



Konvergenz und Stetigkeit

Der Zwischenwertsatz

Vorwissenschaftliche Arbeit verfasst von

Daniel Teichert

Klasse 8.a

Betreuer: Professor MMag. Dr. Werner Klöckl

Schuljahr 2014/15

BG/BRG Leoben Neu

8700 Leoben, Moserhofstraße 7a

Diese Arbeit wurde mit TeXworks geschrieben, in Palatino mit Hilfe von [pdfL^AT_EX₂ε](#) und [Biber](#) gesetzt.

Die L^AT_EX Vorlage von Karl Voit basiert auf [KOMA script](#) und steht im Internet zum Download bereit: <https://github.com/novoid/LaTeX-KOMA-template>

Abstract

Für die Analysis, ein großes Teilgebiet der Mathematik, sind Konvergenz und Stetigkeit zwei grundlegende Begriffe, deren Verständnis für eine tiefergehende Beschäftigung mit der Analysis notwendig ist. In dieser vorwissenschaftlichen Arbeit liegt der Fokus auf einer theoretischen Aufarbeitung dieses Gebietes. Anhand von Definitionen, Sätzen und Beispielen im Bereich von Folgen und Funktionen soll dem Leser ein Einblick in die Analysis gewährt werden. Um den Rahmen nicht zu sprengen, hat man sich in dieser Arbeit darauf beschränkt, jene mathematischen Elemente zu erläutern, die notwendig sind, um den Zwischenwertsatz beweisen zu können. Der Zwischenwertsatz gehört zu den wichtigsten Theoremen der Analysis und bietet, auch wenn er trivial erscheinen mag, eine gute Möglichkeit, sich mit der mathematischen Beweistechnik vertraut zu machen. Er sagt aus, dass eine in einem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion mit $f(a) < f(b)$ in diesem Intervall jeden Wert $f(c)$ mit $f(a) < f(c) < f(b)$ mindestens einmal annimmt. Nach einem nachvollzogenen Beweis für diesen Sachverhalt werden zwei Anwendungen des Zwischenwertsatzes geschildert. Ebenso wird anhand der Lebensläufe und Veröffentlichungen dreier Mathematiker auf die geschichtliche Entwicklung dieses Gebietes der Analysis eingegangen.

Vorwort

Schon seit Beginn der Schulzeit war Mathematik eines meiner Lieblingsfächer. Im Laufe der Jahre habe ich mich immer sehr für mathematische Probleme interessiert und auch über den schulischen Bereich hinaus weitere Zeit dafür investiert. Mit der Teilnahme am Mathematik-Olympiade-Kurs an meiner Schule und auch an Gebietswettbewerben wuchs mein Interesse an derartigen Problemstellungen. So war für mich recht schnell klar, dass ich meine vorwissenschaftliche Arbeit zu einem mathematischen Thema schreiben möchte. Herr Professor Dr. Klöckl unterstützte mich bei der Themenfindung und so entschloss ich mich, mich mit Konvergenz und Stetigkeit zu beschäftigen. Da ich nach der Matura Mathematik studieren möchte, war die VWA für mich auch eine willkommene Gelegenheit, diese Art der Mathematik kennenzulernen. Vielmals möchte ich mich bei Ao. Prof. Jörg Thuswaldner vom Institut für Mathematik und Statistik an der Montanuniversität Leoben bedanken, der mich im Zuge meines Praktikums im Sommer 2014 bei ihm sehr unterstützte und mir auch Literatur zur Verfügung stellte. Weiters möchte ich mich bei meiner Familie für die psychologische Unterstützung und zusätzlich bei meinem Vater für wissenschaftliche Tipps und Erfahrungswerte bedanken. Dr. Christian Ganser hat mir bei Fragen zum Programm LaTeX eine große Hilfe erwiesen. Die Beschäftigung mit dieser Art von Mathematik war im letzten Jahr eine sehr spannende und bereichernde Tätigkeit und hat mich angespornt, mich auch weiterhin mit der Mathematik zu beschäftigen. Abschließend möchte ich noch kurz auf eine weit verbreitete Ansicht eingehen: Es ist verständlich, dass die Arbeit eines Mathematikers auf Außenstehende zuweilen eintönig oder gar langweilig wirken mag, aber es gibt kaum etwas Schöneres, als nach stundenlangem Nachdenken, in dem einem wirklich gar nichts mehr logisch erscheint, plötzlich einen Einfall zu bekommen und auf einen Schlag den Sachverhalt zu durchblicken.

Trofaiach, 23.02.2015

Daniel Teichert

Inhaltsverzeichnis

Abstract	3
Vorwort	4
1 Einleitung	6
2 Folgen und Grenzwerte	8
2.1 Konvergenz und Divergenz	9
2.2 Unendliche Reihen und ihre Konvergenzkriterien	11
2.3 Bestimmte Divergenz gegen $\pm\infty$	13
3 Vollständigkeit und Cauchy-Folgen	14
3.1 Satz von Bolzano-Weierstraß	15
4 Funktionen und Stetigkeit	18
4.1 Der Grenzwert bei Funktionen	19
4.2 Stetigkeit	19
5 Sätze über stetige Funktionen	26
5.1 Zwischenwertsatz	26
5.1.1 Beispiel aus der Mathematikolympiade	28
5.1.2 „Norderney-Problem“	30
5.2 Satz über die Annahme des Maximums und Minimums	32
6 Wichtige Mathematiker im Zusammenhang mit dem Zwischenwertsatz	33
6.1 Bernard Bolzano	33
6.2 Augustin Louis Cauchy	35
6.3 Karl Theodor Wilhelm Weierstraß	36
7 Schlussbemerkung	38
Literatur	40

1 Einleitung

Konvergenz und Stetigkeit sind zwei tragende Begriffe der Analysis und stellen das übergeordnete Thema der vorliegenden vorwissenschaftlichen Arbeit dar. Seit dem 19. Jahrhundert, in dem die Analysis einen Aufschwung innerhalb des großen Feldes der Mathematik erlebte, drehen sich zahlreiche Lehrsätze um die beiden zentralen Begriffe: Konvergenz und Stetigkeit. Einer davon ist der sogenannte Zwischenwertsatz, für den im Laufe der Arbeit ein Beweis nachvollzogen werden soll. Auf dem Weg zu diesem Fernziel sind zahlreiche mathematische Begriffe und Vorgangsweisen zu erläutern. Es ist der Anspruch des Autors, sämtliche benötigte Ausdrücke auf mathematisch korrekte Weise herzuleiten oder darzustellen und sachlich zu argumentieren. Dennoch soll auch für mathematisch weniger bewanderte Leser das Thema verständlich präsentiert werden und ein roter Faden erkenntlich sein. Da das Thema, wie schon erwähnt, längst mathematisch sehr bedeutsam ist und demzufolge zahlreiche wissenschaftliche Arbeiten dazu verfasst wurden, sind von dieser vorwissenschaftlichen Arbeit keine neuen Erkenntnisse zu erwarten, vielmehr kann hier von einer literaturgestützten Arbeit gesprochen werden.

Als wichtige Quelle dient das Werk „Analysis 1“ von Otto Forster¹. Darin findet man eine sehr genaue, wissenschaftliche Aufarbeitung der Grundbegriffe der Analysis. Dieses Werk dient dem Verfasser als Nachschlagewerk und geht noch weit über das Thema dieser Arbeit hinaus. Ergänzend fungierte das Buch „Abiturwissen Mathematik“,² das für Schüler als Vorberitung auf das Abitur beziehungsweise die Matura verfasst wurde. Für den abschließenden Teil, der sich mit der geschichtlichen Einordnung des Themas befasst, war das Werk „3000 Jahre Analysis“³ unerlässlich.

Die Arbeit ist dermaßen gegliedert, dass anhand von Definitionen und Lehrsätzen Schritt für Schritt jene Bereiche besprochen werden, die notwendig sind, um anschlie-

¹Otto Forster. *Analysis 1 Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*. 4. Ausgabe. Braunschweig: Vieweg Verlag, 1983.

²Hubert Bossek und Karlheinz Weber, Hrsg. *Abiturwissen Mathematik*. 3. Ausgabe. Mannheim: Duden, 2011.

³Thomas Sonar. *3000 Jahre Analysis*. Berlin: Springer, 2011.

1 Einleitung

ßend einen Beweis des Zwischenwertsatzes nachvollziehen zu können. Der Fokus wird dabei auf Folgen und Reihen, Konvergenz und Divergenz, Funktionen und Stetigkeit liegen. Anhand von Beispielen wird versucht, einen anschaulichen Überblick über diese Begriffe zu geben. Möglicherweise wird es den Leser überraschen, dass der Zwischenwertsatz selbst dann nicht mehr allzu schwer zu verstehen ist und es auch alltägliche Anwendungsbereiche für ihn gibt. Da in der Analysis hauptsächlich Grundlagenforschung betrieben wird, wird dennoch wohl kein praktischer Nutzen aus den Ergebnissen resultieren.

2 Folgen und Grenzwerte

Eine Abbildung der natürlichen Zahlen \mathbb{N} in die reellen Zahlen \mathbb{R} nennt man eine Folge. Als Variable dient üblicherweise $n \in \mathbb{N}$ (sprich Element der natürlichen Zahlen). Für n werden fortlaufend von $n = 0$ ausgehend die natürlichen Zahlen eingesetzt und man erhält ein Folgenglied $a_n \in \mathbb{R}$. Dargestellt wird eine Folge derart: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Beispiele:

1. $a_n = 4 \cdot n$ mit den Folgengliedern: $a_0 = 0, a_1 = 4, a_2 = 8, \dots$

2. $a_n = a$ ergibt eine konstante Folge (a, a, a, a, \dots)

3. $a_n = \frac{1}{n}$ für $n \geq 1$: $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, \dots$

4. $a_n = (-1)^n$: $a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = 1, \dots$ ⁴

Spezielle Folgen sind die arithmetische und die geometrische Folge: Bei arithmetischen Folgen ist der Abstand zwischen zwei Folgengliedern immer gleich groß ($a_{n+1} = a_n + d$), weshalb bei drei aufeinanderfolgenden Folgengliedern das mittlere immer das arithmetische Mittel seiner Nachbarn ist: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$. Das n -te Folgenglied lässt sich mit folgender Formel errechnen: $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

Geometrische Folgen sind jene, bei denen das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder immer gleich ist ($a_{n+1} = a_n \cdot q$). Dementsprechend ist das mittlere von drei aufeinanderfolgenden Folgengliedern das geometrische Mittel der beiden Äußereren: $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$. Das n -te Folgenglied lässt sich mit folgender Formel errechnen: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.⁵

Ein weiterer wichtiger Begriff im Bereich der Folgen ist die Monotonie. Man betrachtet dabei die Folge (a_n) :

⁴vgl. Forster, *Analysis 1 Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*, Seite 18.

⁵vgl. Robert Müller-Fonfara. *Mathematik verständlich*. Ausgabe 2006. München: Bassermann Verlag, 2005, 367ff.

Die Folge heißt monoton steigend, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \leq a_{n+1}$.

Die Folge heißt streng monoton steigend, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n < a_{n+1}$.

Die Folge heißt monoton fallend, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \geq a_{n+1}$.

Die Folge heißt streng monoton fallend, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n > a_{n+1}$.

2.1 Konvergenz und Divergenz

Wenn sich die Werte einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an einen Punkt annähern, spricht man von einer konvergenten Folge. Man nennt die Folge konvergent gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Eine andere Schreibweise dafür lautet $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, falls gilt: $(\forall \epsilon > 0) (\exists N(\epsilon) \in \mathbb{N})$, sodass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq N(\epsilon)$.

Das bedeutet, dass sich ab einem N aus der Menge der natürlichen Zahlen, alle folgenden Glieder der Folge im Bereich $a \pm \epsilon$ befinden. Dies nennt man die ϵ -Umgebung U_ϵ des Grenzwertes a :

Definition 2.1. $U_\epsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \epsilon\} :=]a - \epsilon, a + \epsilon[$

N ist also von ϵ abhängig. Man sagt, dass in der ϵ -Umgebung fast alle Glieder der Folge liegen, wobei in der Mathematik "fast alle" alle bis auf endlich viele bedeutet.

Divergenz ist das Gegenstück zu Konvergenz: Eine Folge ist dann divergent, wenn sie gegen keine reelle Zahl konvergiert.

Von den anfangs genannten Folgen stellen 1. und 4. divergente Folgen dar, 2. und 3. konvergente Folgen.⁶

Beschränktheit ist ein Begriff, der eng mit dem des Grenzwerts verwandt ist.

⁶vgl. Forster, *Analysis 1 Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*, S. 19.

Definition 2.2. Eine Folge heißt nach oben beziehungsweise nach unten "beschränkt", wenn es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $a_n \leq K$ beziehungsweise $a_n \geq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge heißt beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

Wenn man nun konvergente Folgen in Bezug auf Beschränktheit untersucht, ist ersichtlich, dass jede konvergente Folge gleichzeitig eine beschränkte Folge ist. Es ist zu beachten, dass die Umkehrung nicht gegeben ist, siehe Beispiel 4.⁷

Weiters ist die Eindeutigkeit des Limes zu erwähnen: Wenn die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sowohl gegen a als auch gegen a' konvergiert, gilt $a = a'$.

Das bedeutet also, dass jede Folge nur einen Grenzwert haben kann.⁸

Um Folgen auf Konvergenz zu untersuchen, sind einige weitere Eigenschaften wichtig:

Lemma: Summe konvergenter Folgen:

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Dann ist auch die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n = a_n + b_n$ konvergent und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a + b.$$

Anders ausgedrückt:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Beweis: zu zeigen:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a + b$$

Nach der Definition des Grenzwertes gibt es also für die beiden konvergenten Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den Grenzwerten a und b jeweils ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \epsilon$ und $|b_n - b| < \epsilon$ für alle $n \geq N(\epsilon)$. Es gibt also ein N_1 und ein N_2 ab denen alle weiteren Glieder der beiden Folgen in der ϵ -Umgebung ihrer Grenzwerte sind. Da $\epsilon > 0$ vorgegeben ist, ist auch $\frac{\epsilon}{2} > 0$. Seien nun N_1 und N_2 so definiert, dass gilt: $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N_1$ und $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N_2$.

⁷vgl. Forster, *Analysis 1 Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*, S. 20.

⁸vgl. ebd., S. 21.

2 Folgen und Grenzwerte

Nun kann wieder in die ursprüngliche Form eingesetzt werden, siehe Definition oben: $|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ Mithilfe dieser Dreiecksungleichung ist obiges bewiesen.⁹

Ergänzung zur Dreiecksungleichung: Im Bereich der Vektoren wird klar, dass der Betrag der Summe nicht größer als die Summe der Beträge sein kann.

Produkt konvergenter Folgen: Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen reeller Zahlen. Dann ist auch die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent und es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n\right)$.

Hieraus geht hervor: Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen und $\lambda \in \mathbb{R}$, ist auch die Folge $(\lambda \cdot a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent und es gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Auch die Differenz der konvergenten Folgen (a_n) und (b_n) , jeweils mit $n \in \mathbb{N}$, also $(a_n - b_n)$, ist konvergent und es gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Auch der Quotient der konvergenten Folgen a_n und b_n , jeweils mit $n \in \mathbb{N}$, also $\frac{a_n}{b_n}$ mit b_n und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ ist konvergent und es gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$.

Weiters gilt für zwei konvergente Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Anhand des Beispiels der Folgen $a_n = 0$ und $b_n = \frac{1}{n}$, die beide gegen 0 konvergieren, sieht man, dass für $a_n < b_n$ nicht notwendigerweise $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ gilt.

Ein kleiner Zusatz dazu: Für die konvergente Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $A \leq a_n \leq B$ für alle n gilt auch: $A \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq B$.¹⁰

2.2 Unendliche Reihen und ihre Konvergenzkriterien

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge

$$s_n := \sum_{k=0}^n a_k, n \in \mathbb{N}$$

⁹vgl. Forster, *Analysis 1 Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*, S. 21.

¹⁰vgl. ebd., S. 22f.

der Partialsummen heißt (unendliche) Reihe und wird mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

bezeichnet, was gleichzeitig den Grenzwert darstellt, wenn $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

\sum ist das sogenannte Summenzeichen, es werden alle a_k addiert von $k = 0$ bis n , beziehungsweise ∞ .

Weiters kann jede beliebige Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch als Reihe dargestellt werden.

$$c_n = c_0 + \sum_{k=1}^n (c_k - c_{k-1}), n \in \mathbb{N}$$

Obige Gleichung stellt diesen Zusammenhang dar.¹¹

Wenn (a_k) eine arithmetische, beziehungsweise geometrische Folge ist, so nennt man $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ arithmetische, beziehungsweise geometrische Reihe.¹²

Wie Folgen können auch unendliche Reihen gegen eine Grenzwert konvergieren. Dafür müssen einige Konvergenzkriterien erfüllt sein, von denen manche im Anschluss besprochen werden:

Satz 2.1. *Allgemeines Cauchysches Konvergenzkriterium: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \epsilon$ für alle $n \geq m \geq N$.*

Dieser Satz bedeutet, dass bei einer konvergenten Reihe die Teilsumme zwischen dem m -ten und dem n -ten Folgenglied ab einem bestimmten N kleiner als ϵ ist.¹³

Satz 2.2. *Eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für die Konvergenz einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.*

Die Aussage dieses Satzes erscheint klar, da die Summe nur konvergieren kann, wenn ihre Summanden, also die Folgenglieder gegen 0 gehen.¹⁴

¹¹vgl. Forster, *Analysis 1 Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*, S. 23f.

¹²vgl. Bossek und Weber, *Abiturwissen Mathematik*, S. 122.

¹³vgl. Forster, *Analysis 1 Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*, S. 37.

¹⁴vgl. ebd., S. 38.

Definition 2.3. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ heißt Majorante (beziehungsweise Minorante) der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sofern für fast alle Glieder gilt: $a_n \leq b_n$ (beziehungsweise: $a_n \geq b_n$).

Satz 2.3. Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit nicht-negativen Folgengliedern konvergiert, wenn für sie eine konvergente Majorante existiert, sie divergiert hingegen, wenn es zu ihr eine divergente Minorante gibt.

Auch dieses Argument ist schlüssig, da die Reihe an ihre Majorante, beziehungsweise die Minorante an ihre Reihe gebunden ist.¹⁵

2.3 Bestimmte Divergenz gegen $\pm\infty$

Definition 2.4. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt bestimmt divergent gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$), wenn es zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $a_n > K$ (bzw. $a_n < K$) für alle $n \geq N$. Schreibweise: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ (bzw. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$). Statt bestimmt divergent sagt man auch uneigentlich konvergent.

Beispiele:

Die Folge $a_n = 4n$ $n \in \mathbb{N}$ divergiert bestimmt gegen $+\infty$.

Die Folge $a_n = -2^n$ $n \in \mathbb{N}$ divergiert bestimmt gegen $-\infty$.

Die Folge $a_n = (-1)^n$ $n \in \mathbb{N}$ divergiert zwar, aber nicht bestimmt gegen $+\infty$ oder $-\infty$.

Für die gegen $+\infty$ oder $-\infty$ divergente Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ und die Folge $(\frac{1}{a_n})_{n \geq n_0}$ ist konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Ist jedoch für eine Folge positiver (oder negativer) reeller Zahlen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, divergiert die Folge $(\frac{1}{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$ bestimmt gegen $+\infty$ (oder $-\infty$).¹⁶

¹⁵vgl. Bossek und Weber, *Abiturwissen Mathematik*, S. 121.

¹⁶vgl. Forster, *Analysis 1 Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*, S. 25f.

3 Vollständigkeit und Cauchy-Folgen

In der Mathematik gibt es verschiedene Mengen:

Die natürlichen Zahlen \mathbb{N} vereinen je nach Definition alle ganzen Zahlen ≥ 0 oder > 0 . In diesem Zahlenbereich sind jedoch nur Addition und Multiplikation uneingeschränkt möglich. Um auch uneingeschränkt subtrahieren zu können, beziehungsweise mit Zahlen ≤ 0 rechnen zu können, ist die Menge der ganzen Zahlen \mathbb{Z} von Nöten. Dieser Zahlenbereich umfasst nun alle ganzen Zahlen inklusive 0. Divisionen sind in \mathbb{Z} nur durch Teiler der Zahl möglich. Um eine Division mit zwei beliebigen ganzen Zahlen durchzuführen, braucht man dafür die Menge der rationalen, also mit einem Bruch $\frac{a}{b}$ darstellbaren, Zahlen \mathbb{Q} . Aber auch mit dieser Menge sind noch nicht alle Zahlen abgedeckt, so gehören zum Beispiel die Quadratwurzel von 2, $\sqrt{2}$, oder auch π nicht zu den rationalen Zahlen. Sie sind erst in den reellen Zahlen \mathbb{R} , welche die rationalen und die irrationalen Zahlen vereinigen, enthalten. Die alle vorherigen einschließende Zahlenmenge ist jene der komplexen Zahlen \mathbb{C} , bei denen die imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$ verwendet wird. In \mathbb{C} werden beispielsweise quadratische Gleichungen wie

$$x^2 + 4 = 0 \tag{3.1}$$

gelöst:

$$x = \sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2 \cdot i \tag{3.2}$$

Um nun das Vollständigkeitsaxiom anzuführen, welches die Existenz der irrationalen Zahlen beweist, ist der Begriff der Cauchy-Folgen zu klären.

Definition 3.1. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt Cauchy-Folge, wenn gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a_m| < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$.

Das heißt also, dass es bei jedem auch noch so kleinen ϵ ein Folgenglied $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle weiteren n, m der Abstand kleiner als ϵ ist. Bei kleinem ϵ müssen dementsprechend auch die Abstände der Folgenglieder sehr klein sein. Es erscheint

plausibel, dass eine Cauchy-Folge somit eine konvergente Folge ist. In der Definition der Cauchy-Folgen kommt jedoch der Begriff des Grenzwertes nicht vor.

Satz 3.1. *Jede konvergente Folge reeller Zahlen ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis: Die Folge (a_n) konvergiere gegen ihren Grenzwert a . Dann gibt es zu vorgegebenem $\epsilon \geq 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N$.

Für alle $n, m \geq N$ gilt dann:

$|a_n - a_m| = |(a_n - a) - (a_m - a)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, q.e.d.(quod erat demonstrandum= was zu beweisen war)¹⁷

Das Vollständigkeitsaxiom ist nun eigentlich die Umkehrung des Satzes: In \mathbb{R} konvergiert jede Cauchy-Folge.

Das Besondere hierbei ist, dass in der Definition der Cauchy-Folgen der Grenzwert keine Rolle spielt. Mithilfe des Vollständigkeitsaxioms wird aber die Existenz eines Grenzwertes garantiert. Aus dem Vollständigkeitsaxiom kann man unter anderem folgern, dass jeder unendliche Dezimalbruch, eine irrationale Zahl, gegen eine reelle Zahl konvergiert.¹⁸

Man kann sich eine Cauchy-Folge als eine Folge zusammengeschnittener Intervalle $[a_n, a_m]$ vorstellen. Die Längen dieser Intervalle konvergieren gegen Null, weshalb sich ein Grenzwert ergeben muss.

3.1 Satz von Bolzano-Weierstraß

Dieser Satz betrifft das Verhalten von Teilfolgen innerhalb beschränkter Folgen reeller Zahlen. Daher ist es nun wichtig zu wissen, was eine Teilfolge ist:

Definition 3.2. *Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge und $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$ Teilfolge der Folge (a_n) .*

¹⁷vgl. Forster, *Analysis 1 Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*, S. 28.

¹⁸vgl. ebd., S. 28f.

3 Vollständigkeit und Cauchy-Folgen

Eine Teilfolge enthält also nicht notwendigerweise alle Glieder der ursprünglichen Folge, aber jedes Teilfolgenglied ist auch Glied der vorherigen Folge. Unmittelbar aus der Definition ergibt sich: Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit dem Limes a , so konvergiert auch jede Teilfolge gegen a .

Satz 3.2. *Satz von Bolzano-Weierstraß: Jede beschränkte Folge (a_n) reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Der Satz von Bolzano-Weierstraß sagt also aus, dass eine Folge nicht konvergent, sondern nur beschränkt sein muss, um eine Teilfolge zu besitzen, die konvergiert.¹⁹ Für die beschränkte Folge $a_n = (-1)^n$ würde eine konvergente Teilfolge zum Beispiel nur aus geraden n bestehen.

Satz 3.3. *Jede beschränkte monotone Folge (a_n) reeller Zahlen konvergiert.*

Eine nur monotone Folge kann beliebig steigen, beziehungsweise fallen, ohne an Grenzen gebunden zu sein. Eine nur beschränkte Folge ist zwar räumlich begrenzt, kann aber innerhalb der Schranken ohne Hinderung divergieren. Treffen nun beide Eigenschaften auf eine Folge zu, steigt (oder fällt) sie immer weiter und nähert sich so einer ihrer Schranken an.²⁰

Beweis: Sei a_n unsere beschränkte monotone Folge. Nach Bolzano-Weierstraß existiert für sie eine gegen a konvergente Teilfolge a_{n_k} . Aufgrund der Eindeutigkeit des Limes muss, wenn a_n konvergiert, der Grenzwert ebenfalls a sein. Dies muss nun bewiesen werden:

$$\text{Da } a_{n_k} \rightarrow a : (\forall \epsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \geq k_0) : |a_{n_k} - a| < \epsilon$$

O.B.d.A.(=Ohne Beschränkung der Allgemeinheit): $0 < a - a_{n_k} < \epsilon$ Dann gilt:

$$\forall n \geq n_k : a_n \leq a \text{ und } a_{n_k} \leq a_n$$

¹⁹vgl. Forster, *Analysis 1 Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*, Seite 31.

²⁰vgl. ebd., Seite 33.

3 Vollständigkeit und Cauchy-Folgen

also

$$a_{n_k} \leq a_n \leq a \quad | \cdot (-1) \tag{3.3}$$

$$-a_{n_k} \geq -a_n \geq -a \quad | +a \tag{3.4}$$

$$\epsilon \geq a - a_{n_k} \geq a - a_n \geq 0 \tag{3.5}$$

$\Rightarrow 0 \leq a - a_n \leq \epsilon \Rightarrow |a - a_n| \leq \epsilon$, q.e.d.

4 Funktionen und Stetigkeit

Funktionen, auch in der Schulmathematik ein zentrales Thema, sind ein weiterer wichtiger Baustein der Analysis.

Definition 4.1. Sei D eine Teilmenge von \mathbb{R} . Unter einer reellwertigen (reellen) Funktion auf D versteht man eine Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Die Menge D heißt Definitionsbereich von f . Der Graph von f ist die Menge $\Gamma_f = \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$ ²¹

Definition 4.2. Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen und $\lambda \in \mathbb{N}$. Dann sind die Funktionen

$$f + g : D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\lambda \cdot f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \cdot g : D \rightarrow \mathbb{R}$$

definiert durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$
²²

Äquivalent zur Monotonie bei Folgen existiert auch bei Funktionen der Begriff der Monotonie (siehe Kapitel Folgen und Grenzwerte).

²¹Forster, *Analysis 1 Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*, S. 57.

²²Ebd., S. 59.

4.1 Der Grenzwert bei Funktionen

Auch bei Funktionen existiert der Begriff des Grenzwertes:

Einerseits kann man bei Funktionen den Grenzwert von $n \rightarrow \infty$ berechnen, andererseits auch den Grenzwert gegen eine bestimmte Zahl, zum Beispiel a . $\lim_{x \rightarrow \infty}$ der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ beträgt eindeutig 0. $\lim_{x \rightarrow 1}$ von $f(x) = \frac{1}{x}$ hingegen ist 1.

Für die nachfolgende Stetigkeit ist der Grenzwert $x \rightarrow a$ eher von Bedeutung.

Definition 4.3. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion auf $D \subset \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ ein Punkt derart, dass es mindestens eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, a_n \in D$, gibt mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Man schreibt

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c,$$

falls für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in D$, mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c.^{23}$$

Der Punkt a liegt auf der x -Achse, während c sein zugehöriger Funktionswert ist. Daneben ist a_n beziehungsweise x_n eine gegen a konvergente Folge, während $f(x_n)$ sozusagen die Folge auf der y -Achse beschreibt. Sie konvergiert entsprechend gegen c . Lässt man nun für die Funktion $f(x)$ x gegen a laufen, ist c der Grenzwert.

4.2 Stetigkeit

Der Begriff der Stetigkeit ist von eklatanter Bedeutung in der Analysis und auch für den Zwischenwertsatz unerlässlich.

Umgangssprachlich wird eine Funktion als stetig bezeichnet, wenn sie ohne Absetzen gezeichnet werden kann. Fachlich genügt dies selbstverständlich nicht als Definition.

Es gibt zwei üblicherweise verwendete Definitionen für die Stetigkeit:

²³vgl. Forster, *Analysis 1 Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*, S. 60.

Definition 4.4. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$. Die Funktion heißt stetig im Punkt a , falls

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (4.1)$$

Dies bedeutet, dass man bei jenem Punkt a , in dem man die Stetigkeit der Funktion überprüfen will, den Grenzwert der Funktion gegen a ermittelt. Wenn der Grenzwert gleich dem Funktionswert ist, ist f in a stetig.²⁴

Definition 4.5. Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt a , falls gilt: für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ sodass für jedes $x \in D$ gilt: $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$

oder: $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Diese Definition sagt aus: Wenn f in a stetig ist und die x -Werte in einer δ -Umgebung von a bleiben, dann bleiben auch die Funktionswerte in einer ϵ -Umgebung von $f(a)$.

Für beide Definitionen gilt: Eine Funktion heißt stetig in ihrer Definitionsmenge D , falls die Funktion in jedem Punkt von D stetig ist.

Beide Definitionen bedeuten das Gleiche und man kann, wie nun folgt, aus der einen die andere herleiten:

Definition 4.5.) \Rightarrow 4.4.)

Sei (x_n) eine beliebige Folge mit $x_n \rightarrow a$

z.z.: $f(x_n) \rightarrow f(a)$ (ist gleichbedeutend mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$).

d.h. z.z.: $(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) : |f(x_n) - f(a)| < \epsilon$.

Sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben.

Wegen 4.5) gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0 : |x_n - a| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(a)| < \epsilon$.

Wegen $x_n \rightarrow a$ gibt es ein $n_0 : \forall n \geq n_0 : |x_n - a| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(a)| < \epsilon$, q.e.d.

²⁴vgl. Forster, *Analysis 1 Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*, S. 62.

4 Funktionen und Stetigkeit

Der Beweis in Gegenrichtung 4.4.) \Rightarrow 4.5.)

Hier wird mit einem sogenannten Widerspruchsbeweis gearbeitet: Man nimmt an, dass Definition 4.5.) nicht zutrifft. Man negiert also Definition 4.5.) und versucht, dies dann zu einem Widerspruch mit Definition 4.4.) zu führen. Definition 4.5.) sagt bekanntermaßen aus, dass es für jedes $\epsilon > 0$ mindestens ein $\delta > 0$ gibt, sodass wenn für $x \in D$ $|x - a| < \delta$ gilt, auch $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ gilt. Das mathematische Gegenteil davon, die Negierung, sagt nun aus, dass es zumindest ein ϵ gibt, sodass für jedes beliebige δ ein $x \in D$ existiert, wobei nach $|x - a| < \delta$ **nicht** $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ gilt.

In mathematischer Schreibweise sieht die negierte Aussage also folgendermaßen aus:

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D) : |x - a| < \delta \text{ und } |f(x) - f(a)| \geq \epsilon$$

Widerspruchsbeweis:

$$\text{Angenommen : } (\exists \epsilon^* > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D) : |x - a| < \delta \text{ und } |f(x) - f(a)| \geq \epsilon^*$$

Wir haben nun ein positives ϵ ($= \epsilon^*$) festgelegt, für das aus beliebiger δ -Umgebung immer ein x_n mit $|x_n - a| < \delta$ und $|f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon^*$ existiert. Zu jedem $\delta = \frac{1}{n}$ gibt es also ein x_n , sodass sowohl $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ als auch $|f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon^*$ gilt. Damit konvergiert die Folge (x_n) gegen a , die Folge $f(x_n)$ jedoch nicht gegen $f(a)$. Dies steht im Widerspruch zur Definition 4.4).

Mithilfe der Definitionen kann man nun überprüfen, ob eine Funktion an einer Stelle, beziehungsweise im gesamten Definitionsbereich stetig ist.

Beispiel 1: Beweise, dass $f(x) = 2x$, $D = \mathbb{R}$, an der Stelle $x = 1$ stetig ist.

D.h.: (Das heißt) z.z. (=zu zeigen):

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) : |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(1)| < \epsilon.$$

Man könnte nun verschiedene ϵ und x verwenden und jeweils ohne Schwierigkeiten durch Ausrechnen ein passendes δ für diesen Fall zu finden: Sei zum Beispiel $\epsilon = 0,2$ dann ist $|2x - 2| < 0,2$ erfüllt für $x = 0,95$ woraus folgt: $|0,95 - 1| <$

4 Funktionen und Stetigkeit

$0, 1 = \delta$. Um jedoch für alle ϵ die Existenz eines passenden δ zu beweisen, muss ein allgemeingültiger Zusammenhang zwischen ϵ und δ gefunden werden.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, dann gilt für jedes $x \in U_\delta(a = 1)$:
 $|f(x) - f(1)| = |2x - 2| = |2(x - 1)| = 2|x - 1| < 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, q.e.d.

Beispiel 2: Beweise, $f(x) = 5x, D = \mathbb{R}$, ist stetig im ganzen Definitionsbereich.

D.h.: z.z.:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Um für den gesamten Funktionsbereich die Stetigkeit zu beweisen, wird an der allgemeinen Stelle a gearbeitet.

Beweis: Seien $a \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta = \frac{\epsilon}{5}$, dann gilt für jedes $x \in U_\delta(a)$:
 $|f(x) - f(a)| = |5x - 5a| = 5|x - a| < 5\frac{\epsilon}{5} = \epsilon$, q.e.d.

Beispiel 3: Beweise $f(x) = 5x + 2, D = \mathbb{R}$, ist stetig im ganzen Definitionsbereich.

D.h.: z.z.:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Bei diesem Beispiel wird die zu untersuchende Funktion einfach um 2 Einheiten auf der y -Achse nach oben versetzt. Dies hat aber klarerweise keinen Einfluss auf die Stetigkeit einer Funktion. Dementsprechend ergeben sich auch keinerlei

Pobleme: Seien $a \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta = \frac{\epsilon}{5}$, dann gilt für jedes $x \in U_\delta(a)$:
 $|f(x) - f(a)| = |5x + 2 - (5a + 2)| = |5x + 2 - 5a - 2| = |5x - 5a| = 5|x - a| < 5\frac{\epsilon}{5} = \epsilon$, q.e.d.

Beispiel 4: Beweise, $f(x) = x^2, D = \mathbb{R}$, ist stetig im ganzen Definitionsbereich.

$$D.h.: z.z.: (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Hier kann man nun ähnlich wie beim obigen Beispiel vorgehen. Jedoch ergibt sich nach

4 Funktionen und Stetigkeit

$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |(x+a)(x-a)| = |(x+a)||x-a| < \epsilon \Rightarrow |x-a| < \frac{\epsilon}{|x+a|} = \delta$ ein Problem, da δ von x abhängig ist. Nach der Vorgabe soll aber nur die Existenz eines δ nachgewiesen werden, welches von x unabhängig ist. Man kann sich damit behelfen, dass man nur x -Werte aus einer bestimmten Umgebung von a verwendet:

O.B.d.A.: Sei $\delta \leq 1$. Das heißt: $x \in [a-1, a+1]$,

Nimmt man nun für x den größtmöglichen Wert $a+1$ an, erhält man jetzt also $|x-a| < \frac{\epsilon}{2|a|+1} = \delta$. Dieses δ ist nun nicht mehr von x abhängig und genügt damit den Ansprüchen. Dieser "Trick" ist möglich, da es genügt, ein beliebiges δ nachzuweisen. Sozusagen haben wir uns sogar auf einen kleinen Bereich spezialisiert. Es ist zu beachten, dass bei einem groß gewählten ϵ $\delta \geq 1$ sein kann.

Formale Rechnung: Seien $a \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Man wähle $\delta = \min\{\frac{\epsilon}{2|a|+1}, 1\}$ womit $x \in]a-1, a+1[$ gewährleistet ist. Für jedes $x \in U_\delta(a)$ gilt nun $|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |(x+a) \cdot (x-a)| = |x+a| \cdot |x-a| \leq (|x| + |a|) \cdot |x-a| \leq (|a| + 1 + |a|) \cdot |x-a| = (2|a| + 1) \cdot |x-a| < (2|a| + 1) \cdot \delta \leq (2|a| + 1) \cdot \frac{\epsilon}{2|a|+1} = \epsilon$.

Der Ausdruck „Man wähle $\delta = \min\{\frac{\epsilon}{2|a|+1}, 1\}$ “ bedeutet, dass aus den angegebenen zwei Elementen das kleinere Element für δ verwendet werden soll. $\delta = 1$ ist sozusagen die obere Schranke.

Beispiel 5: Beweise, $f(x) = x^2 - 3, D = \mathbb{R}$ ist stetig im ganzen Definitionsbereich.

D.h.: z.z.: $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$

Dieses Beispiel zeigt dieselbe Kurve wie Beispiel 4, hier ist sie nur um 3 Einheiten auf der y -Achse nach unten versetzt. Dementsprechend erfolgt der Beweis auf gleiche Weise wie im vorangegangenen Beispiel: Seien $a \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Man wähle $\delta = \min\{\frac{\epsilon}{2|a|+1}, 1\}$ womit $x \in [a-1, a+1]$ gewährleistet ist. Für jedes $x \in U_\delta(a)$ gilt nun $|f(x) - f(a)| = |x^2 - 3 - (a^2 - 3)| = |x^2 - 3 - a^2 + 3| = |x^2 - a^2| = |(x+a) \cdot (x-a)| = |x+a| \cdot |x-a| \leq (|x| + |a|) \cdot |x-a| \leq (|a| + 1 + |a|) \cdot |x-a| = (2|a| + 1) \cdot |x-a| < (2|a| + 1) \cdot \delta \leq (2|a| + 1) \cdot \frac{\epsilon}{2|a|+1} = \epsilon$, q.e.d.

Möchte man bei einer Funktion die Unstetigkeit beweisen, kann man dies mithilfe der Negierung der Stetigkeit (siehe oben) tun:

Beispiel 6: Beweise, dass die Vorzeichenfunktion $\operatorname{sgn}(x)$ $\left\{ \begin{array}{l} -1 \text{ für } x < 0 \\ 0 \text{ für } x = 0 \\ +1 \text{ für } x > 0 \end{array} \right.$ unstetig

an der Stelle $x = 0$ ist.

z. z.: $(\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D) : |x - 0| < \delta$ und $|f(x) - f(0)| \geq \epsilon$. Um die Unstetigkeit an der Stelle $x = 0$ zu beweisen, reicht es, ein ϵ zu finden, für das Obiges zutrifft.

Sei $0 < \epsilon < 1$, zum Beispiel: $\epsilon = 0.1$ und $\delta > 0$ beliebig. Nun gilt: $\exists x \in D : |x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - 0| \geq 0.1$, da sich δ nur $x = 0$ annähern darf, weshalb $f(x)$ immer 1 oder -1 jedoch nie 0 sein wird.

Allgemein kann man zu stetigen Funktionen festhalten:

Satz 4.1. Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, die in $a \in D$ stetig sind und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen:

$f + g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \cdot f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f \cdot g : D \rightarrow \mathbb{R}$, im Punkt a stetig.

Ist $g(a) \neq 0$, so ist auch die Funktion $\frac{f}{g} : D' \rightarrow \mathbb{R}$ in a stetig. Dabei ist $D' = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$.²⁵

Weiters sind auch konstante Funktionen, die identische Abbildung $f(x) = x$ sowie jegliche Exponentialfunktionen in jedem Punkt stetig.²⁶

Daraus ergibt sich auch, dass sämtliche Polynomfunktionen stetig sind, da sie Summen und Produkte stetiger Funktionen sind.

Damit kann man auch die Stetigkeit jener Funktionen, die oben exemplarisch gerechnet wurden, erklären: $f(x) = 2x$ ist das Produkt der konstanten Funktion

²⁵vgl. Forster, *Analysis 1 Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*, S. 62.

²⁶vgl. ebd., S. 62.

4 Funktionen und Stetigkeit

$f_1(x) = 2$ und der identischen Abbildung $f_2(x) = x$. $f(x) = x^2$ ist das Produkt der identischen Abbildung mit sich selbst.

Genauso sind auch alle trigonometrischen Funktionen, alle rationalen Funktionen sowie $f(x) = \sqrt{x}$ mit $x > 0$ innerhalb ihres Definitionsbereiches stetig.²⁷

Hier sieht man die Problematik der ungenauen Erklärung der Stetigkeit, da beispielsweise $f(x) = \frac{1}{x}$ oder auch jede andere gebrochene rationale Funktion in ihrem Definitionsbereich stetig ist, aber eben nicht ohne Abzusetzen gezeichnet werden kann.

²⁷vgl. Richard Hunt. *Calculus with Analytic Geometry*. New York: Harper & Row, 1988, S. 161.

5 Sätze über stetige Funktionen

Es gibt einige Sätze, die das Verhalten stetiger Funktionen in abgeschlossenen Intervallen beschreiben. Einer der wichtigsten von ihnen ist der untenstehende Zwischenwertsatz, beziehungsweise sein Spezialfall, der Nullstellensatz. In der Folge wird ein Beweis des Nullstellensatzes ausgeführt werden.

Bemerkung: Das Intervall $[a, b]$ heißt abgeschlossen und inkludiert alle x mit $a \leq x \leq b$. Im Gegensatz dazu heißt das Intervall $]a, b[$ offen und beinhaltet alle x mit $a < x < b$.

5.1 Zwischenwertsatz

Satz 5.1. *Seien die Punkte $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < f(b)$ gegeben, so gibt es für jedes L mit $f(a) < L < f(b)$ mindestens einen Punkt $c \in]a, b[$ mit $f(c) = L$.*

Eine spezielle Variante des Zwischenwertsatzes ist der Nullstellensatz von Bolzano:²⁸

Satz 5.2. *Seien die Punkte $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ gegeben, so gibt es mindestens einen Punkt $c \in]a, b[$ mit $f(c) = 0$.*

Da der Nullstellensatz ein Spezialfall des allgemeinen Zwischenwertsatzes ist, ist ein Beweis des Zwischenwertsatzes auch gleichzeitig der Beweis des Nullstellensatzes. Aber durch den Beweis des Nullstellensatzes, ist auch der Zwischenwertsatz bewiesen, da für den beliebigen Wert $L \neq 0$ die neue Funktion $g(x) := f(x) - L$ gebildet werden kann. Die Aussage des Satzes ist eindeutig und würde wohl von jedem ohne mathematischen Beweis akzeptiert werden. Dennoch ist selbiger für die Mathematik notwendig.

²⁸vgl. Bossek und Weber, *Abiturwissen Mathematik*, S. 128.

Beweis des Nullstellensatzes:

Z.z.: $\exists c \in]a, b[: f(c) = 0$.

Wir nehmen uns ein Intervall $[a, b]$ aus dem Definitionsbereich der Folge heraus, um innerhalb dieses Intervalls den Nullstellensatz zu beweisen. Es muss also die Existenz mindestens einer Nullstelle der Funktion innerhalb unseres Intervalles nachgewiesen werden. Ein nützliches Verfahren dafür ist die Intervall-Halbierungsmethode. Dabei konstruieren wir induktiv, beziehungsweise rekursiv eine Folge von Intervallen $[a_n, b_n] \subset [a, b]$. (Bemerkung: $x \subset y$ bedeutet, x ist Teilmenge von y). Definieren wir nun drei Eigenschaften dieser beiden Folgen: Für jedes Intervall $[a_n, b_n]$ gilt:

1. $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$ für $n \geq 1$,

2. $b_n - a_n = 2^{-n}(b - a)$,

3. $f(a_n) \leq 0, f(b_n) \geq 0$.

1. bedeutet, dass jedes Intervall ab $[a_1, b_1]$ ein Teilintervall von $[a_{n-1}, b_{n-1}]$, also jenem Intervall ist, welches es selbst halbiert, was impliziert, dass $[a_n, b_n]$ auch ein Teilintervall von $[a, b]$ ist.

2. sagt aus, dass die Länge des Intervalls $\frac{1}{2^n} = 2^{-n}$ mal der Länge des Anfangsintervalls beträgt. Beispielsweise hat also $[a_1, b_1]$ die Länge $\frac{1}{2} \cdot [a, b]$ oder $[a_3, b_3]$ die Länge $\frac{1}{8} \cdot [a, b]$. Es ist klar, dass die Folgenglieder und somit die Längen der Intervalle angesichts des Grenzwertes dieser Folge auf ein Minimum schrumpfen müssen.

3. legt fest, dass das jeweilige folgende Intervall immer so gewählt werden muss, dass $f(a) \leq 0$ und $f(b) \geq 0$ gilt.²⁹

Sei das Anfangsintervall $[a_0, b_0] = [a, b]$ und gelte: aus $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ ergibt sich $[a_n, b_n]$. Wir bestimmen nun von unserem Anfangsintervall ausgehend das Intervall $[a_1, b_1]$, indem wir den Mittelpunkt $m_1 = \frac{(a_0+b_0)}{2}$ ermitteln. Nun muss zwischen zwei Fällen unterschieden werden: 1.: $f(m_1) > 0 \rightarrow [a_1, b_1] = [a_0, m_1]$ 2.: $f(m_1) \leq 0 \rightarrow [a_1, b_1] = [m_1, b_0]$. Dies ist sozusagen der Induktionsanfang der Konstruktion unserer Intervall-Folge. Dementsprechend sieht der Induktionsschritt folgendermaßen aus, dass

²⁹vgl. Forster, *Analysis 1 Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*, S. 66.

von einem beliebigen Intervall $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ aus das nachfolgende Intervall $[a_n, b_n]$ erschlossen wird: $m_n = \frac{(a_{n-1} + b_{n-1})}{2}$ wiederum wird unterschieden: 1. $f(m_n) > 0 \rightarrow [a_n, b_n] = [a_{n-1}, m_n]$ 2. $f(m_n) \leq 0 \rightarrow [a_n, b_n] = [m_n, b_{n-1}]$. Man erhält nun also immer ein Intervall, das halb so groß ist wie das vorherige, wobei einer der beiden Endpunkte gleich bleibt und der andere der Mittelpunkt des vorherigen Intervalls ist. Stellt man sich diesen Vorgang auf der x -Achse eines Koordinatensystems vor, nähert sich also immer entweder das linke oder das rechte Ende des Intervalls dem jeweilig anderen an. Es entstehen sozusagen zwei Folgen (a_n) und (b_n) , die die Stelle des linken und rechten Ende des betrachteten Intervall angeben. Als Resultat unserer Methode ergibt sich, dass (a_n) monoton steigend sein muss und (b_n) hingegen monoton fallend. Aufgrund der Tatsache, dass immer nur ein Intervallende verändert wird, ist keine strenge Monotonie gegeben. Aufgrund der Eigenschaften 1. und 3. sowie der Stetigkeit liegt für die Folgen auch eine Beschränktheit vor. Nach **Satz 2.3** sind beide Folgen also konvergent. Durch Eigenschaft 2., welche die Intervalllänge definiert, muss demnach der Grenzwert von a_n und b_n ident sein.

Das heißt $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = c$. Aufgrund der Stetigkeit von f kann folgendermaßen geschrieben werden: $f(c) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$. Auf die gleiche Weise kann für $f(b_n)$ argumentiert werden: $f(c) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$. Wegen Eigenschaft 3. muss auch $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0$, woraus $f(c) = 0$ folgt, q.e.d.

5.1.1 Beispiel aus der Mathematikolympiade

Am 1. April 2014 fand in Leibnitz, Steiermark, der Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene der 45. österreichischen Mathematikolympiade statt. Unter den Beispielen war auch das folgende:

Für einen Punkt P im Inneren des Dreiecks $\triangle ABC$ seien D , E und F die Schnittpunkte der Ecktransversalen mit den Gegenseiten, also D der Schnittpunkt der Verlängerung von AP mit BC , E der Schnittpunkt der Verlängerung von BP mit AC und F der Schnittpunkt der Verlängerung von CP mit AB . Weiters seien Q und R die Schnittpunkte der Parallelen zu AB durch P mit den Seiten AC bzw. BC (in

5 Sätze über stetige Funktionen

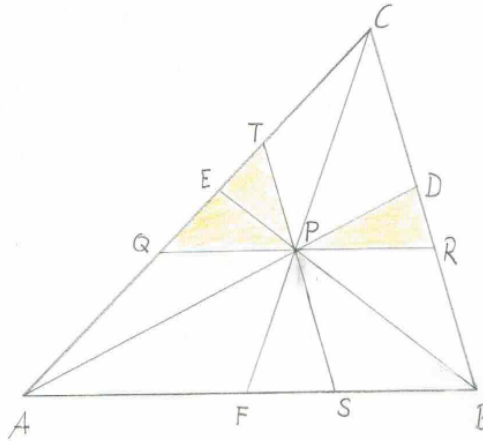


Abbildung 5.1: Skizze nach der Angabe, eigenhändig erstellt

dieser Reihenfolge). Analog seien S und T die Schnittpunkte der Parallelen zu BC durch P mit den Seiten AB bzw. AC (in dieser Reihenfolge).

In einem gegebenen Dreieck ABC bestimme man alle Punkte P , für die die Dreiecke PRD , PEQ und PTE denselben Flächeninhalt haben.

$\triangle PQE$ und $\triangle PET$ haben bezüglich Basis AC die gleiche Höhe daraus folgt aufgrund der Flächenformel $A = \frac{a \cdot h_a}{2} \Rightarrow ET = QE$.

Weiters gilt $\frac{CE}{TE} = \frac{BE}{PE} = \frac{AE}{QE}$.

Weil $ET = QE$ muss auch $CE = AE$ gelten, woraus folgt, dass P auf der Schwerlinie BE liegt.

Annahme: P ist der Schwerpunkt von $\triangle ABC \Rightarrow F = \frac{1}{2} \cdot (A + B) \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot (Q + R) \Rightarrow PQ = PR$ außerdem ist $A_{\triangle ABD} = A_{\triangle AEB}$

Da die gleich lange Basis vorliegt, ist ($d = distance =$ bedeutet Normalabstand) $d(D, g[A, B]) = d(E, g[A, B]) \Rightarrow h_{\triangle PQE} = h_{\triangle PDR}$ bezüglich Basis QR , weshalb nun gilt: $A_{\triangle PQE} = A_{\triangle PDR} \Rightarrow$ der Schwerpunkt ist ein möglicher Punkt P .

Da P auf der Schwerlinie BE liegen muss, verschieben wir nun auf dieser Schwerlinie P . Verschiebt man P in Richtung E , wird $A_{\triangle PDR}$ immer größer, $A_{\triangle PQE}$ hingegen immer kleiner. Verschiebt man P in Richtung B , wird $A_{\triangle PQE}$ immer größer und $A_{\triangle PRD}$ immer kleiner. Ist P an der gleichen Stelle wie E ist $A_{\triangle PQE} = 0$ und

$A_{\Delta PRD} = A_{\Delta ABC}$. Ist P an der gleichen Stelle wie B ist $A_{\Delta PQE} = A_{\Delta ABC}$ und $A_{\Delta PRD} = 0$. Man kann sich also zwei Funktionen der Flächen $f_{\Delta PQE}$ und $f_{\Delta PRD}$ vorstellen, die von der Position von P abhängig sind. Wenn der Punkt P von B nach E verschoben wird gilt:

1. $f_{\Delta PQE}$ ist stetig und streng monoton fallend.
2. $f_{\Delta PRD}$ ist stetig und streng monoton steigend.

Da $f_{\Delta PQE}(B) > f_{\Delta PRD}(B)$ und $f_{\Delta PQE}(E) < f_{\Delta PRD}(E)$ folgt nach dem Zwischenwertsatz, dass mindestens ein Schnittpunkt der beiden Funktionen existiert. Aufgrund der strengen Monotonie gilt weiters: Es existiert genau ein Schnittpunkt, also ist der Schwerpunkt der einzige mögliche Punkt P .

5.1.2 „Norderney-Problem“

Während meines letztjährigen Sommerurlaubs auf der Nordseeinsel Norderney bin ich auf ein interessantes Problem gestoßen, das bei erster Betrachtung den Zwischenwertsatz nichtig erscheinen ließ. Norderney ist wie die paar anderen ostfriesischen Inseln ein sehr langgezogenes, gegenüber dem Festland gelegenes Eiland und von der Küste des Festlandes nur durch das ein paar Kilometer breite Wattenmeer getrennt. Aufgrund des Tidenubs von über zweieinhalb Metern liegt zwei Mal täglich dieser Teil zwischen den Inseln und dem Festland frei, weshalb geführte „Wattwanderungen“ vom Festland zur Insel durchgeführt werden können. Andererseits bietet die ortsansässige Reederei auch Ausflugsfahrten zwischen den Inseln an, wobei das Wattenmeer in ausgebaggerten Fahrrinnen durchquert wird. Eine solcher Fahrten ist beispielsweise jene von Norderney nach Baltrum. Die Abfahrtszeiten richten sich natürlich nach den Gezeiten, so war als Beispiel für den 1. Oktober 2014 Hochwasser für 16:50³⁰ berechnet worden und die Abfahrtszeit vom Hafen in Norderney um 13:00, beziehungsweise die Ankunft dort um 18:00³¹

³⁰2015. URL: <http://www.gezeitenfisch.com/de/niedersachsen/norddeich-westerriede> (besucht am 15.02.2015).

³¹2015. URL: http://www.cassen-tours.de/files/fahrplan_ndy_now.pdf (besucht am 15.02.2015).

5 Sätze über stetige Funktionen

festgelegt worden. Hier wurde augenscheinlich darauf geachtet, zeitlich nahe dem Hochwasser das Wattenmeer zu passieren. Dennoch erschien mir dies seltsam und ich konnte mir nicht erklären, wie eine Art Fußweg eine Fahrrinne für ein Passagierschiff kreuzen könne.

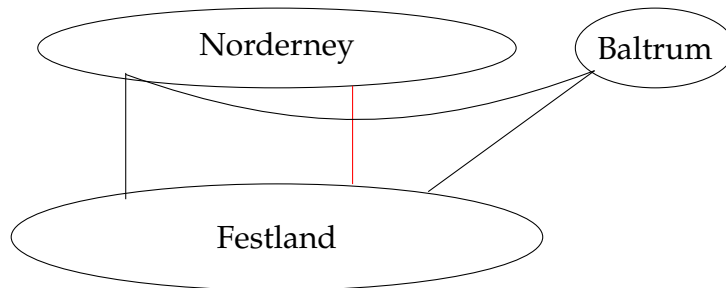


Abbildung 5.2: Schema des Problems, eigenhändig erstellt

Die Skizze stellt dieses Problem sehr vereinfacht dar. Die schwarzen Linien markieren Fährrouen, die von Belang sind, die rote Strecke stellt die Wanderroute dar. Um das Problem in eine mathematische Form zu bringen, könnte man sich einen Kreis vorstellen, der den umliegenden Fährrouen und dem Festland entspricht: Von einem Punkt X aus dem Kreisinneren möchte eine Verbindung zu einem Punkt Y außerhalb des Kreises hergestellt werden. Nach der Definition eines Kreises, die Menge aller Punkte P , die von einem Punkt M , dem Mittelpunkt, denselben Abstand r haben,³² ist dieser eine geschlossene Kurve. Nehmen wir den Punkt X auf der Gerade innerhalb des Kreises: Hier ist der Abstand zu $M < r$. Der Abstand von Y zu M ist $> r$. Da eine Gerade einer linearen Funktion entspricht und demzufolge stetig ist, muss an einer Stelle der Gerade der Abstand zu $M = r$ sein. Folglich, wie erwartet, muss an einer Stelle des Wanderweges die Fahrrinne passiert werden. Nach weiterer Recherche habe ich außerdem herausgefunden, dass das Ausflugsschiff nur einen Tiefgang von einem Meter hat³³, zudem berichteten die Wattführer, dass man an einer Stelle bis zu den Knien im Wasser sei. Daher sind sowohl Wattwanderungen als auch Ausflugsschiffahrten möglich.

³²vgl. Bossek und Weber, *Abiturwissen Mathematik*, S. 342.

³³2015. URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Frisia_X (besucht am 15.02.2015).

5.2 Satz über die Annahme des Maximums und Minimums

Ein weiterer Satz, der im Zusammenhang mit stetigen Funktionen steht, ist jener über die Annahme des Maximums und Minimums:

Satz 5.3. *Jede in einem abgeschlossenen beschränkten Intervall stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt und nimmt ihr Maximum und Minimum an, das heißt, es existiert ein $p \in [a, b]$, so dass $f(p) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ und ein $q \in [a, b]$, sodass $f(q) = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$.³⁴*

Bemerkung:

$\sup x$ = der größte der Wert aus der Menge x .

$\inf y$ = der kleinste Wert aus der Menge y .

Dieser Satz bedeutet, dass eine stetige Funktion in einem abgeschlossenen Intervall sowohl einen Hochpunkt als auch einen Tiefpunkt hat. Eine Funktion heißt beschränkt, wenn die Menge der Funktionswerte beschränkt ist. Da die Funktion im zu betrachtenden Intervall stetig ist, ist die Funktion in jedem Punkt des Intervalls definiert und stetig, weshalb sie beschränkt ist. Dass der Satz tatsächlich nur in abgeschlossenen beschränkten Intervallen gilt, zeigen zum Beispiel die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ im Intervall $]0, 1]$, die zwar stetig, jedoch nicht beschränkt ist, und jede lineare Funktion im offenen oder halboffenen Intervall, da sie darin nicht ihr Infimum und Supremum, was ihrem Grenzwert entspricht, erreichen kann.

³⁴vgl. Forster, *Analysis 1 Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*, Seite 67.

6 Wichtige Mathematiker im Zusammenhang mit dem Zwischenwertsatz

In diesem Kapitel wird versucht, das in dieser Arbeit behandelte Teilgebiet der Analysis in die Geschichte der Mathematik einzuordnen und dabei das Leben und die Verdienste bedeutsamer Mathematiker auf diesem Gebiet zu behandeln. Dies werden jene drei Mathematiker sein, nach denen die für diese Arbeit wichtigen Sätze benannt worden sind. Einerseits **Augustin Louis Cauchy**, nach dem die „Cauchy-Folgen“ sowie das „Allgemeine Cauchysche Konvergenzkriterium“ benannt sind. Andererseits **Bernard Bolzano**, für dessen „Nullstellensatz“ im vorherigen Kapitel von uns ein Beweis nachvollzogen wurde, sowie **Karl Weierstraß**, der so wie auch Bolzano (beide arbeiteten unabhängig voneinander) jenen Satz bewies, der nun nach beiden benannt ist. Alle drei haben beträchtlich dazubeigetragen, dass die Analysis, die zu dieser Zeit noch etwas unübersichtlich war, reformiert wurde. Sie formulierten Definitionen exakt aus und ermöglichten genaues Weiterforschen.

6.1 Bernard Bolzano

1781 - 1848

Bernard Bolzano wurde am 5. Oktober 1781 in Prag geboren und absolvierte eine bemerkenswerte Laufbahn, bis er sich endgültig der Mathematik zuwandte. Aus keinem sehr intellektuellen Haushalt stammend, interessierte er sich während der Schulzeit mehr für Geisteswissenschaften, vor allem für Psychologie. Daneben machte er sich auch immer wieder Gedanken über gesellschaftliche Probleme der damaligen Zeit. In all diesen Bereichen überzeugte ihn immer mehr die Logik, wodurch er sich auch vermehrt für die Mathematik interessierte. 1799 befand sich

Bolzano nun in einer Zwickmühle die Studiumswahl betreffend. Schlussendlich entschied er sich für das Studium der Theologie in Prag. Trotzdem fühlte er sich auch in den folgenden Jahren der Mathematik sehr verbunden. 1805, nach Abschluss seines Studiums, bewarb er sich in Prag sowohl für den Lehrstuhl für Religionswissenschaft, als auch für jenen für Elementarmathematik. Er wurde für den Lehrstuhl für Religionswissenschaft ausgewählt und ließ sich daraufhin zum Priester weihen. Während er sich bei seiner Zuhörerschaft mit seinen sehr fortschrittlichen Gedanken in seinen Vorlesungen großen Respekt erwarb, wurde er sowohl Kaiserreich als auch Kirche damit ein Dorn im Auge. Schließlich wurde ihm nach mehrmaligen Anzeigen die Professur entzogen, worauf er sich wieder verstärkt der Mathematik widmete, mit der er sich aber auch während der Universitätsjahre beschäftigt hatte. Bolzano veröffentlichte viele Beiträge zur Analysis, wobei er sich vor allem mit grundlegenden Begriffen wie Stetigkeit, Ableitung und Funktionen auseinandersetzte. So konstruierte er zum Beispiel als erster eine Funktion die auf einem Intervall stetig aber nirgendwo differenzierbar ist. Zu Lebzeiten wurde Bolzanos Werk nur wenig gewürdigt, unbestritten hat es aber großen Anteil am Fortschritt der Mathematik im 19. Jahrhundert.³⁵ Als wichtiger Nachlass Bolzanos bleibt die Definition der Gleichheit zweier Zahlen:

Wenn in der Gleichung $A + \omega = B + \omega^1$ die Grössen ω , ω^1 so klein werden können, als man nur immer will, während A und B unverändert bleiben: so muss $A = B$ sein.³⁶

sowie die Definition der Stetigkeit einer Funktion: man liest:

[...], daß, wenn x irgend ein solcher Werth ist, der Unterschied $f(x + \omega) - f(x)$ kleiner als jede gegebene GröÙe gemacht werden könne, wenn man ω so klein, als man nur immer will, annehmen kann.³⁷

³⁵vgl. Hans Wußing und Wolfgang Arnold. *Biographien bedeutender Mathematiker*. Berlin: Volk und Wissen Volkseigener Verlag, 1975, S. 320 - 333.

³⁶O. Stolz. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte in der Infinitesimalrechnung. *Math. Annalen* Bd. 18. S. 257. 1881 zitiert nach: Sonar, *3000 Jahre Analysis*, S. 500.

³⁷Wußing und Arnold, *Biographien bedeutender Mathematiker*, S. 328.

6.2 Augustin Louis Cauchy

1789 - 1857

Geboren am 21. August 1789 in Paris, wuchs Cauchy in der Zeit der französischen Revolution auf, wobei seine Familie eher konservativ war und sich so gut wie möglich aus jenen Konflikten heraushielt. Schon in früher Kindheit war sein Interesse an der Mathematik enorm groß. Mit seinem Vater befreundete Mathematiker rieten Cauchy jedoch, zuerst eine umfassende Allgemeinbildung zu erfahren, um sich danach mit vollem Eifer auf die Mathematik zu stürzen. Dennoch wurde er bereits mit knapp 21 Jahren Ingenieur und lieferte sehr bald Beiträge zur Mathematik. Nach dreijähriger Tätigkeit als Ingenieur und Organisator beim Hafenaufbau in Cherbourg, kehrte er 1813 nach Paris zurück. Dort waren aufgrund seiner konterrevolutionären Einstellung höhere mathematische Ämter zunächst nicht möglich. Es ergaben sich erst nach Beginn der neuerlichen Monarchie mehrere Möglichkeiten. Wie auch Bolzano, für dessen Arbeiten aber kaum Interesse bestand, forschte Cauchy auf verschiedensten Feldern der Mathematik. Er beschäftigte sich unter anderem mit Infinitesimalrechnung, Differentialgleichungen oder Funktionen komplexer Veränderlicher, sowie auch mit Algebra. Auch in der Physik kam Cauchy zu zum Teil bahnbrechenden Erkenntnissen. Überhaupt war Cauchy überaus produktiv und publizierte über 500³⁸ wissenschaftliche Arbeiten. Beeindruckend ist auch die Anzahl der nach ihm benannten Theoreme und Begriffe der Mathematik. Im Zuge der nächsten Revolution 1830 verließ er für mehrere Jahre Frankreich, kehrte jedoch 1838 aufgrund mangelnder fachlicher Perspektiven wieder zurück und ließ sich auch in seiner Haltung nicht beirren. So erarbeitete er sich großen Respekt und wurde auch von der Kirche als vorbildlich gläubiger Wissenschaftler unterstützt. Am 23. Mai 1857 starb Cauchy nach kurzer Krankheit und hinterließ ein Menge Grundlagen, auf denen vor allem die moderne Analysis aufbaut.³⁹

In einem seiner Hauptwerke „*Course d'analyse*“ findet man folgende zwei Sätze:

³⁸Herbert Meschkowski. *Mathematiker-Lexikon*. Zürich: Hochschultaschenbücher-Verlag, 1964, S. 53.

³⁹vgl. Wußing und Arnold, *Biographien bedeutender Mathematiker*, S. 334 - 344.

6 Wichtige Mathematiker im Zusammenhang mit dem Zwischenwertsatz

Satz 6.1. Falls für zunehmende Werte von x die Differenz $f(x + 1) - f(x)$ gegen einen Grenzwert konvergiert, dann wird der Quotient $f(x)/x$ gleichzeitig gegen denselben Grenzwert konvergieren.

Satz 6.2. Ist $f(x)$ positiv für sehr große Werte von x und falls der Quotient $f(x + 1)/f(x)$ für unbestimmt zunehmendes x gegen einen Grenzwert k konvergiert, dann wird der Ausdruck $(f(x))^{1/x}$ gleichzeitig gegen denselben Grenzwert konvergieren.⁴⁰

Daneben definiert Cauchy den Grenzwert folgendermaßen:

*Wenn die sukzessiven Werte derselben Veränderlichen sich einem festen gegebenen Wert so nähern, dass sie sich von diesem Wert so wenig als man nur will unterscheiden, dann heißt der feste Wert der Grenzwert aller anderen Werte.*⁴¹

Für die Stetigkeit von Funktionen schreibt er:

*Mit anderen Worten wird die Funktion $f(x)$ bezüglich x zwischen zwei Grenzen stetig bleiben, wenn zwischen diesen Grenzen eine infinitesimale Zunahme der Variablen immer eine infinitesimale Zunahme der Funktion zur Folge hat.*⁴²

6.3 Karl Theodor Wilhelm Weierstraß

1815-1897

Auch dieser Mathematiker hatte ein überaus interessantes Leben. Geboren wurde Karl Weierstraß am 31. Oktober 1815 in Ostenfelde in Westfalen. Nach glänzenden Leistungen während der Schulzeit und schon damals großem Interesse an der Mathematik, begann er auf Wunsch seines Vaters dennoch ein Studium der Kameralistik, das für eine Tätigkeit als höherer Staatsbeamter wichtig war. Weierstraß war

⁴⁰U. Bottazzini. The Higher Calculus - A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass. New York, Berlin, Heidelberg, etc.: 1986, S. 105. zitiert nach: Sonar, *3000 Jahre Analysis*, S. 509.

⁴¹Bottazzini, The higher Calculus, S. 103, vgl. auch J. Lützen. Grundlagen der Analysis im 19. Jahrhundert. in: Jahnke 1999, S. 191-244. zitiert nach: *Ebd.*, S. 508.

⁴²Bottazzini, The higher Calculus, S. 109. zitiert nach: *Ebd.*, S. 509.

damit nicht glücklich und brach schließlich nach wenigen Jahren dieses Studium ab und ging mit der Kurz-Ausbildung zum Gymnasiallehrer den nächsten Kompromiss mit seinem Elternhaus ein. Von 1842 bis 1855 mühte sich Weierstraß also an zwei Gymnasien ab, wobei er sich aber intensiv mit komplexen mathematischen Problemen auseinandersetzte. Als er sich 1854 dann entschloss, seine Ergebnisse zu elliptischen Funktionen in einem Fachjournal zu veröffentlichen, waren zahlreiche gestandene Mathematiker von seinen Erkenntnissen geradezu begeistert. Nun nahm Weierstraß's Karriere doch noch Fahrt auf und er wurde an die Berliner Universität berufen. Auch dort war er äußerst respektiert und erfolgreich, sodass er es zunächst zum Professor (1856) und später zum Rektor (1873/74) brachte. Seine Vorlesungen war immer sehr gefragt und er selbst galt als sehr eifrig. Dabei achtete er jedoch nicht auf seine Gesundheit, die ihm immer mehr zu schaffen machte. 1890 legte er seine Vorlesungstätigkeit nieder. Er starb am 19. Februar 1897 an einer Lungenentzündung. Neben seine bahnbrechenden Erkenntnissen zu elliptischen und sogenannten „Abel'schen Funktionen“ verdankt ihm die modernen Mathematik vor allem eine exakte und genaue Aufarbeitung der Analysis.⁴³ Von Weierstraß stammt folgende Definition der unendlich kleinen Größe:

Eine unendlich kleine Größe ist eine Funktion φ der Variablen h derart, daß man zu gegebenen ε immer ein δ mit der Eigenschaft finden kann, daß für alle Werte von h , deren absoluter Betrag kleiner als δ ist, $\varphi(h)$ kleiner als ε ist.⁴⁴

Die hierbei verwendeten Begrifflichkeiten und Symbole sind uns seit den in dieser Arbeit besprochenen Begriffen des Grenzwerts und der Stetigkeit bekannt. Ein weiterer Satz von Weierstraß beschäftigt sich schon weiterführend mit Integralen:

Wenn eine unendliche Reihe stetiger Funktionen auf $[a, b]$ gleichmäßig konvergiert, dann darf man gliedweise integrieren, um das Integral über die Summe der Reihe zu erhalten.⁴⁵

⁴³vgl. Wußing und Arnold, *Biographien bedeutender Mathematiker*, S. 400 - 416.

⁴⁴J. Dieudonné. *Geschichte der Mathematik 1700-1900 - Ein Abriss*. Braunschweig, Wiesbaden: 1985. S. 397. zitiert nach: Sonar, *3000 Jahre Analysis*, S. 524 f.

⁴⁵Ebd., S. 529.

7 Schlussbemerkung

Als Abschluss meiner VWA möchte ich die wichtigsten Elemente und den Arbeitsverlauf noch einmal Revue passieren lassen: Um sich einen Einblick in die Analysis zu verschaffen, war es zuerst wichtig, sich einige Begriffe zu Gemüte zu führen. So ist vor allem ein grundlegendes Verständnis der Eigenschaften von Folgen und daran anschließend von Konvergenz, einschließlich der Konvergenzkriterien sehr wichtig. Auch der Überblick über Zahlenmengen, das Vollständigkeitsaxiom und den Satz von Bolzano-Weierstraß ist unerlässlich, ebenso ein gewisses Grundwissen über Funktionen. Das große Kapitel der Stetigkeit, in es dem noch viele andere interessante Sachverhalte gäbe, leitet schließlich über zu verschiedenen Sätzen über stetige Funktionen, zu welchen der Zwischenwertsatz und seine Spezialform, der Nullstellensatz zählen. In vielen Teilen der Arbeit wurden mit diversen Methoden Beweise hergeleitet, sei es für die Stetigkeit bestimmter Funktionen, oder für den Nullstellensatz. Bei letzterem wurde mit der Intervall-Halbierungsmethode gearbeitet, und auch auf vorher genannte Sätze zurückgegriffen. Auch war es mir wichtig, ein wenig über die geschichtliche Entwicklung dieses Bereichs der Mathematik zu berichten. Für mich als Verfasser war es auch herausfordernd, mir das genaue, mathematisch korrekte Argumentieren anzugewöhnen, und zu akzeptieren, dass unterschiedliche Formulierungen schnell unterschiedliche Bedeutungen haben können. Doch mit der Zeit gelang es mir immer mehr, ein Gefühl dafür zu entwickeln. Nach der Lektüre der vorliegenden VWA, hoffe ich, jenen Lesern, die bisher wenig Interesse an der Mathematik hatten, nun ein wenig Lust auf dieselbige gemacht zu haben.

Anhang

Literatur

2015. URL: <http://www.gezeitenfisch.com/de/niedersachsen/norddeich-westerriede> (besucht am 15.02.2015).
2015. URL: http://www.cassen-tours.de/files/fahrplan_ndy_now.pdf (besucht am 15.02.2015).
2015. URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Frisia_X (besucht am 15.02.2015).
- Bossek, Hubert und Weber, Karlheinz, Hrsg. *Abiturwissen Mathematik*. 3. Ausgabe. Mannheim: Duden, 2011.
- Forster, Otto. *Analysis 1 Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*. 4. Ausgabe. Braunschweig: Vieweg Verlag, 1983.
- Hunt, Richard. *Calculus with Analytic Geometry*. New York: Harper & Row, 1988.
- Meschkowski, Herbert. *Mathematiker-Lexikon*. Zürich: Hochschultaschenbücher-Verlag, 1964.
- Müller-Fonfara, Robert. *Mathematik verständlich*. Ausgabe 2006. München: Bassermann Verlag, 2005.
- Sonar, Thomas. *3000 Jahre Analysis*. Berlin: Springer, 2011.
- Wußing, Hans und Arnold, Wolfgang. *Biographien bedeutender Mathematiker*. Berlin: Volk und Wissen Volkseigener Verlag, 1975.

Abbildungsverzeichnis

5.1	Skizze nach der Angabe, eigenhändig erstellt	29
5.2	Schema des Problems, eigenhändig erstellt	31

Eidesstattliche Erklärung

Ich, Daniel Teichert, erkläre hiermit eidesstattlich, dass ich diese vorwissenschaftliche Arbeit selbständig und ohne Hilfe Dritter verfasst habe. Insbesondere versichere ich, dass ich alle wörtlichen und sinngemäßen Übernahmen aus anderen Werken als Zitate kenntlich gemacht und alle verwendeten Quellen angegeben habe.

Leoben, am 25.02.2015

Daniel Teichert