint diese Methode geeignet, um die Potenziale in einem Gleichstromkreis zu modellieren.

Resümee

Zusammenfassend ist zu sagen, dass ein großer Teil der Fragen einigermaßen adäquat beantwortet werden konnte. Die Frage nach Bedeutung und Definition, sowie nach dem historischen Hintergrund der Graphentheorie wurde im ersten Teil beantwortet. Dabei kamen keine unerwarteten Schwierigkeiten auf. Einzig das Finden einer geeigneten Software zum Erstellen der Graphen war nicht besonders einfach. Es ließen sich einige Anwendungsbeispiele finden, wobei keine erwähnenswerten Schwierigkeiten aufkamen, passende zu finden. Eher musste darauf geachtet werden, besonders interessante und nicht zu viele Beispiele zu erläutern, um nicht den Rahmen der Arbeit zu übersteigen.

Die Frage, ob die graphentheoretischen Methoden, die in dieser Arbeit vorgestellt werden, um Probleme zu lösen, auch in der Realität angewendet werden, erwies sich als schwierig zu erörtern. Nur teilweise ließen sich eindeutige Antworten darauf finden: Die hier vorgestellte Methode zur Frequenzplanung wird nicht von Mobilfunkbetreibern genutzt, der Dijkstra-Algorithmus hingegen wird in seiner erweiterten Form tatsächlich von Google Maps verwendet, um kürzeste Wege zu finden [vgl. 2] [vgl. 5, S.21].

Bei den anderen beiden Anwendungsbeispielen, dem Ermitteln geeigneter Ampelschaltungen und dem Berechnen der Spannungen eines Gleichstromkreises, stellte es sich als unerwartet schwierig heraus, Literatur zu finden, die eine zufriedenstellende Antwort auf die obige Frage liefert. Aus diesem Grund wurde versucht, durch empirische Verfahren herauszufinden, ob die Realität, also die Ampelschaltung einer Kreuzung bzw. die Spannungen eines Gleichstromkreises, mit den durch Graphentheorie ermittelten Ergebnissen übereinstimmt. Bezüglich der Ampelschaltung ist zu sagen, dass Messung und Ermittlung weitreichend übereinstimmen und vermutlich ähnliche Methoden verwendet werden. Die Spannungen der Messung stimmen sehr genau überein, daher scheint die Methode zur Spannungsberechnung passend, um die Realität zu modellieren.

Ein anfangs geplantes Interview über die Optimierung von Ampelschaltungen wurde nicht durchgeführt. Zunächst war es schwieriger als erwartet eine geeignete Ansprechperson zu finden. Es stellte sich aber ohnehin nach einiger Zeit heraus, dass die Arbeit bereits sehr umfangreich war und ein Interview zwar interessant wäre, aber einerseits vermutlich keine wesentlichen Informationen liefern würde und andererseits wahrscheinlich den Rahmen einer vorwissenschaftlichen Arbeit übersteigen würde.

In dieser Arbeit befindet sich nur ein kleiner Ausschnitt der zahlreichen Anwendungen der Graphentheorie [vgl. 11]. Durch das Lesen der Literatur, auf der diese Arbeit basiert,

erhielt ich den Eindruck, dass es viele Probleme gibt, die durch Einbeziehung von graphentheoretischen Methoden gelöst werden können. Der Ast der Graphentheorie schafft es Sachverhalte, die nicht elegant mit einer Formel beschrieben werden können, in die Sprache der Mathematik zu übersetzen. Es ist die isolierte Untersuchung von Graphen, die einem verhilft Probleme zu lösen, die sich in einen Graphen abstrahieren lassen. Es gibt vieles, das sich in einen Graphen abstrahieren lässt und noch viel mehr, das sich abstrahieren ließe, ist vermutlich noch gar nicht gefunden worden. Ich stehe der Zukunft der Graphentheorie optimistisch gegenüber.

Literaturverzeichnis

- [1] Bergmann Kurt (2000): Elektrische Meßtechnik: Elektrische und elektronische Verfahren, Anlagen und Systeme. Braunschweig/Wiesbaden. Springer-Verlag.
- [2] Cornell University (2011): Google Maps–it’s just one big graph. Online im Internet. URL: <https://blogs.cornell.edu/info2040/2011/09/14/google-maps-its-just-one-big-graph> (Stand: 06.01.2015) (Anonym)
- [3] Diestel, Reinhard (2010): Graphentheorie. Heidelberg: Springer.
- [4] Dorfmayr, Anita (2008): Unterwegs mit Mathematik. Online im Internet. URL: <http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2008%20Band%2041/VortragDorfmayr.pdf> (Stand: 10.12.2014)
- [5] Eisenblätter, Andreas; Grötschel, Martin; Koster, Arie M. C. A. (2002): Frequenzplanung im Mobilfunk. DMV-Mitteilungen 1/2002.
- [6] Häggström, Olle (2006): Streifzüge durch die Wahrscheinlichkeitstheorie. Heidelberg: Springer.
- [7] Krumke, Sven O.; Noltemeier, Hartmut (2012): Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen. Wiesbaden: Springer Vieweg.
- [8] Robertson, Neil; Sanders, Daniel P.; Seymour, Paul; Thomas, Robin (1996): A new proof of the four-colour theorem. Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society, Vol. 2.
- [9] Stewart, Ian (1995): Concepts of modern mathematics. New York: Dover Publications Inc.
- [10] Stölzer, Mathias (2001): Hinweise zur Fehlerrechnung. Online im Internet. URL: <http://www.physik.uni-halle.de/Lehre/Grundpraktikum/gpfehler.htm> (Stand: 08.12.2015)
- [11] Velminski, Wladimir (Hrsg.) (2009): Leonhard Euler. Die Geburt der Graphentheorie. Berlin: Kulturverlag Kadmos.
- [12] Wikipedia: Messabweichung. Online im Internet. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Messabweichung> (Stand: 08.12.2015) (Anonym)

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Ein Graph im graphentheoretischen Sinn (Verfasser)	5
Abbildung 2: Skizze des Stadtplans. Online im Internet. URL: http://www.matheprisma.uni-wuppertal.de/Module/Koenigsb/Biografi/Biogr2.htm (Stand: 11.07.2015) Referenz: Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, Commentarii ac-academiae scientiarum Petropolitanae, 8, (1736) 1741, 128--140, (Opera Omnia, series 1, vol 7, 1--10)	7
Abbildung 3: Beschrifteter Graph von Königsberg (Verfasser)	8
Abbildung 4: Verbildlichung des Versorgerproblems (Verfasser)	12
Abbildung 5: Ein Torus. Online im Internet. URL: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/c/c6/Simple_Torus.svg/1221px-Simple_Torus.svg.png (Stand: 08.12.2015)	13
Abbildung 6: Input & Output Schritt 1 (Verfasser)	15
Abbildung 7: Input & Output Schritt 2 (Verfasser)	16
Abbildung 8: Input & Output Schritt 3 (Verfasser)	16
Abbildung 9: Input & Output Schritt 4 (Verfasser)	17
Abbildung 10: Input & Output Schritt 5 (Verfasser)	18
Abbildung 11: Baum kürzester Wege bezüglich W (Verfasser)	18
Abbildung 12: Beispielgraph G_0 (Verfasser)	22
Abbildung 13: Beispiel einer geeigneten Färbung für G_0 (Verfasser)	23
Abbildung 14: Beispielgraph G_1 (Verfasser)	27
Abbildung 15: p_i für G_1 ($v_a = v_9; v_b = v_{12}$) (Verfasser)	28
Abbildung 16: Der zu G_1 korrespondierende Gleichstromkreis H_1 (Verfasser)	29
Abbildung 17: Beispiel einer Kreuzung K_1 mit Verkehrsströmen (Verfasser)	32
Abbildung 18: Verträglichkeitsgraph F_1 (Verfasser)	33
Abbildung 19: Skizze der Kreuzung B1 Albert-Schweizer-Gasse (Verfasser)	35
Abbildung 20: Verträglichkeitsgraph der Kreuzung B1 Albert-Schweizer-Gasse (Verfasser)	36
Abbildung 21: Gleichstromkreis H_5 (Verfasser)	40

Glossar

adjazent		inzident, inzidieren	9, 15, 27
<i>benachbart</i>	15	Kirchhoffsche Regel.....	25
Algorithmus von Dijkstra	15	Knoten	
Baum		<i>Eck im Sinne der Graphentheorie</i>	8
<i>kreisfreier Graph</i>	15	Leitwert	25
Clique.....	36	o.B.d.A.	
<i>Teilmenge eines Graphen, wobei</i>		<i>ohne Beschränkung der</i>	
<i>alle Knoten paarweise</i>		<i>Allgemeinheit</i>	21, 26
<i>miteinander verbunden sind</i>	23	Ohmsches Gesetz	25
disjunkt		planar	
<i>ohne gemeinsames Element</i>	8	<i>überschneidungsfrei</i>	10, 12
Euler Charakteristik	12	relative Messabweichung	45
Euler, Leonhard	7	Satz der bedingten	
eulersch	9	Wahrscheinlichkeit.....	29
Eulersche Polyederformel.....	10	Sequenz	36, 39
eulerscher Weg	9	Torus.....	13
Färbung	22	trivialer Graph	11
Grad	9, 10, 23	Verträglichkeitsgraph	35
Interferenz		Vier Farben Theorem	22
<i>Überlagerung zweier Wellen</i>	22	ZW	
Interferenzgraph.....	22	<i>Zufallswanderer</i>	27, 28

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich diese vorwissenschaftliche Arbeit eigenständig angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Wien, 23. Jänner 2016

Leonhard Hochfilzer (e.h.)