



**Harmoni**

**che**

**schwingungen**

**Vorwissen**

**chaftliche Arbeit**

**von Anna Oel**

**ch**

Klasse 8

Mag. Han

Peter Kirchmaier

Abgabedatum 27. Feb. 2015

BG/BRG Ram

auerstraße

Ramsauer

straße 94, 4020 Linz

## Abstract

Nulla vita sine musica. Kein Leben ohne Musik. - Und damit auch kein Tag ohne harmonische Schwingungen. In meiner VWA möchte ich auf harmonische Schwingungen neugierig machen und deren Bedeutung im Alltag nahebringen.

Von der allgemeinen Einführung in dieses Thema über die mathematischen Ausdrucksformen von harmonischen Schwingungen bis hin zur Anwendung, speziell im täglichen Umgang thematisiert diese Arbeit folgende Aspekte: Die Tonerzeugung und ihre mathematische Darstellung sind praktische Beispiele für die Verwendung der Mathematik im Alltag.

Komplexer und schwieriger werden dann die Überlegungen zur Überlagerung mehrerer Schwingungen, wenn einige Instrumente zusammenspielen. Um die Töne einer Querflötenmelodie in Formeln dokumentieren zu können, bedarf es einer grundlegenden mathematischen Entdeckung. Die Fourier-Analyse von Jean Baptiste Fourier bildet einen weiteren Schwerpunkt dieser Arbeit. Während der Projektwoche Angewandte Mathematik<sup>1</sup> auf Schloss Weinberg setzte ich mich gemeinsam mit meiner wissenschaftlichen Projektgruppe genau damit intensiv auseinander und konnte viel interessantes Material für die VWA sammeln.

Die fundamentalen mathematischen Erkenntnisse und die Anwendung in der Musik sind unentbehrliche Grundlagen für die heutige Zeit. Erst damit sind selbstverständlich empfundene Annehmlichkeiten wie digitale Musik in Form von MP3-Liedern möglich geworden. Und das ist nur eines von vielen spannenden Beispielen auf den folgenden Seiten.

---

<sup>1</sup> Veranstalter: Verein Stiftung Talente, Landesschulrat für Oberösterreich und Johannes Kepler Universität Linz

## Vorwort

Wegen meiner Begeisterung für Physik und Mathematik begab ich mich auf die Suche nach einem fächerübergreifenden Inhalt für meine VWA. Als perfekte Kombination meiner zwei Lieblingsfächer bot sich das Thema „Harmonische Schwingungen“ an.

Seit sieben Jahren spiele ich Querflöte. Deshalb eignet sich die Musik ganz besonders gut als praktisches Anwendungsbeispiel der harmonischen Schwingungen. Am meisten Freude bereiten mir die Ensemblestücke, bei denen speziell die Intonation, also naturwissenschaftlich ausgedrückt das Abstimmen der Frequenzen, eine reizvolle Herausforderung darstellt. Im Zuge meiner VWA bin ich immer neugieriger geworden, welche überraschenden, naturwissenschaftlichen Zusammenhänge sich hinter der Musik verbergen.

An dieser Stelle möchte ich mich bei meinem Mathematiklehrer und VWA-Betreuer Mag. Hans Peter Kirchmaier bedanken. Ganz besonders schätze ich, dass er die Freude und Begeisterung für diese Arbeit mit mir teilt und mich dabei tatkräftig mit seinem Engagement und Fachwissen unterstützt.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>EINLEITUNG</b> .....	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>DEFINITIONEN</b> .....	<b>8</b>
2.1	DEFINITION DER HARMONISCHEN SCHWINGUNG .....	8
2.2	DEFINITION DER SINUSFUNKTION .....	9
<b>3</b>	<b>HARMONISCHE SCHWINGUNGEN ALS LÖSUNG VON DIFFERENZIALGLEICHUNGEN</b> .....	<b>15</b>
3.1	DEFINITION EINER DIFFERENZIALGLEICHUNG .....	15
3.2	DIFFERENZIALGLEICHUNGEN BEI SCHWINGUNGEN .....	15
3.2.1	<i>Gedämpfte Schwingungen</i> .....	18
3.2.2	<i>Beispiel zur Veranschaulichung</i> .....	19
<b>4</b>	<b>ALLTAG: HARMONISCHE SCHWINGUNGEN IN DER MUSIK</b> .....	<b>20</b>
4.1	TONERZEUGUNG .....	20
4.1.1	<i>Stimmgabel</i> .....	20
4.1.2	<i>Saiteninstrumente</i> .....	21
4.1.3	<i>Blasinstrumente</i> .....	22
4.2	KLANGFARBE .....	25
4.3	SCHALLAUSBREITUNG .....	26
4.4	ZUSAMMENSPIEL DER INSTRUMENTE – ÜBERLAGERUNG VON SCHWINGUNGEN .....	28
4.5	FOURIER-ANALYSE .....	36
4.5.1	<i>Fourier-Reihen</i> .....	38
4.5.2	<i>Diskrete Fourier-Transformation</i> .....	41

<b>5 FAZIT .....</b>	<b>50</b>
<b>LITERATURVERZEICHNIS.....</b>	<b>52</b>
PRINTMEDIEN.....	52
ONLINE ZUR VERFÜGUNG GESTELLTE QUELLEN .....	53
<i>PDF-Dokumente</i> .....	53
<i>Website</i> .....	53
<b>ABBILDUNGSVERZEICHNIS.....</b>	<b>55</b>

# 1 Einleitung

„Musik ist schwingende Luft.“, wie der berühmte Dirigent Daniel Barenboim behauptete.<sup>2</sup> Hat er damit tatsächlich Recht? Die mathematische Basis der harmonischen Schwingungen ist Thema dieser VWA. Sie befasst sich mit dem physikalischen Hintergrund und vor allem der Frage, wie Klänge mathematisch niedergeschrieben und verarbeitet werden.

Der Titel „Harmonische Schwingungen – Grundlagen und beispielhafte Anwendung in der Physik“ ist wohl die kürzeste Zusammenfassung des Inhaltes. Es wird unter anderen alltäglichen Anwendungsbeispielen speziell auf die Akustik eingegangen. Um eine gute Basis für das Verständnis der Arbeit zu legen, werden zunächst harmonische Schwingungen allgemein vorgestellt, erklärt und definiert. Darauf aufbauend behandelt das nächste Kapitel die Leitfrage, ob man einfache Schwingungsvorgänge durch ein mathematisches Modell beschreiben kann. Differenzialgleichungen werden hier gelöst und somit gezeigt, dass harmonische Schwingungen in eben diesen als Cosinus erscheinen. Doch wo kommen harmonische Schwingungen tatsächlich vor? Wo findet sich diese Theorie im Alltag? Mit dieser Fragestellung befasse ich mich hauptsächlich in der vorliegenden Arbeit. Mikrowellen, GPS, Hochhäuser und Brücken in der Architektur, Radios und Lautsprecher sowie Telefonnetze und moderne WLAN-Verbindungen sind nur wenige Beispiele aus unserem Alltag. Dies bestätigt die Relevanz und Aktualität von harmonischen Schwingungen in der heutigen Zeit.

Der Fokus dieses Werkes liegt allerdings auf der Anwendung in der Musik, im Speziellen am Beispiel der Querflöte, da das zusätzliche Eingehen auf weitere Anwendungsbereiche den Rahmen der VWA bei weitem sprengen würde. Vom einzelnen Ton über einen einzelnen Klang bis hin zur Überlagerung mehrerer solcher Schwingungen zu dem gehörten Resultat eines Zusammenspiels wird der Leser in die Hintergründe der Musik eingeführt. Zuletzt gehe ich auf die Fourier-Analyse ein, mit Hilfe welcher das

---

<sup>2</sup> Vgl. <http://www.tphys.uni-heidelberg.de/~huefner/PhysikUeberall/V09S.pdf> [05.10.2014]

wahrgenommene, komplexe Resultat einer Schwingungsüberlagerung in seine einzelnen harmonischen Schwingungen zerlegt wird.

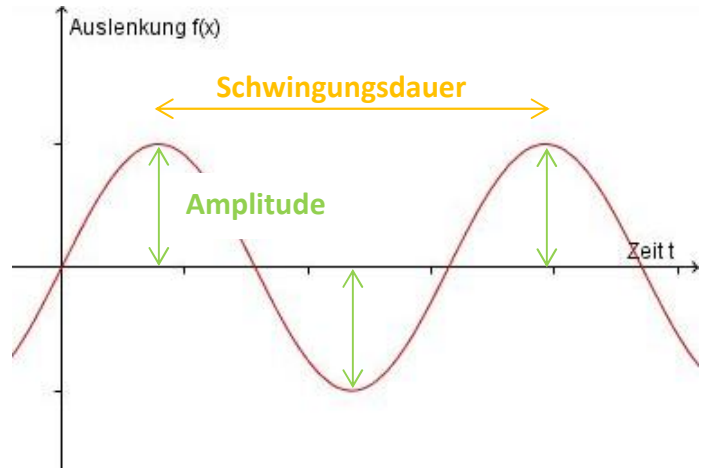
Besonders mit Hilfe von Anna Quellhorsts Buch „Physik der Blasinstrumente“ konnte ich mir zu Beginn einen guten Überblick verschaffen. Zudem befasste sich „Mathematik für Wirtschaftsingenieure Und Naturwissenschaftlich-technische Studiengänge“ von Norbert Henze und Günther Last umfassend mit harmonischen Schwingungen und der Fourier-Analyse. In meiner Arbeit sind außerdem noch viele weitere, für die Forschung zu diesem Thema wichtige Werke aufgelistet und verwendet. Mit Hilfe dieser Informationen ist es mir gelungen, meinen persönlichen Horizont zu erweitern und dieses Wissen mit eigenen Worten in Form dieser Arbeit weiterzugeben. Übersichtliche und leicht verständliche Grafiken dienen zur Veranschaulichung und besserem Verständnis für interessierte Leserinnen und Leser.

Überzeugen Sie sich selbst von der Faszination „harmonische Schwingungen“!

## 2 Definitionen

### 2.1 Definition der harmonischen Schwingung

Zunächst wird mit den nachfolgenden Definitionen die mathematische Grundlage für diese Arbeit erklärt. Schwingungen sind sich wiederholende zeitliche Schwankungen, also Auslenkungen um einen Mittelwert.<sup>3</sup> Ein System wird aus seinem stabilen Gleichgewicht gebracht und durch eine rücktreibende Kraft zu einer Bewegung wie in Abbildung 1 veranlasst.<sup>4</sup>



**Abbildung 1: Schwingungsbewegung** (Verfasser)

Charakteristisch für harmonische Schwingungen ist die gleichbleibende Amplitude, die maximale Auslenkung aus der Ruhelage.<sup>5</sup> Gleichermaßen verändern sich zudem weder die Frequenz noch die Schwingungsdauer  $T$ . Diese beschreibt die Zeitspanne, nach welcher wieder derselbe Wert der Auslenkung wie zu Beginn der Schwingung erreicht wird.<sup>6</sup> Unter dem Begriff Frequenz  $f$  versteht man die Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit und diese wird in der Einheit Hertz (abgekürzt Hz, benannt nach dem deutschen<sup>7</sup> Physiker Heinrich Hertz<sup>8</sup>: 1857-1894<sup>9</sup>) angegeben.

---

<sup>3</sup> Vgl. <http://de.wikipedia.org/wiki/Schwingung> [Zugegriffen 19.02.2015]

<sup>4</sup> Vgl. <http://www.abi-physik.de/buch/schwingungen/harmonische-schwingung/> [Zugegriffen 19.02.2015]

<sup>5</sup> Vgl. Apolin, Martin: Big Bang. Physik 6 RG. - Wien. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG<sup>1</sup>. 2008. S. 29

<sup>6</sup> Vgl. Prof. Dr. Horn, Gustav: Gabler Wirtschaftslexikon. harmonische Schwingungen. - Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH. IN: <http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Archiv/127668/harmonische-schwingung-v4.html> [Zugegriffen 11.09.2014]

<sup>7</sup> Vgl. [http://de.wikipedia.org/wiki/Heinrich\\_Hertz](http://de.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Hertz) [Zugegriffen 25.10.2014]



Der Zusammenhang mit der Schwingungsdauer T lautet

$$f = \frac{1}{T} \quad {}^{10}$$

Die mathematische Darstellung einer harmonischen Schwingung entspricht im Zeit-Weg-Diagramm wie in Abbildung 1 immer einer Sinuskurve.<sup>11</sup>

## 2.2 Definition der Sinusfunktion

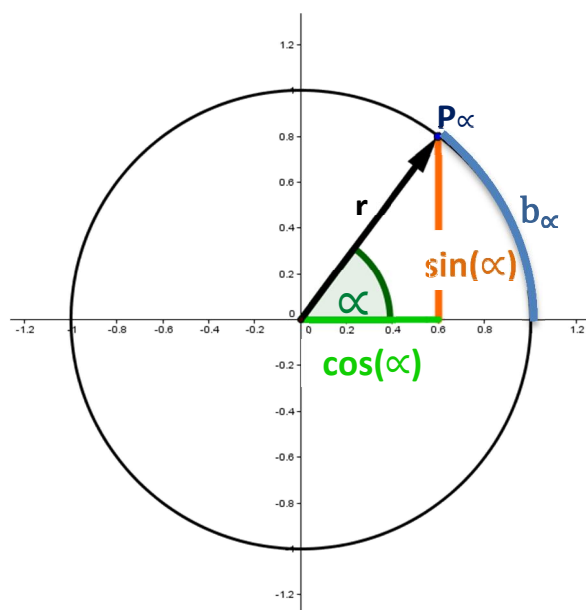
Bei der Definition einer Sinusfunktion wird immer von einem Einheitskreis<sup>12</sup> in einem kartesischen Koordinatensystem ausgegangen, dessen Mittelpunkt im Ursprung (0;0) liegt und welcher den Radius  $r = 1$  hat.<sup>13</sup> Die Einheiten der beiden Achsen sind hier dieselben.<sup>14</sup>

Eine Sinusfunktion ist in der Mathematik mit

$$f: x \rightarrow \sin(x), x \in \mathbb{R}$$

beziehungsweise

$$y = \sin(x)$$



**Abbildung 2: Sinus, Cosinus und Kreisbogen im Einheitskreis (Verfasser)**

<sup>8</sup> Vgl. <http://www.moz.ac.at/sem/lehre/lib/ks/lib/additive/akustik02a.htm.html> [Zugegriffen 25.10.2014]

<sup>9</sup> Vgl. [http://de.wikipedia.org/wiki/Heinrich\\_Hertz](http://de.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Hertz) [Zugegriffen 25.10.2014]

<sup>10</sup> Vgl. <http://www.elektrotechnik-fachwissen.de/wechselstrom/periodendauer-frequenz.php> [Zugegriffen 09.02.2015]

<sup>11</sup> Vgl. Apolin, Martin: Big Bang. Physik 6 RG. S. 30 ff.

<sup>12</sup> Vgl. Reinhardt, Fritz: Schulmathematik. – München. Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH & Co. KG. 2002. S. 86 f.

<sup>13</sup> Vgl. Kopp, Bernhard: Der große Mathematik Überblick. – Wien. G&G Verlagsgesellschaft mbH. 2007. S. 169 f.

<sup>14</sup> Vgl. Reinhardt, Fritz: Schulmathematik. S. 86 f.

definiert. Sie beschreibt die Abhängigkeit der Sinuswerte  $\sin(\alpha)$  vom Kreisbogen  $b_\alpha$  des Winkels  $\alpha$  im Einheitskreis.<sup>15</sup> Der Zusammenhang ist in Abbildung 2 grafisch veranschaulicht.

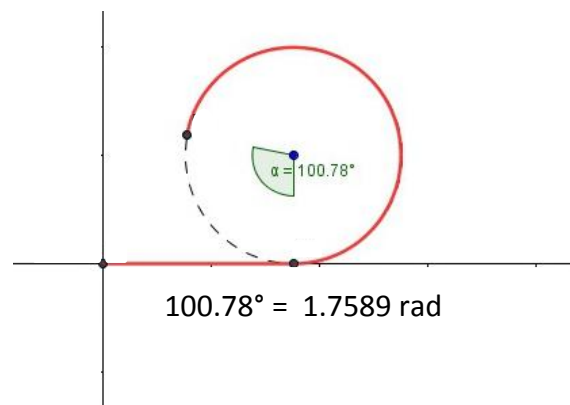
Jedem Winkel  $\alpha$  im Gradmaß wird ein gewisser Teil des Umfangs, der Kreisbogen  $b_\alpha$  zugeordnet, dessen Länge im Bogenmaß Radiant (rad) angegeben wird.<sup>16</sup> Das Umrechnen zwischen Grad und Radiant funktioniert wie folgt:

$1^\circ$  entspricht  $\frac{\pi}{180}$  rad<sup>17</sup>, was mit Hilfe der Umkreisformel

$$U = 2 \cdot r \cdot \pi \quad 18$$

des Kreises hergeleitet werden kann, da bei  $1^\circ$  nur  $\frac{1}{360}$  des Gesamtumfangs benötigt wird und der Radius im Einheitskreis 1 beträgt. Diese Umformungsschritte sind entscheidend, um die Einheiten auf der x-Achse verstehen zu können. Hier gibt es zwei Möglichkeiten: Grad und Vielfache von  $\pi$  (ausmultipliziert: Radiant).

Diese sind damit zu erklären, dass die x-Achse eine Projektion des Kreisbogens  $b_\alpha$  am Einheitskreis ist. Vorstellen kann man sich das folgendermaßen: Der Kreis wird im Koordinatenursprung angelegt und entlang der x-Achse abgerollt, wie in Abbildung 3 gezeigt wird.<sup>19</sup>



**Abbildung 3: abrollen des Einheitskreises auf der x-Achse** (Vgl. [http://www.math.uni-sb.de/vum/index.php?option=com\\_content&view=article&id=123&Itemid=61](http://www.math.uni-sb.de/vum/index.php?option=com_content&view=article&id=123&Itemid=61))

<sup>15</sup> Vgl. Hoffmann, Manfred: Großes Handbuch Mathematik. – München. Compact Verlag GmbH. 2006. S. 240

<sup>16</sup> Vgl. Reinhardt, Fritz: Schulmathematik. S. 87

<sup>17</sup> Vgl. Kopp, Bernhard: Der große Mathematik Überblick. S. 168

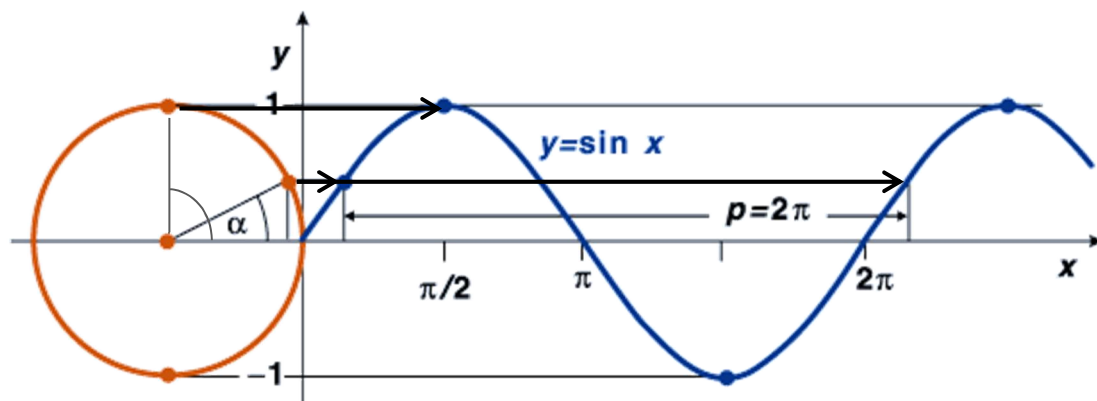
<sup>18</sup> Vgl. Götz Stefan; Kraft Johann: Mathematische Formelsammlung. – Wien. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG. 2013. S. 9

<sup>19</sup> Vgl. Reinhardt, Fritz: Schulmathematik. S. 86

Auf der y-Achse werden hingegen die Abstände aller Punkte  $P_\alpha$  zur x-Achse im Einheitskreis angeschrieben. In Abbildung 2 auf Seite 9 entspricht dieser der orange gefärbten Strecke.

Der Radiusvektor  $r$ , der gemeinsam mit der x-Achse den Winkel der Funktion einschließt, hat seinen Anfang im Koordinatenursprung, sein Ende liegt auf einem beliebigen Punkt des Einheitskreises. Daher ergeben sich für  $P_\alpha$  seine Koordinaten  $(\cos(\alpha); \sin(\alpha))$ , wie der Abbildung 2 zu entnehmen ist.<sup>20</sup>

Der Graf einer Sinusfunktion zeigt alle Punkte, die durch die Projektion der Radiusvektoren entstehen. Abbildung 4 veranschaulicht, wie die y-Werte von  $P_\alpha$  in die Sinuskurve projiziert werden. Demzufolge veranschaulicht der Sinusgraf die Funktion, welche der reellen Winkelzahl  $\alpha$  die y-Koordinaten des Radiusvektors von Alpha zuordnet.<sup>21</sup>



**Abbildung 4: Projektion der Sinuswerte** (Vgl. [https://elearning.physik.uni-frankfurt.de/data/FB13-PhysikOnline/lm\\_data/lm\\_281/modul\\_2/teil\\_6/node40.html](https://elearning.physik.uni-frankfurt.de/data/FB13-PhysikOnline/lm_data/lm_281/modul_2/teil_6/node40.html))

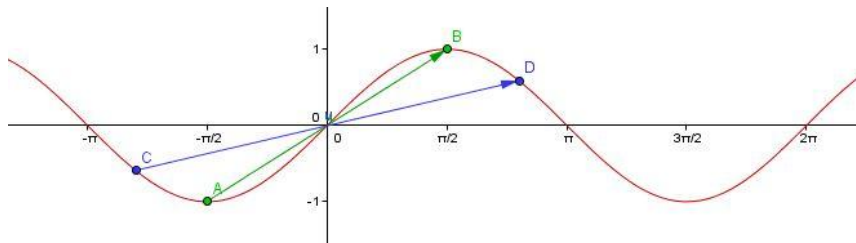
Der Winkel wird immer im mathematisch positiven Sinn bestimmt. Das bedeutet, dass im Einheitskreis von der positiven x-Achse ausgehend gegen den Uhrzeigersinn gemessen wird. Folglich ist die Größe des Winkels ein Maß für die Drehung und umgekehrt.<sup>22</sup>

<sup>20</sup> Vgl. Kopp, Bernhard: Der große Mathematik Überblick. S. 169 f.

<sup>21</sup> Vgl. ebd. S. 169 f.

<sup>22</sup> Vgl. ebd. S. 169 f.

Die Sinusfunktion ist in  $\mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$  durch  $x \rightarrow \sin(x)$  definiert. Das bedeutet, dass der Graf<sup>23</sup>, die sogenannte Sinuslinie<sup>24</sup> wie in Abbildung 5, im Intervall  $[0, 2\pi]$  für  $x$  alle Punkte im Laufe einer Runde des Radiusvektors in mathematisch positivem Sinn darstellt, während bei allen  $x < 0$  vom mathematisch negativen Drehsinn gesprochen wird.<sup>25</sup>

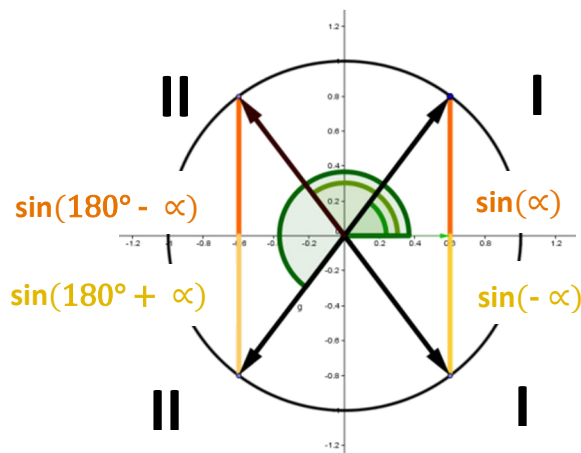


**Abbildung 5: punktsymmetrische Sinuskurve (Verfasser)**

An Hand des Grafen in Abbildung 5 ist unschwer zu erkennen, dass Sinusfunktionen punktsymmetrisch zum Ursprung sind, weshalb sowohl  $\sin(x) = -\sin(-x)$  als auch  $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$  für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt.

Aus Abbildung 6 kann folgende Gesetzmäßigkeit für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  herausgelesen werden:

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha).^{26}$$



**Abbildung 6: Sinus in den vier Quadranten des Einheitskreises (Verfasser)**

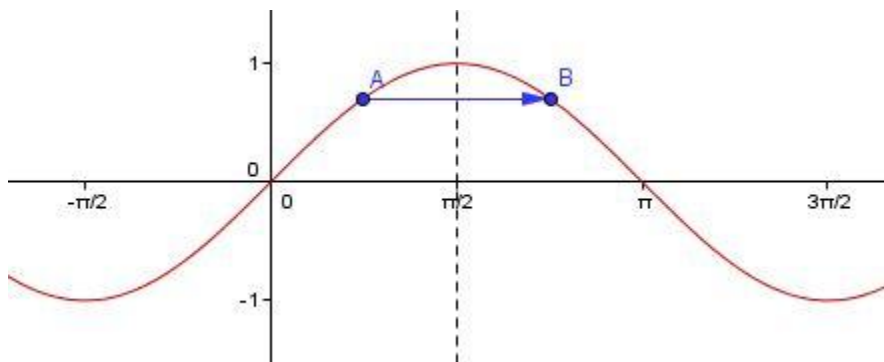
<sup>23</sup> Vgl. Reinhardt, Fritz: Schulmathematik. S. 86 f.

<sup>24</sup> Vgl. Hoffmann, Manfred: Großes Handbuch Mathematik. S. 240 f.

<sup>25</sup> Vgl. Reinhardt, Fritz: Schulmathematik. S. 86 f.

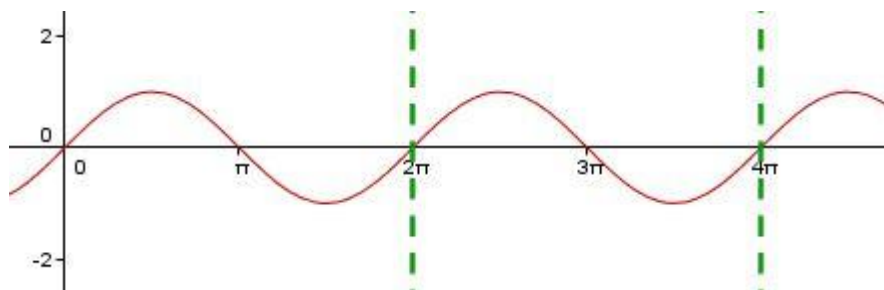
<sup>26</sup> Vgl. Kopp, Bernhard: Der große Mathematik Überblick. S. 169 f.

Des Weiteren besitzt jede Sinuskurve eine zur x-Achse senkrechte Symmetrieachse im Punkt  $(\frac{\pi}{2}; 0)$ .<sup>27</sup> Noch allgemeiner formuliert lässt sich sagen, dass die Sinuslinie axial-symmetrisch bezüglich jeder durch die Scheitelpunkte gehenden Normalen zur x-Achse ist, wobei die Koordinaten der Scheitelpunkte  $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; 1)$  sowie  $(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi; -1)$  für  $k \in \mathbb{Z}$  lauten.<sup>28</sup> Abbildung 7 zeigt eine der möglichen Symmetrieachsen.



**Abbildung 8: axialsymmetrische Sinuskurve (Verfasser)**

Dass Sinusfunktionen  $\sin(x)$  zu dem mit der Periode  $2\pi$  periodisch sind, veranschaulicht Abbildung 8.<sup>29</sup>



**Abbildung 7: periodische Sinuskurve (Verfasser)**

Demnach kann allgemein gesagt werden:

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi) = \sin(x + 4\pi) = \sin(x + 6\pi) = \dots$$

Kurz zusammengefasst lautet dieselbe Gleichung auch

$$\sin(x) = \sin(x + k \cdot 2\pi) \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}.^{30}$$

<sup>27</sup> Vgl. Hoffmann, Manfred: Großes Handbuch Mathematik. S. 240 f.

<sup>28</sup> Vgl. Kopp, Bernhard: Der große Mathematik Überblick. S. 106

<sup>29</sup> Vgl. Reinhardt, Fritz: Schulmathematik. S. 86 f.

Die Periodizität zählt mitunter zu den wichtigsten Eigenschaften von Winkelfunktionen, auch Kreis- oder trigonometrische Funktionen genannt, denen neben der Cosinus-, Tangens- und Kotangens-Funktion auch die Sinusfunktion angehört.

Überdies ist die Nullstelle aller Sinusfunktionen  $\sin(x)$  in dem Punkt  $N(k \cdot \pi; 0)$  fixiert.

Vollständigkeitshalber werden bei der Definition von Sinusschwingungen noch ihre Ableitungen  $\cos(x)$ ,  $-\sin(x)$ ,  $-\cos(x)$ ,  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$  usw. aufgezählt, die für das folgende Kapitel „Harmonische Schwingungen als Lösungen von Differenzialgleichungen“ von Bedeutung sind.<sup>31</sup>

---

<sup>30</sup> Vgl. Hoffmann, Manfred: Großes Handbuch Mathematik. S. 240 f.

<sup>31</sup> Vgl. Kempermann, Theo: Zahlentheoretische Kostproben. - Frankfurt am Main. Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH. 2005. S. 91

## 3 Harmonische Schwingungen als Lösung von Differentialgleichungen

### 3.1 Definition einer Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung, in der sowohl die Funktion  $f(x)$  als auch ihre Ableitung  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ ,... vorkommt. Als Lösung der Differentialgleichung oder einfach kurz Lösungsfunktion bezeichnet man all jene Funktionen  $f(x)$ , für welche die angegebene Differentialgleichung  $f'(x)$  gilt.<sup>32</sup>

Zum Beispiel gelten für die Funktion

$$g'(x) = \cos(x)$$

als Lösung der Differentialgleichung sowohl

$$g_1(x) = \sin(x)$$

als auch

$$g_2(x) = \sin(x) + 1$$

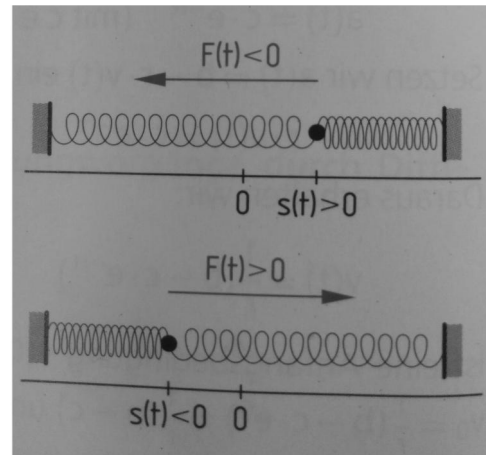
### 3.2 Differentialgleichungen bei Schwingungen

Um die Differentialgleichung für Schwingungen herzuleiten, wird das vereinfachte Beispiel eines Körpers angenommen, der durch zwei elastische Federn gehalten wird. Sobald dieser aus der Ruhelage gebracht wird, wirken rücktreibende Kräfte der Federn auf den Körper, die ihn wieder bis zur Ruhelage und darüber hinaus zurückbewegen.

---

<sup>32</sup> Vgl. Malle, Günther; Ramharter, Esther; Ulovec, Andreas; Kandl, Susanne: Mathematik verstehen 8. – Wien. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG. 2007. S. 122

Dadurch kommt es zur Schwingung des Körpers, welche durch die Zeit-Ort-Funktion  $s: t \rightarrow s(t)$  beschrieben werden kann. Dabei ist  $s(t)$  der positive beziehungsweise negative Abstand von der Ruhelage zum Zeitpunkt  $t$ , in der Physik als Elongation bekannt.  $F(t)$  steht hier für die Kraft, die zu eben diesem Zeitpunkt  $t$  rücktreibend auf den Körper wirkt, und daher immer das entgegengesetzte Vorzeichen wie die Elongation hat.



**Abbildung 9: Federpendel** (Malle, Günther; Ramharter, Esther; Ulovec, Andreas; Kandl, Susanne: *Mathematik verstehen* 8. S. 126)

Das für elastische Federn allgemein gültige HOOKE'sche Gesetz besagt nun:

$$F(t) = -k \cdot s(t) \quad \text{mit der Federkonstante } k > 0$$

Wegen der Gesetzmäßigkeit  $F = m \cdot a$  mit  $m$  als Variable für die Masse und  $a$  als Platzhalter für die Beschleunigung ergibt sich weiter:

$$m \cdot a(t) = -k \cdot s(t)$$

$$a(t) = \frac{-k}{m} \cdot s(t)$$

Setzt man den folgenden Zusammenhang zwischen der Beschleunigung  $a$  und der Auslenkung  $s$  mit  $a(t) = s''(t)$  als bekannt voraus, resultiert folgende Differenzialgleichung für die Elongation  $s$ :

$$s''(t) = \frac{-k}{m} \cdot s(t)$$

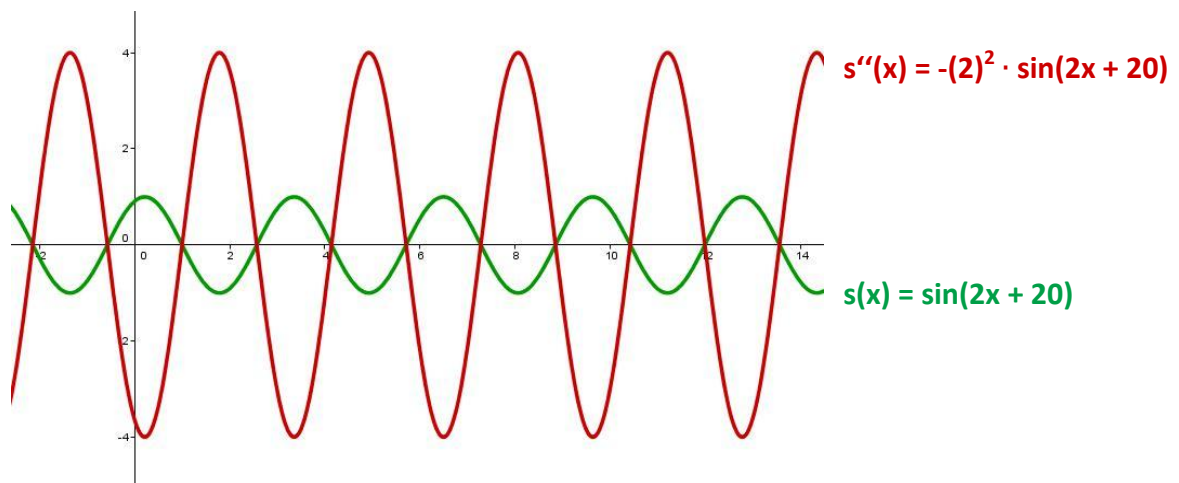


Um das Finden der Lösung zu vereinfachen, ersetzt man  $\frac{k}{m}$  mit der Kreisfrequenz  $\omega^2$  ( $\omega \in \mathbb{R}$ )<sup>33</sup>. Damit lässt sich eine Schwingung allgemein durch folgende Differentialgleichung beschreiben:

$$s''(t) = -\omega^2 \cdot s(t)$$

Bekannt ist, dass jede Lösung einer solchen Differentialgleichung  $s''(t) = -\omega^2 \cdot s(t)$  einer Schwingung von der Form  $s(t) = a \cdot \sin(\omega \cdot t + g) + b \cdot \cos(\omega \cdot t + g)$  entspricht.

Für den besonderen Fall einer harmonischen Schwingung gilt  $b = 0$ , weshalb die Lösungsfunktion letztlich  $s(t) = a \cdot \sin(\omega \cdot t + g)$  lautet.<sup>34</sup>



**Abbildung 10: Beispiel für eine harmonische Schwingung als Lösung einer Differentialgleichung (Verfasser)**

In Abbildung 10 wurden beispielhaft konkrete Werte für die Variablen eingesetzt.

$$a = 1 \qquad \omega = 2 \qquad g = 20 \qquad b = 0$$

---

<sup>33</sup> Vgl. Malle, Günther; Ramharter, Esther; Ulovec, Andreas; Kandl, Susanne: Mathematik verstehen 8. S. 126

<sup>34</sup> Vgl. ebd. S. 127

### 3.2.1 Gedämpfte Schwingungen

Bei gedämpften Schwingungen wird die Beschleunigung  $a(t) = s''(t)$  durch zum Beispiel Reibung direkt proportional zur jeweiligen Geschwindigkeit  $v(t)$  vermindert. Dieser Proportionalitätsfaktor unserer Gleichung drückt sich in  $r$  aus:

$$s''(t) = -\omega^2 \cdot s(t) - r \cdot v(t)$$

Nachdem  $v(t) = s'(t)$ , kann jene Gleichung auch wie folgt angeschrieben werden:

$$s''(t) + r \cdot s'(t) + \omega^2 \cdot s(t) = 0$$

Gedämpfte Schwingungen sind ein Beispiel für komplexere Arten von Schwingungen.

Die Lösung der Differenzialgleichung von gedämpften Schwingungen

$s''(t) + r \cdot s'(t) + \omega^2 \cdot s(t) = 0$  unterscheidet sich von der Zeit-Ort-Funktion harmonischer Schwingungen durch den Dämpfungsfaktor  $e^{-c \cdot t}$ , der zur Funktion  $s(t) = a \cdot \sin(t)$  folgendermaßen hinzukommt:

$$s(t) = a \cdot \sin(t) \cdot e^{-c \cdot t} \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}^{35}$$

Besonders in der Architektur spielt der Dämpfungsfaktor eine entscheidende Rolle. Das wohl einprägsamste Beispiel ist die Tacoma-Narrow-Brücke in Washington in den USA. 1940 erregte ihr spektakulärer Einsturz viel Aufmerksamkeit. Der Konstruktionsfehler lag in der zu geringen Dämpfung. Diese wurde auch wegen des instabilen Profils und der ungünstigen Windrichtung<sup>36</sup> am 7. November<sup>37</sup> durch die Luftkraft reduziert. Die Amplitude der selbsterregten Schwingung, also die Schwankung der Brücke, nahm infolge dessen immer weiter zu bis das Bauwerk schließlich einstürzte.<sup>38</sup> In YouTube kann sich jeder mit der Videoaufnahme unter dem Link

<http://www.youtube.com/watch?v=3mclp9QmCGs> selbst von dem eindrucksvollen

---

<sup>35</sup> Vgl. Malle, Günther; Ramharter, Esther; Ulovec, Andreas; Kandl, Susanne: Mathematik verstehen 8. S. 127

<sup>36</sup> Vgl. <http://www.ipu-bs.de/index.php?id=76> [Zugegriffen 21.02.2015]

<sup>37</sup> Vgl. <http://de.wikipedia.org/wiki/Tacoma-Narrows-Br%C3%BCcke> [Zugegriffen 21.02.2015]

<sup>38</sup> Vgl. <http://www.ipu-bs.de/index.php?id=76> [Zugegriffen 21.02.2015]

Einsturz der Tacoma-Narrow-Brücke überzeugen. Genauso wichtig ist der Dämpfungsfaktor bei Hochhäusern. Für einen Architekten stehen mehrere Varianten zur Auswahl. Sowohl spezielle Gebäudeformen als auch schwere Pendelsysteme oder Wassertanks führen bei richtigen Berechnungen zum Ziel.<sup>39</sup> In erdbebengefährdeten Gebieten können schwingungsdämpfende Bauweisen sogar lebensrettend sein.

### 3.2.2 Beispiel zur Veranschaulichung

Zeige, dass die Zeit-Ort-Funktion  $s(t) = 4 \cdot \sin(t) \cdot e^{-c \cdot t}$  eine Lösung der Differenzialgleichung  $s''(t) + r \cdot s'(t) + \omega^2 \cdot s(t) = 0$  mit dem Dämpfungsfaktor  $r = 1$  und  $\omega^2 = 1,25$  ist.<sup>40</sup>

$$s''(t) + s'(t) + 1,25 \cdot s(t) = 0$$

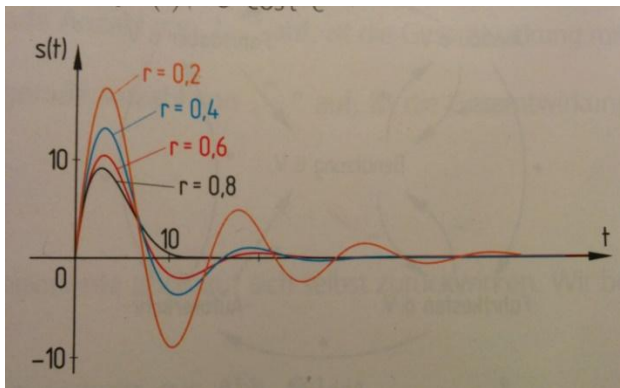
$$s'(t) = [4 \cdot \cos(t) - 2 \cdot \sin(t)] \cdot 0,606531 \cdot t$$

$$s''(t) = [(-4) \cdot \cos(t) - 3 \cdot \sin(t)] \cdot 0,606531 \cdot t$$

$$\{[(-4) \cdot \cos(t) - 3 \cdot \sin(t)] \cdot 0,606531 \cdot t\} + \{[4 \cdot \cos(t) - 2 \cdot \sin(t)] \cdot 0,606531 \cdot t\} + 4 \cdot \sin(t) = 0$$

$$0,606531 \cdot t \cdot [(-4) \cdot \cos(t) - 3 \cdot \sin(t) + 4 \cdot \cos(t) - 2 \cdot \sin(t)] + 4 \cdot \sin(t) = 0$$

$$0,606531 \cdot t \cdot [-5 \cdot \sin(t)] + 4 \cdot \sin(t) = 0 \quad \text{wahre Aussage}$$



**Abbildung 11: Einfluss des Proportionalitätsfaktors  $r$**  (Malle, Günther; Ramharter, Esther; Ulovec, Andreas; Kandl, Susanne: *Mathematik verstehen* 8. S. 127)

<sup>39</sup> Vgl. <http://de-de.sennheiser.com/bluestage-magazin-extreme-schwingungstilger-wolkenkratzer-balance> [Zugegriffen 21.02.2015]

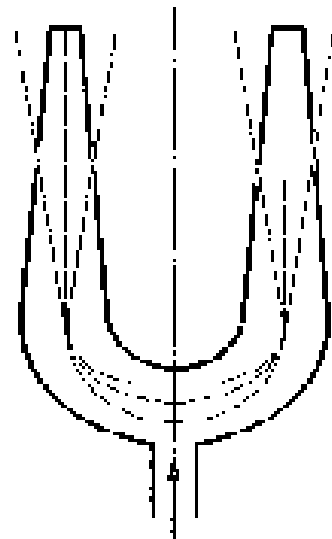
<sup>40</sup> Vgl. Malle, Günther; Ramharter, Esther; Ulovec, Andreas; Kandl, Susanne: *Mathematik verstehen* 8. S. 127

## 4 Alltag: harmonische Schwingungen in der Musik

### 4.1 Tonerzeugung

#### 4.1.1 Stimmgabel

Zum Stimmen der Instrumente besonders im Orchester wird gerne eine Stimmgabel verwendet. Das Spezielle an diesem Instrument ist, dass es beim Anschlagen einen fast „reinen“ Ton erzeugt<sup>41</sup>, das heißt eine einzelne Sinusschwingung. Bei den meisten Übrigen setzt sich ein Klang im Vergleich dazu aus einer Grundschwingung und mehreren Obertönen zusammen.<sup>42</sup> Bei der Stimmgabel entsteht das Audiosignal durch die in relativ schnelle Schwingungen versetzte Zinken wie in Abbildung 12. Das nach außen Schwingen verdichtet die umgebende Luft, während zwischen den Zinken eine Verdünnung auftritt. Zumal jeder elastische feste Körper nach Ruhelage strebt, tritt eine Wechselwirkung der Bewegung nach außen beziehungsweise innen und somit Schwingungen auf, welche den Ton hörbar machen.<sup>43</sup>



**Abbildung 12: schwingende Zinken einer Stimmgabel**  
(<http://www.musikakustik.de/arbeit1.htm>)

Mit Hilfe eines Mikrofons und eines Oszilloskops können diese Luftverdrichtungen und -verdünnungen aufgenommen und visuell als Schwingung dargestellt werden.

Die mathematische Beschreibung solch eines Tones lautet

$$y(t) = y_m \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$$

---

<sup>41</sup> Vgl. <http://www.tphys.uni-heidelberg.de/~huefner/PhysikUeberall/V09S.pdf> [Zugegriffen 05.10.2014]

<sup>42</sup> Vgl. [http://www.laermorama.ch/m1\\_akustik/tonklang\\_w.html](http://www.laermorama.ch/m1_akustik/tonklang_w.html) [Zugegriffen 25.10.2014]

<sup>43</sup> Vgl. <http://www.musikakustik.de/arbeit1.htm> [Zugegriffen 25.10.2014]

Hierbei kann  $y(t)$  sowohl der momentanen Auslenkung der schwingenden Stimmgabel zum Zeitpunkt  $t$  als auch dem momentanen Schallwechseldruck in der umliegenden Luft entsprechen.  $y_m$  ist der Wert für die größte Auslenkung, die Amplitude, die für die Lautstärke verantwortlich ist. Für die Tonhöhe entscheidend ist die Frequenz  $f$ .<sup>44</sup> Die im Musikeralltag am häufigsten verwendete Stimmgabel ertönt im eingestrichenen a (auch a´) mit einer Frequenz von 440 Hertz. Bekannt ist dieser Ton unter dem Namen Kammerton, für dessen allgemeine Festlegung 1939 extra eine internationale Stimmkonferenz von der „International Federation of the National Standardizing Associations“ in London abgehalten wurde.<sup>45</sup>

#### 4.1.2 Saiteninstrumente

Das Prinzip der Tonerzeugung funktioniert bei allen Saiteninstrumenten wie zum Beispiel der Geige, der Gitarre, der Zither, dem Klavier oder dem Hackbrett<sup>46</sup> gleich. Die Saiten sind am Anfang und am Ende fixiert und schwingen folglich zwischen diesen beiden Punkten. Das ist der Unterschied in der Tonerzeugung bei Saiteninstrumenten im Vergleich zur Stimmgabel, bei welcher sich die ganzen Zinken einschließlich der Spitzen frei hin und her bewegen können.<sup>47</sup>

Durch zupfen, streichen oder anschlagen<sup>48</sup> werden die Saiten in Schwingungen versetzt. Die Höhe des gespielten Tones ist abhängig von der Dicke, der Länge, dem Material und der Kraft  $F$ , mit der eine Saite gespannt ist.<sup>49</sup> Auf Grund dessen werden die Saiten beim Stimmen beispielsweise einer Gitarre durch drehen der Wirbel verlängert oder verkürzt. Mit zunehmender Dehnung der Saite erhöht sich die Spannung und folglich ihre Klanghöhe.

---

<sup>44</sup> Vgl. <http://www.tphys.uni-heidelberg.de/~huefner/PhysikUeberall/V09S.pdf> [Zugegriffen 5.10.2014]

<sup>45</sup> Vgl. <http://de.wikipedia.org/wiki/Kammerton> [Zugegriffen 25.10.2014]

<sup>46</sup> Vgl. <http://www.musik-steiermark.at/musikkunde/saiteninstrumente.htm>

<sup>47</sup> Vgl. <http://www.tphys.uni-heidelberg.de/~huefner/PhysikUeberall/V09S.pdf> [Zugegriffen 25.10.2014]

<sup>48</sup> Vgl. <http://www.musik-steiermark.at/musikkunde/saiteninstrumente.htm> [Zugegriffen 25.10.14]

<sup>49</sup> Vgl. <http://www.tphys.uni-heidelberg.de/~huefner/PhysikUeberall/V09S.pdf> [Zugegriffen 25.10.2014]

Daraus resultiert eine höhere Frequenz, die mit folgender Formel errechnet werden kann:

$$f = 0,5 \cdot \left(\frac{F}{l \cdot m}\right)^{0,5}$$

Diese Gleichung zeigt die Abhängigkeit der Frequenz  $f$  von der Kraft  $F$ , ein Maß für die Stärke der Saitenspannung, der Länge  $l$  und ihrer Masse  $m$ .<sup>50</sup> Die Tonhöhe wird allerdings nicht davon beeinflusst, wie stark man eine Saite anschlägt. Dies verändert ausschließlich die Lautstärke des Klanges.

Die Schwingungsbewegung beeinflusst nicht nur die unmittelbar umliegenden Luftmassen der Saiten, sondern auch den Klangkörper (ebenso Resonanzkörper genannt).<sup>51</sup> Bei dieser Instrumentenfamilie sind die Form und die Größe des Korpus unveränderlich. Dieser verstärkt den gesamten Tonumfang eines Klanges<sup>52</sup>, um ihn für das menschliche Gehör deutlicher erkennbar zu machen.<sup>53</sup>

### 4.1.3 Blasinstrumente

Das Phänomen der Tonerzeugung bei Blasinstrumenten wird hier am Beispiel des Holzblasinstrumentes Querflöte<sup>54</sup> näher erläutert.

Um einen Klang zu erzeugen, bläst der Querflötist direkt auf die Kante des Anblasloches, wodurch sich der Luftstrom bricht, in regelmäßige Wirbel gerät<sup>55</sup> und die Luftteil-

---

<sup>50</sup> Vgl. <http://www.tphys.uni-heidelberg.de/~huefner/PhysikUeberall/V09S.pdf> [Zugegriffen 25.10.2014]

<sup>51</sup> Vgl.

[http://www.google.at/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&cad=rja&uact=8&ved=0CCsQFjAC&url=http%3A%2F%2Fphysik.uibk.ac.at%2Fdidaktik%2Fakustik%2F5-Fal-ger\\_Musik.ppt&ei=6bNLVNfEGab4ywOe1YGwCQ&usg=AFQjCNG2S6WgFXoSg5\\_gtfFj5FKs39RJNQ&bvm=bv.77880786,d.bGQ](http://www.google.at/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&cad=rja&uact=8&ved=0CCsQFjAC&url=http%3A%2F%2Fphysik.uibk.ac.at%2Fdidaktik%2Fakustik%2F5-Fal-ger_Musik.ppt&ei=6bNLVNfEGab4ywOe1YGwCQ&usg=AFQjCNG2S6WgFXoSg5_gtfFj5FKs39RJNQ&bvm=bv.77880786,d.bGQ) [Zugegriffen 25.10.2014]

<sup>52</sup> Vgl. <http://www.flutepage.de/deutsch/goodies/physik.php> [Zugegriffen 11.11.2014]

<sup>53</sup> Vgl.

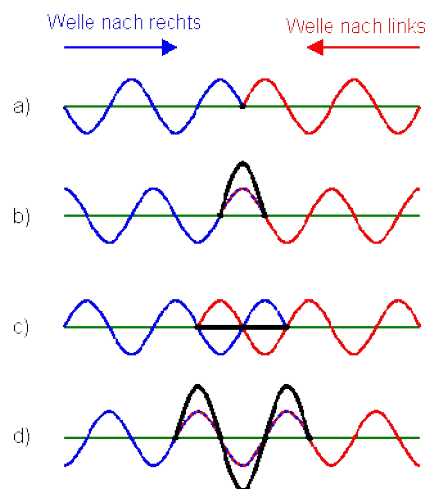
[http://www.google.at/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&cad=rja&uact=8&ved=0CCsQFjAC&url=http%3A%2F%2Fphysik.uibk.ac.at%2Fdidaktik%2Fakustik%2F5-Fal-ger\\_Musik.ppt&ei=6bNLVNfEGab4ywOe1YGwCQ&usg=AFQjCNG2S6WgFXoSg5\\_gtfFj5FKs39RJNQ&bvm=bv.77880786,d.bGQ](http://www.google.at/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&cad=rja&uact=8&ved=0CCsQFjAC&url=http%3A%2F%2Fphysik.uibk.ac.at%2Fdidaktik%2Fakustik%2F5-Fal-ger_Musik.ppt&ei=6bNLVNfEGab4ywOe1YGwCQ&usg=AFQjCNG2S6WgFXoSg5_gtfFj5FKs39RJNQ&bvm=bv.77880786,d.bGQ) [Zugegriffen 25.10.2014]

<sup>54</sup> Vgl. <http://www.danner.at/de/instrumente/produkte/holzblas.html> [Zugegriffen 11.11.2014]

chen im Flötenrohr in Schwingungen versetzt.<sup>56</sup> Mit Hilfe eines Oszilloskops kann diese Welle als Graf einer harmonischen Schwingung aufgezeichnet werden. Jene Bewegung der Luftteilchen pflanzt sich in Richtung offenes Fußende der Querflöte fort. Dort wird sie wegen des beinahe unendlichen Querschnittsprunges des Rohrs<sup>57</sup> fast vollständig reflektiert, denn am Ende der Flöte haben die Luftmoleküle auf einmal Platz sich in alle Richtungen frei zu bewegen. Dadurch entsteht direkt vor der Öffnung eine Art Unterdruck. Um diesen auszugleichen werden die Luftmoleküle wieder zurückgezogen und eine Schallwelle in die entgegengesetzte Richtung wird ausgelöst.<sup>58</sup> So kommt es zur Überlagerung zweier gegenläufiger Wellen mit derselben Amplitude und Frequenz.

Daraus resultiert physikalisch gesehen eine sogenannte stehende Welle, die in der Akustik unter dem Namen akustisches Feld bekannt ist.<sup>59</sup>

Entscheidende Merkmale solcher stehenden Wellen sind die Schwingungsknoten und -bäuche.<sup>60</sup> In einem Grafen übersetzt befinden sich die Schwingungsknoten bei den Nulldurchgängen, sprich die Amplitude ist immer Null.<sup>61</sup> Diese findet man bei einer Flöte am Anfang und am Ende der Luftsäule<sup>62</sup>, weil die gegenläufigen Wellen um 180° phasenverschoben sind. An Hand der Abbildung 13 kann die Entstehung einer stehenden Welle schrittweise nachvollzogen werden. In a) treffen



**Abbildung 13: Entstehung einer stehenden Welle**  
([http://daten.didaktikchemie.uni-bayreuth.de/umat/wellen\\_mechanisch/wellen\\_mechanisch.htm](http://daten.didaktikchemie.uni-bayreuth.de/umat/wellen_mechanisch/wellen_mechanisch.htm))

<sup>55</sup> Vgl. <http://www.musik-kunstschule.de/cms/index.php?querfloete> [Zugegriffen 11.11.14]

<sup>56</sup> Vgl. <http://www.flutepage.de/deutsch/goodies/physik.php> [Zugegriffen 11.11.14]

<sup>57</sup> Vgl. <http://www.sengpielaudio.com/StehendeWellen.htm> [Zugegriffen 30.12.14]

<sup>58</sup> Vgl. Quellhorst Anna: Physik der Blasinstrumente. – München. GRIN Verlag GmbH. 2000. S. 9

<sup>59</sup> Vgl. [www.physik.uni-freiburg.de/~fromm/uni/PIVppt.pdf](http://www.physik.uni-freiburg.de/~fromm/uni/PIVppt.pdf) [Zugegriffen 30.12.14]

<sup>60</sup> Vgl. Kuypers, Friedhelm: Physik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. – Weinheim. VILEY-VCH Verlag GmbH & co. KgaA. 2003. S. 290 f.

<sup>61</sup> Vgl. [http://daten.didaktikchemie.uni-bayreuth.de/umat/wellen\\_mechanisch/wellen\\_mechanisch.htm](http://daten.didaktikchemie.uni-bayreuth.de/umat/wellen_mechanisch/wellen_mechanisch.htm) [Zugegriffen 15.02.2015]

<sup>62</sup> Vgl. <http://www.sengpielaudio.com/StehendeWellen.htm> [Zugegriffen 30.12.14]

die ursprüngliche Welle (blau gekennzeichnet) und die reflektierte (rot dargestellt) aufeinander. In dem Moment, in welchem sie sich überlagern (Abschnitt b) in Abbildung 13), kommt es zur Interferenz. Das Resultat ist eine stehende Welle mit fixen Wellenknoten, die sich bei einer gewissen Frequenz immer an derselben Stelle befinden.<sup>63</sup> Die Schwingungsbäuche zwischen den Schwingungsknoten hingegen variieren stetig. Die Amplitude schwankt dabei vom Minimum zum Maximum und so weiter.<sup>64</sup> In c) und d) werden die zwei Extremfälle der Schwingungsbäuche dargestellt. Im ersten Fall löschen sich die aufeinandertreffenden Wellen völlig aus. Im zweiten schwellen sie zur doppelten Amplitude einer einzelnen Welle an.

Im Gegensatz zu Saiteninstrumenten zählen Blasinstrumente zu den sogenannten Luftraumresonatoren. Mit Hilfe von Klappen, Zügen oder verschieden langen Pfeifen wie bei der Orgel wird die Länge des Resonanzkörpers an den gewünschten Ton angepasst.<sup>65</sup> Sind alle Klappen geschlossen, so ertönt beim Anblasen der tiefst mögliche Ton der Querflöte. Mit dem Öffnen einer Klappe verändert sich der Schallwellendruck. Die Luftmoleküle können nun schon vor dem Röhrende nach draußen entweichen, sodass bereits an diesem Klappenloch eine reflektierte Welle entsteht.<sup>66</sup> Um den höchsten Ton zu spielen, müssen alle Klappen geöffnet sein, damit im akustischen Feld die für die Flöte größtmögliche Anzahl an Wellenknoten vorhanden ist. Das entspricht dann dem Klang mit der größten Frequenz. Spannend ist, dass sich die Frequenz mit stärkerem Hineinblasen solange nur geringfügig verändert, bis der Druck so groß ist, dass der Klang plötzlich um eine ganze Oktave höher wird. Diese Methode nennt sich unter Musikern Überblasen.

---

<sup>63</sup> Vgl. [http://daten.didaktikchemie.uni-bayreuth.de/umat/wellen\\_mechanisch/wellen\\_mechanisch.htm](http://daten.didaktikchemie.uni-bayreuth.de/umat/wellen_mechanisch/wellen_mechanisch.htm) [Zugegriffen 15.02.2015]

<sup>64</sup> Vgl. Kuypers, Friedhelm: Physik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. S. 290

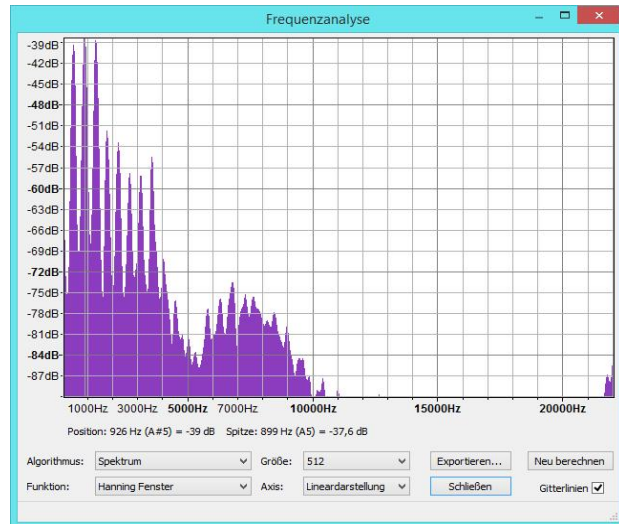
<sup>65</sup> Vgl. <http://www.flutepage.de/deutsch/goodies/physik.php> [Zugegriffen 11.11.14]

<sup>66</sup> Vgl. Quellhorst Anna: Physik der Blasinstrumente. S. 10

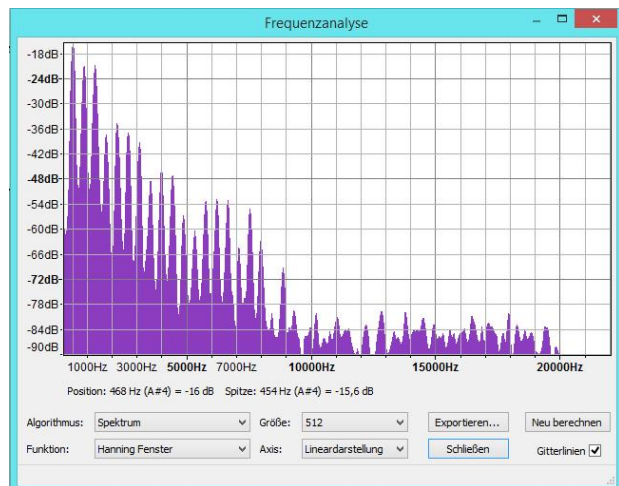


## 4.2 Klangfarbe

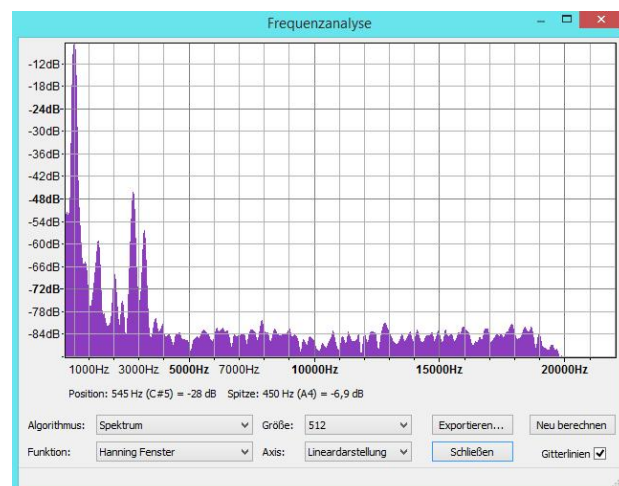
Der klangliche Unterschied zwischen einem von unterschiedlichen Instrumenten gespielten gleichen Ton ist die Klangfarbe. Dieser Begriff impliziert alle Oberschwingungen und beschreibt ihren Einfluss auf den gehörten Klang. In Abbildung 14 wird beispielsweise die Lautstärke der einzelnen Schwingungen, aus denen sich das hier gespielte a' der Querflöte zusammensetzt, dargestellt. In diesem Fall ist die Grafik die automatische Auswertung einer Aufnahme im Programm Audacity. Im Vergleich dazu zeigt Abbildung 15 das Spektrum eines Saxophons. In der Gegenüberstellung fällt auf, dass das Frequenzspektrum einer Querflöte deutlich geringer ist als jenes von einem Saxophon oder einer Kalimba. Der für die Klangfarbe entscheidende Unterschied ist allerdings die Anzahl der dominanten Oberschwingungen. Bei der Querflöte finden sich acht auffällig laute Frequenzen, wobei die Schwingung mit 899 Hz eindeutig am meisten Einfluss auf den Klang hat. Bei der Kalimba dagegen sind alle anderen



**Abbildung 14: Frequenzanalyse einer Querflöte (Verfasser)**



**Abbildung 15: Frequenzanalyse eines Saxophons (Verfasser)**



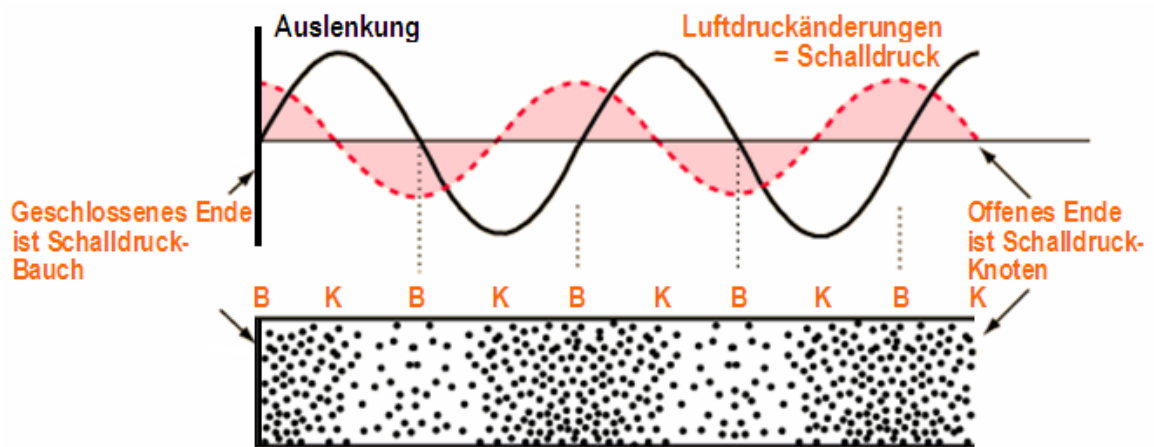
**Abbildung 16: Frequenzanalyse einer Kalimba (Verfasser)**

Teilschwingungen abgesehen von fünf lauteren verschwindend leise. Deshalb verändern die Oberschwingungen den Graf der aufgezeichneten Schwingung bei der Überlagerung nur wenig und er wirkt fast wie eine reine Sinuskurve.<sup>67</sup>

### 4.3 Schallausbreitung

Töne sowie Klänge breiten sich als Schall aus, der wiederum mit Hilfe von Sinusschwingungen dargestellt werden kann.

Schallwellen sind Verdichtungen und Verdünnungen in einer Materie. In dieser Arbeit ist die Ausbreitung in der Luft entscheidend, durch die die Musik ans Ohr dringt. Der Schallwechseldruck beschreibt die Druckschwankungen. Dieser wird aus der Differenz vom wechselnden Druck im Schallfeld und dem konstanten Atmosphärendruck, also dem Luftdruck ohne Schall, errechnet.<sup>68</sup> Abbildung 17 stellt den Schallwechseldruck und die Auslenkung der Luftmoleküle anschaulich in Vergleich.



**Abbildung 17: Schallwechseldruck und Auslenkung der Luftmolekülen**  
(<http://forum.physik-lab.de/ftopic9154.html>)

<sup>67</sup> Gangl Peter, Vortrag: Numerische Mathematik. Gehalten im Schloss Weinberg, 09.02.2015.

<sup>68</sup> Vgl. Kuypers, Friedhelm: Physik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. S. 409

Ein Audiosignal breitet sich in einem idealen Gas wie beispielsweise der Luft unter Normalbedingungen mit der Schallgeschwindigkeit  $c$

$$c = \sqrt{\gamma \cdot \frac{p}{\rho}}$$

aus.  $\gamma$  wird Adiabatenexponent oder auch Isentropenexponent genannt<sup>69</sup>, denn er beschreibt die isentrope Zustandsänderung eines idealen Gases<sup>70</sup> und sein Wert beträgt bei trockener Luft 1,40.<sup>71</sup>  $p$  ist die Variable für den Druck.<sup>72</sup> Die Molmasse der Luft ist circa  $M_{\text{Luft}} = 28,98 \text{ g/mol}$ . Mit Hilfe der idealen Gasgleichung kommt man schließlich zu folgender Zahl:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{R \cdot T / V}{M_{\text{Luft}} / V} = 286,90 \frac{\text{m}^2}{(\text{s}^2 \cdot \text{K})} \cdot T \quad ^{73}$$

In dieser Formel steht  $T$  für die absolute Temperatur,  $V$  für das Volumen und  $R$  für die universelle Gaskonstante mit einem Wert von  $8,3144621 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .<sup>74</sup>

Zusammen mit einer Normaltemperatur  $T$  von 293,15 K, was im europäischen Verständnis 20° C bedeutet, in die Gleichung der Schallgeschwindigkeit  $c$  eingesetzt, ergibt die allseits bekannte Zahl

$$c \cong 20,04 \frac{\text{m}}{\text{s} \cdot \text{K}_1/2} \cdot \sqrt{293,15} \cong 343 \text{ m/s} \quad ^{75}$$

Sitzt der Zuhörer im Open-air-Concert, also beispielsweise zirka 17 m vom Querflötisten entfernt, so hört er den Klang der Flöte erst nach ungefähr einer zwanzigstel Sekunde. Der Schall bewegt sich in der Luft allerdings so schnell, dass es dem menschl-

---

<sup>69</sup> Vgl. Kuypers, Friedhelm: Physik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. S. 409

<sup>70</sup> Vgl. <http://www.chemie.de/lexikon/Isentropenexponent.html> [Zugegriffen 03.01.15]

<sup>71</sup> Vgl. Kuypers, Friedhelm: Physik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. S. 409

<sup>72</sup> Vgl. [http://de.m.wikipedia.org/wiki/Ideales\\_Gas](http://de.m.wikipedia.org/wiki/Ideales_Gas) [Zugegriffen 03.01.15]

<sup>73</sup> Vgl. Kuypers, Friedhelm: Physik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. S. 409

<sup>74</sup> Vgl. [http://de.m.wikipedia.org/wiki/Ideales\\_Gas](http://de.m.wikipedia.org/wiki/Ideales_Gas) [Zugegriffen 03.01.15]

<sup>75</sup> Vgl. <http://de.m.wikipedia.org/wiki/Schallgeschwindigkeit> [Zugegriffen 03.01.15]

chen Auge und Gehör nicht möglich ist, die Verzögerung vom Anspielen eines Tones bis zur Wahrnehmung des Ohres zu bemerken.

Ändert sich auch nur eine Komponente wie die Temperatur oder auch das Medium in der Formel, resultiert eine andere Schallgeschwindigkeit. Schon als Kind durfte man darüber staunen, wie schnell sich die eigene Stimme plötzlich ändern kann. Mit dem Einatmen von Heliumgas steigert sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit. Bei konstanter Wellenlänge erhöht sich dadurch die Frequenz und die eigene Tonlage klingt so hoch wie die von Mickey-Mouse.<sup>76</sup>

#### 4.4 Zusammenspiel der Instrumente – Überlagerung von Schwingungen

Das Thema harmonische Schwingungen in der Musik ist vielfältig und facettenreich. Aufbauend auf die bisherigen Kapitel „Tonerzeugung“, „Klangfarbe“ und „Schallausbreitung“ wird im folgenden Abschnitt nicht nur ein einzelnes Instrument, sondern das Zusammenspiel einiger Musiker behandelt. An dieser Stelle stellt sich die spannende Frage, was bei der Überlagerung mehrerer Schwingungen passiert.

Die Voraussetzung für ein im musikalischen Sinne harmonisches Zusammenspiel ist das Stimmen aller Instrumente aufeinander. Das bedeutet, dass der Kammerton a' bei allen dieselbe Frequenz von 440 Hz haben muss. Hierfür gilt das Stimmgerät als die präziseste Methode. Um das mathematische Prinzip dieses Hilfsmittels verstehen zu können, wird in diesem Kapitel das Basiswissen vermittelt.

Wellen überlagern sich im Allgemeinen ungestört.<sup>77</sup> In diesem Zusammenhang bedeutet das, dass sich die zwei Wellen nach ihrer Begegnung zu einer bestimmten Zeit an einem bestimmten Ort im Normalfall so verhalten, als wären sie nie auf einander getroffen. Sie folgen auch nach ihrem Zusammentreffen noch derselben Gesetzmäßigkeit

---

<sup>76</sup> Vgl. [http://web.utahnet.at/haukepet/Schwingungslehre/physik\\_s05.htm](http://web.utahnet.at/haukepet/Schwingungslehre/physik_s05.htm) [Zugegriffen 17.02.2015]

<sup>77</sup> Vgl. Kuypers, Friedhelm: Physik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. S. 289

wie beispielsweise ihrer Cosinus-Form mit ihrer Frequenz und Amplitude.<sup>78</sup> Eines der anschaulichsten und alltagsnahen Beispiele sind Wasserwellen. Experimentierfreudige können ganz einfach selbst die ungestörte Überlagerung von Wasserwellen wie in Abbildung 18 ausprobieren. Dasselbe Prinzip gilt gleichermaßen für alle Arten von Wellen, unter anderem Schallwellen.<sup>79</sup>

Deshalb ist es beispielsweise möglich, zwei gleichzeitig sprechende Personen verstehen zu können.<sup>80</sup> In dem Moment, in dem sich allerdings mehrere (Schall)Wellen zur selben Zeit am selben Ort befinden, überlagern sie sich. Mathematisch bedeutet das eine Addition der Erregungen. Dieses Phänomen nennt sich in der Physik Interferenz oder auch Superposition.<sup>81</sup>



**Abbildung 18: ungestörte Überlagerung von Wasserwellen**  
(<http://schulphysik.ch/inline/html/Wellen/>)

Das einfachste Beispiel besteht aus zwei sich überlagernden, ebenen harmonischen Wellen mit gleicher Frequenz. Diese laufen in dieselbe Richtung, in dem unten stehenden Beispiel die positive x-Richtung im Koordinatensystem. Ist die Anfangsphase der einen Welle gleich Null, so findet man mit Hilfe eines Additionstheorems die folgende Gleichung zur Berechnung der Interferenz zum Zeitpunkt t:

$$A_1 \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t) + A_2 \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t - \varphi) = A \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t - \delta)$$

mit

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(\varphi)}$$

und

$$\tan(\delta) = \frac{A_2 \cdot \sin(\varphi)}{A_1 + A_2 \cdot \cos(\varphi)}$$

<sup>78</sup> Vgl. Kuypers, Friedhelm: Physik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. S. 289

<sup>79</sup> Vgl. <http://schulphysik.ch/inline/html/Wellen/> [Zugegriffen 21.02.2015]

<sup>80</sup> Vgl. [http://schulphysikwiki.de/index.php/Interferenz; %C3%9Cberlagerung von Wellen](http://schulphysikwiki.de/index.php/Interferenz;_%C3%9Cberlagerung_von_Wellen) [Zugegriffen 19.02.2015]

<sup>81</sup> Vgl. Kuypers, Friedhelm: Physik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. S. 289

Die Variable  $x$  repräsentiert in diesem Zusammenhang den Ort entlang der  $x$ -Achse,  $k$  die sogenannte Wellenzahl,  $\omega$  steht für die Kreisfrequenz und  $\varphi$  für die Phasenverschiebung. Das Ergebnis der Überlagerung dieser beiden Wellen ergibt eine dritte ebenfalls ebene Welle mit derselben Frequenz und seiner Amplitude  $A$  bei den Schnittpunkten der zwei Ausgangswellen. Die höchsten Punkte des Resultats der Superposition hängen unter anderem vom Phasenunterschied  $\varphi$  ab. Demnach gibt es zwei Extremfälle:

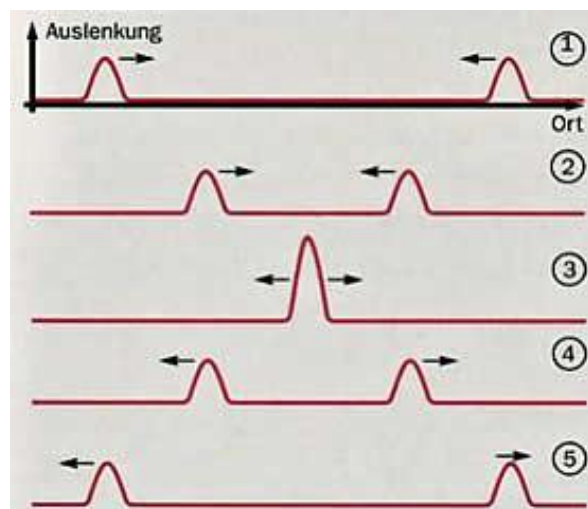
$$1) \varphi = n \cdot 2 \cdot \pi \quad \text{mit } n = 0, \pm 1, \dots$$

Daraus folgt

$$A = A_1 + A_2$$

In der Fachsprache ist dieser Fall unter konstruktiver Interferenz bekannt.<sup>82</sup>

Zwei Wellen verstärken sich gegenseitig, sodass die höchst mögliche Amplitude entsteht<sup>83</sup>, ein sogenanntes Interferenzmaximum<sup>84</sup>, wie das bei 3 in Abbildung 19 der Fall ist. An dieser Grafik ist zudem sehr gut zu sehen, dass die Amplituden der zwei Wellen nach ihrer Begegnung wieder die ursprüngliche Höhe annehmen.



**Abbildung 19: konstruktive Interferenz**  
(<http://schulphysik.ch/inline/html/Wellen/>)

$$2) \varphi = (2n + 1) \cdot \pi \quad \text{mit } n = 0, \pm 1, \dots$$

<sup>82</sup> Vgl. Kuypers, Friedhelm: Physik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. S. 290

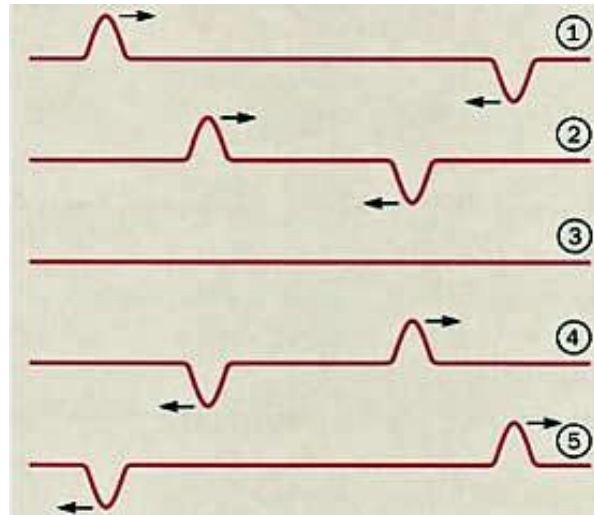
<sup>83</sup> Vgl. Universaldenker: Schwebung aus der Akustik | Physik fürs Abitur [Video] In: [http://www.youtube.com/watch?v=aUV8gxeAa\\_o](http://www.youtube.com/watch?v=aUV8gxeAa_o) [Stand: 04.01.15], TC 0:49

<sup>84</sup> Vgl. [http://www.elsenbruch.info/ph12\\_down/schwing\\_well.pdf](http://www.elsenbruch.info/ph12_down/schwing_well.pdf) [Zugegriffen 04.01.15]

Daher ergibt sich

$$A = |A_1 - A_2|$$

Im zweiten Fall liegt eine destruktive Interferenz vor.<sup>85</sup> Das bedeutet, dass zu dieser gewissen Zeit an diesem gewissen Ort ein Interferenzminimum erreicht wird.<sup>86</sup> Hier ist es sogar möglich, den ersten Ton mit Hilfe des zweiten Tons völlig auszulöschen, so dass, obwohl beide Wellen vorhanden sind, nichts hörbar ist<sup>87</sup>, wie es bei 3 in Abbildung 20 der Fall ist. Im Alltag wird diese Technik beispielsweise auch verwendet um dem Tinnitus entgegenzuwirken. Seit 2011 macht sich auch der große Autohersteller Audi die Vorteile der destruktiven Interferenz zur Minimierung der Lärmbelastigung durch den Motor zu Nutzen.



**Abbildung 20: destruktive Interferenz**  
(<http://schulphysik.ch/inline/html/Wellen/>)

Beim Zusammenspiel mehrerer Instrumente ist die größte Herausforderung die Intonation. Spielen beispielsweise zwei Querflöten gleichzeitig den Kammerton a', sollte es für den Zuhörer im Idealfall wie der Klang eines einzigen Instruments klingen. Sind jedoch beide leicht unterschiedlich gestimmt und die Frequenzen der gespielten Töne weichen geringfügig voneinander ab, so kommt es zu dem für das menschliche Gehör schier unerträglichen Phänomen der Schwebung. Jeder, egal ob musikalisch geschult oder nicht, empfindet diese Disharmonie als äußerst unangenehm. Die Interferenz-

---

<sup>85</sup> Vgl. Kuypers, Friedhelm: Physik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. S. S. 290

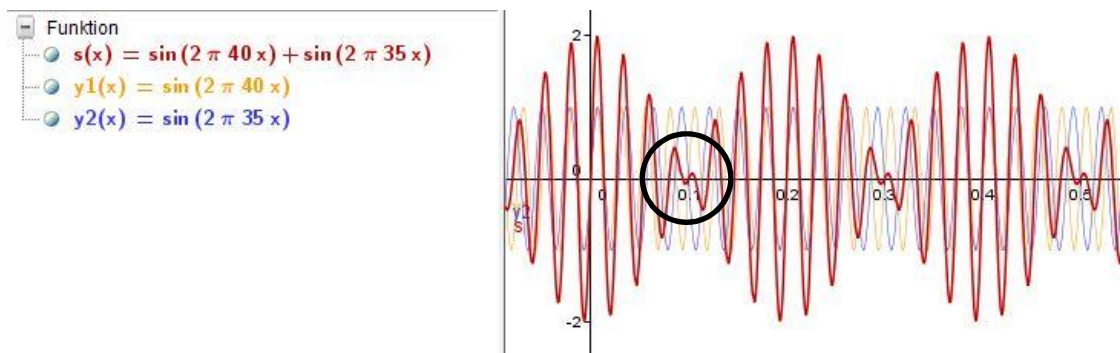
<sup>86</sup> Vgl. [http://www.elsenbruch.info/ph12\\_down/schwing\\_well.pdf](http://www.elsenbruch.info/ph12_down/schwing_well.pdf) [Zugegriffen 04.01.15]

<sup>87</sup> Vgl. Universaldenker: Schwebung aus der Akustik | Physik fürs Abitur [Video] In: [http://www.youtube.com/watch?v=aUV8gxeAa\\_o](http://www.youtube.com/watch?v=aUV8gxeAa_o) [Stand: 04.01.15], TC 1:48



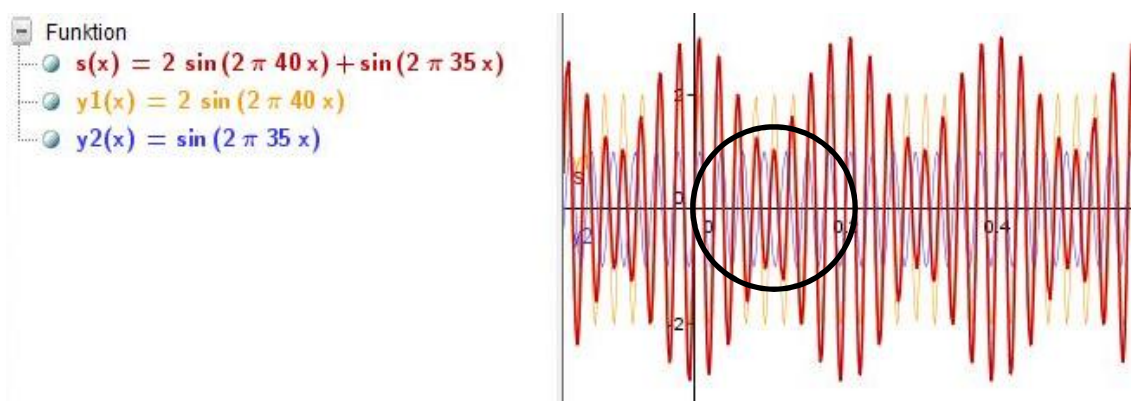
Welle, die in diesem Fall entsteht, ist durch ihr typisches An- und Abschwellen leicht erkennbar.

Eine Schwebung entsteht also folgendermaßen: Zwei Töne, die sich nur geringfügig in ihrer Frequenz unterscheiden, überlagern sich, sodass eine Schwankung der Amplitude entsteht. Sind die Extrempunkte zweier Wellen gleich groß, so sinkt die Amplitude der resultierenden Schwebung bis auf Null, wie beispielsweise in Abbildung 21 im schwarzen Kreis verdeutlicht ist.



**Abbildung 22: reine Schwebung** (Verfasser)

Haben die Schwingungen allerdings unterschiedliche Lautstärken, so löschen sie sich niemals vollständig aus. Dieser Fall nennt sich unreine Schwebung.<sup>88</sup> In Abbildung 22 kann man den eingekreisten Unterschied zu Abbildung 21 deutlich erkennen.



**Abbildung 21: unreine Schwebung** (Verfasser)

<sup>88</sup> Vgl. Universaldenker: Schwebung aus der Akustik | Physik fürs Abitur [Video] IN: [http://www.youtube.com/watch?v=aUV8gxeAa\\_o](http://www.youtube.com/watch?v=aUV8gxeAa_o) [Stand: 04.01.15], TC 5:03



Die mathematische Erklärung für das Phänomen der Schwebung lautet wie folgt: In der Ausgangssituation geht man von zwei harmonische Schwingungen  $y_1$  und  $y_2$  mit leicht voneinander abweichenden Frequenzen aus.

$$y_1(t) = A_1 \cdot \sin(2\pi \cdot f_1 \cdot t)$$

$$y_2(t) = A_2 \cdot \sin(2\pi \cdot f_2 \cdot t)$$

Zur Vereinfachung wird hier angenommen, dass  $y_1$  und  $y_2$  dieselben Amplituden haben.

$$A_1 = A_2 = A \quad ^{89}$$

Nachdem die Interferenz die Addition der beiden Anfangsschwingungen bedeutet, kann die Resultierende als

$$s(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

angeschrieben werden.<sup>90</sup>

Durch Anwendung der Additionstheoreme kann  $s(t)$  umgeformt und in der folgenden Formel ausgedrückt werden:

$$s(t) = 2 \cdot A \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{f_1 + f_2}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{f_1 - f_2}{2} \cdot t\right)$$

Anders angeordnet ist  $s(t)$  gleich

$$s(t) = 2 \cdot A \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{f_1 - f_2}{2} \cdot t\right) \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{f_1 + f_2}{2} \cdot t\right)$$

Hier ist die resultierende Frequenz erkennbar:

$$f_{\text{res}} = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

$f_{\text{res}}$  beschreibt die Höhe des gehörten Tons und ist mathematisch gesehen immer das arithmetische Mittel der Ausgangsfrequenzen  $f_1$  und  $f_2$ .

---

<sup>89</sup> Vgl. <http://www.abi-physik.de/buch/wellen/schwebung/> [Zugegriffen 05.01.15]

<sup>90</sup> Vgl. <http://www.leifiphysik.de/themenbereiche/akustische-wellen> [Zugegriffen 04.01.15]

Weil die allgemeine Formel einer Schwingung als

$$\text{Schwingung(Zeit)} = \text{Amplitude} \cdot \sin(2\pi \cdot \text{Frequenz} \cdot \text{Zeit})$$

definiert ist, kann aus der zuvor hergeleiteten Form

$$s(t) = 2 \cdot A \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{f_1 - f_2}{2} \cdot t\right) \cdot \sin(2\pi \cdot f_{\text{res}} \cdot t)$$

die Formel der Amplitude der resultierenden Schwingung  $A_s$  herausgelesen werden:

$$A_s(t) = 2 \cdot A \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{f_1 - f_2}{2} \cdot t\right)$$

Hier ist erkennbar, dass sich die neue Amplitude mit der Zeit verändert. Die Schwankungen sind periodisch und allgemein als Schwebungsfrequenz bekannt.<sup>91</sup> Dadurch ist bewiesen, dass eine Schwebungsfunktion niemals eine harmonische Schwingung darstellen kann, jedoch eine Superposition zweier solcher ist.<sup>92</sup> Die Schwebungsfrequenz  $f_s$  sagt im Gegensatz zur resultierenden Frequenz  $f_{\text{res}}$  aus, in welchem zeitlichen Abstand der gehörte Ton an- und abschwilt.<sup>93</sup> In der Formel für  $A_s(t)$  findet sich nun also folgende Gesetzmäßigkeit für die gesuchte Frequenz  $f_s$ :

$$f = \frac{f_1 - f_2}{2}$$

Da es für den Zuhörer keine Rolle spielt, ob sich der Cosinus rechnerisch im Plus- oder Minusbereich befindet, ist die wahrgenommene Frequenz der Lautstärkeänderung doppelt so groß.

$$f \cdot 2 = \frac{f_1 - f_2}{2} \cdot 2 = f_s \quad ^{94}$$

$$f_s = |f_1 - f_2|$$

---

<sup>91</sup> Vgl. <http://www.abi-physik.de/buch/wellen/schwebung/> [Zugegriffen 05.01.15]

<sup>92</sup> Vgl.

[http://www.ltam.lu/physique/vorlesungen/12GE/cours\\_kneip/skript/12GE\\_Schwingung\\_Teil\\_3.pdf](http://www.ltam.lu/physique/vorlesungen/12GE/cours_kneip/skript/12GE_Schwingung_Teil_3.pdf)  
[Zugegriffen 05.01.15]

<sup>93</sup> Vgl. [http://www.elsenbruch.info/ph12\\_down/schwing\\_well.pdf](http://www.elsenbruch.info/ph12_down/schwing_well.pdf) [Zugegriffen 05.01.15]

<sup>94</sup> Vgl. <http://www.abi-physik.de/buch/wellen/schwebung/> [Zugegriffen 05.01.15]

Je geringer der Unterschied der beiden Ausgangsfrequenzen  $f_1$  und  $f_2$  ist, desto geringer ist auch die Schwebungsfrequenz.<sup>95</sup> Der Zuhörer nimmt demnach ein langsames An- und Abschwellen des gehörten Klanges wahr. Wie lange es genau von einem Lautstärkeminimum zum nächsten dauert, kann mit Hilfe der Formel für die Schwingungsdauer  $T$  ausgerechnet werden.

$$T = \frac{1}{f}$$

Im Falle der Schwebung wird dieser zeitliche Abstand Schwebungsfrequenz  $T_s$  genannt und wie folgt berechnet:

$$T_s = \frac{1}{f_s} \quad ^{96}$$

Sind die Amplituden der Ausgangsschwingungen wie im Beispiel oben gleich groß, so wird mit dieser Formel die Zeitspanne zwischen zwei Schwingungsknoten der Schwebungsfunktion  $s(t)$  ermittelt.

Das Phänomen der Schwebung tritt nur bei der Überlagerung zweier sehr geringfügig frequenzunterschiedlicher Schwingungen auf. Je größer der Frequenzunterschied ist, desto eher werden zwei Töne als separate, eigenständige Audiosignale wahrgenommen.<sup>97</sup>

---

<sup>95</sup> Vgl. <http://www.leifiphysik.de/themenbereiche/akustische-wellen> [Zugegriffen 04.01.15]

<sup>96</sup> Vgl. <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/837> [Zugegriffen 05.01.15]

<sup>97</sup> Vgl. Universaldenker: Schwebung aus der Akustik | Physik fürs Abitur [Video] IN: [http://www.youtube.com/watch?v=aUV8gxeAa\\_o](http://www.youtube.com/watch?v=aUV8gxeAa_o) [Stand: 04.01.15], TC 2:49

## 4.5 Fourier-Analyse

*Il résulte de tout ce qui a été démontré dans cette section, concernant le développement des fonctions en séries trigonométriques que si l'on suppose une fonction  $f(x)$ , dont la valeur est représentée dans un intervalle déterminé depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = x$ , [...], on pourra toujours développer une fonction en une série qui ne contiendra que les sinus ou les cosinus, ou les sinus et les cosinus d'arcs multiples ... (Jean Baptiste Joseph Fourier) <sup>98 99</sup>*

Die Fourier-Analyse behandelt die Frage, unter welchen Bedingungen eine periodische Funktion durch Überlagerung (möglicherweise unendlich vieler) harmonischer Schwingungen mit derselben Periode darstellbar ist.<sup>100</sup>

Diese Methode zerlegt eine periodische, nichtsinusförmige Funktion in Sinus- und Cosinusfunktionen. Gleichmaßen könnte man auch von der Zerlegung einer bekannten Funktion in Grund- und Oberschwingungen sprechen.<sup>101</sup>

Die Entdeckung der Fourier-Analyse war ein großer, unentbehrlicher Fortschritt<sup>102</sup> sowohl für die Physik als auch die Mathematik und die Signalverarbeitung bis hin zur Ozeanografie und den Wirtschaftswissenschaften.<sup>103</sup>

---

<sup>98</sup> zit. n. Henze, Norbert; Last, Günther: Mathematik für Wirtschaftsingenieure Und Naturwissenschaftlich-technische Studiengänge. Band 2: Analysis Im  $\mathbb{R}^n$ , Lineare Algebra, Hilberträume, Fourieranalyse, Differentialgleichungen, Stochastik. – Wiesbaden. Springer-Verlag GmbH. 2010. S.322

<sup>99</sup> Eigene Übersetzung: **Aus allem, was in diesem Abschnitt bezüglich der Entwicklung von Funktionen als trigonometrische Folge bewiesen wurde, folgt, dass, nimmt man eine Funktion  $f(x)$  an, deren Wert in einem von  $x = 0$  bis  $x = x$  definierten Intervall dargestellt ist, [...],man immer eine Funktion als Reihe entwickeln wird, die nur Sinusse oder Cosinusse enthält...**

<sup>100</sup> Vgl. Henze, Norbert; Last, Günther: Mathematik für Wirtschaftsingenieure Und Naturwissenschaftlich-technische Studiengänge. Band 2: Analysis Im  $\mathbb{R}^n$ , Lineare Algebra, Hilberträume, Fourieranalyse, Differentialgleichungen, Stochastik. S.322

<sup>101</sup> Vgl. <http://www.mathe-online.at/mathint/fourier/i.html> [Zugegriffen 19.01.2015]

<sup>102</sup> Vgl. Henze, Norbert; Last, Günther: Mathematik für Wirtschaftsingenieure Und Naturwissenschaftlich-technische Studiengänge. Band 2: Analysis Im  $\mathbb{R}^n$ , Lineare Algebra, Hilberträume, Fourieranalyse, Differentialgleichungen, Stochastik. S.323

<sup>103</sup> Vgl. <http://physik.uni-graz.at/~cbl/C+P/contents/Stud-WS04/Gruppe14/Fourier/Fourier/fourier-analyse.htm> [Zugegriffen 19.01.2015]

In der Physik wird mit Hilfe der Fourier-Analyse beispielsweise die Eigenfrequenzen eines Messgerätes ermittelt um einer Verfälschung des Messergebnisses durch die Resonanzen der Eigenfrequenzen vorzubeugen, falls das Gerät eine Eigenfrequenz innerhalb des Messbereichs aufweist.<sup>104</sup> Auch bei Radio und Fernseher kommt die Fourier-Analyse zum Einsatz. Bevor ein Signal mit Hilfe einer Trägerwelle gesendet werden kann, muss dieses zuvor digitalisiert und in ihre Einzelkomponenten zerlegt werden. Treten bei der anschließenden Überlagerung der Einzelfrequenzen Störungen auf, wird ein sehr fein gestreiftes Kleidungsstück im Fernseher beispielsweise als flimmernde Bildstörung wahrgenommen.<sup>105</sup>

Eine Methode der Fourier-Analyse ist die Fourier-Transformation, deren Idee beinhaltet, kontinuierliche, aperiodische Signale in ein kontinuierliches Spektrum aufzuspalten. Die Funktion, die dieses Spektrum beschreibt, nennt sich Fourier-Transformierte  $\hat{f}$ .<sup>106</sup> So wird versucht, eine nichtsinusförmige periodische Funktion durch die Summe anderer Funktionen auszudrücken.<sup>107</sup> Auch in der Musik spielt diese Technik eine entscheidende Rolle: Frequenztransformation eines Tones in seine einzelnen Schwingungen ist die spezielle Bezeichnung für diesen Vorgang in der Akustik.<sup>108</sup>

Insgesamt gibt es vier Varianten der Fourier-Transformation. Handelt es sich um eine im endlichen Intervall periodische Funktion, so ist die Zerlegung in eine *Fourier-Reihe* erforderlich. Die zweite Möglichkeit, ein bis ins Unendliche reichender aperiodischer Vorgang verlangt nach einer *kontinuierlichen Fourier-Transformation* oder unspektakulärer auch Fourier-Integral genannt.<sup>109</sup> Diese Variante ist besonders für die Signalver-

---

<sup>104</sup> Vgl. [http://archive.geogebra.org/de/examples/fourier/sachanalyse/anwendung\\_fourier-analyse.htm](http://archive.geogebra.org/de/examples/fourier/sachanalyse/anwendung_fourier-analyse.htm) [Zugegriffen 19.01.2015]

<sup>105</sup> Vgl. [http://archive.geogebra.org/de/examples/fourier/sachanalyse/anwendung\\_fourier-analyse.htm](http://archive.geogebra.org/de/examples/fourier/sachanalyse/anwendung_fourier-analyse.htm) [Zugegriffen 19.02.2015]

<sup>106</sup> Vgl. <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Fourier-Transformation&oldid=137104430>  
<http://de.wikipedia.org/wiki/Fourier-Transformation> [Zugegriffen 19.01.2015]

<sup>107</sup> Vgl. <http://einstein.informatik.uni-oldenburg.de/rechnernetze/fouriera.htm> [Zugegriffen 19.01.2015]

<sup>108</sup> Vgl. <http://physik.uni-graz.at/~cbl/C+P/contents/Stud-WS04/Gruppe14/Fourier/Fourier/fourier-analyse.htm> [Zugegriffen 19.01.2015]

<sup>109</sup> Vgl. <http://physik.uni-graz.at/~cbl/C+P/contents/Stud-WS04/Gruppe14/Fourier/Fourier/fourier-analyse.htm> [Zugegriffen 19.01.2015]

arbeitung essentiell.<sup>110</sup> Der dritte Fall behandelt einen aperiodischen Vorgang, von dem in einem endlichen Intervall nur eine begrenzte Anzahl an Werten in regelmäßigen Zeitabständen bekannt ist. Hier ist eine *diskrete Fourier-Transformation* erforderlich. Ein in dieser Arbeit relevanter Einsatzbereich für diese Technik sind CDs. Auf ihr werden pro Sekunde durchschnittlich 44100 Amplitudenwerte eines digitalisierten Musikstücks gespeichert. Zuletzt existiert noch die *schnelle Fourier-Transformation*. Dieser Algorithmus vermeidet die mehrfache Berechnung sich gegenseitig aufhebender Terme und erzielt somit eine kürzere Form der diskreten Fourier-Transformation. Kompressionsalgorithmen wie die des MP3-Formats sind dafür ein alltägliches Beispiel.<sup>111</sup>

#### 4.5.1 Fourier-Reihen

Als Basis und zum besseren Verständnis der Fourier-Analyse im Allgemeinen sei eine Ausführung der Fourier-Reihen vorangestellt.

Im diesem Kapitel geht es um die Darstellung periodischer Funktionen<sup>112</sup> mit Hilfe von trigonometrischen Reihen<sup>113</sup>, den Fourier-Reihen.<sup>114</sup> Diese sind unter anderem auch auf nichtsinusförmige periodische Wechselgrößen anwendbar.<sup>115</sup> Wie allgemein üblich werden in diesem Abschnitt ausschließlich  $2\pi$ -periodische Funktionen behandelt.

---

<sup>110</sup> Vgl. Henze, Norbert; Last, Günther: Mathematik für Wirtschaftsingenieure Und Naturwissenschaftlich-technische Studiengänge. Band 2: Analysis Im  $\mathbb{R}^n$ , Lineare Algebra, Hilberträume, Fourieranalyse, Differentialgleichungen, Stochastik. S. 323

<sup>111</sup> Vgl. <http://physik.uni-graz.at/~cbl/C+P/contents/Stud-WS04/Gruppe14/Fourier/Fourier/fourier-analyse.htm> [Zugegriffen 19.01.2015]

<sup>112</sup> Vgl. Henze, Norbert; Last, Günther: Mathematik für Wirtschaftsingenieure Und Naturwissenschaftlich-technische Studiengänge. Band 2: Analysis Im  $\mathbb{R}^n$ , Lineare Algebra, Hilberträume, Fourieranalyse, Differentialgleichungen, Stochastik. S. 323

<sup>113</sup> Vgl. ebd. S. 323

<sup>114</sup> Vgl. Weißgerber, Wilfried: Elektrotechnik Für Ingenieure 3 : Ausgleichsvorgänge, Fourieranalyse, Vierpoltheorie. Ein Lehr- Und Arbeitsbuch Für Das Grundstudium. S. 95

<sup>115</sup> Vgl. ebd. S 95

Angenommen  $f$  sei eine  $T$ -periodische Funktion, so gilt auch in diesem Fall von  $x \rightarrow f\left(\frac{T \cdot x}{2 \cdot \pi}\right)$  die Periode  $2\pi$ . Daher hat die scheinbare Spezialisierung keinerlei Einschränkungen in der Anwendung zur Folge.<sup>116</sup>

Für nichtsinusförmige aber dennoch periodische Wechselgrößen gilt die Gesetzmäßigkeit

$$f(t) = f(t + k \cdot T) \quad \text{mit } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

mit der Periodendauer  $T$  und der Kreisfrequenz  $\omega$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

Seit Jean Baptiste Fouriers Erkenntnis können all jene Funktionen nun durch eine unendliche Summe von Sinusgrößen  $f_k$  ausgedrückt werden. Dabei ist, gemäß den Regeln der Akustik, deren Kreisfrequenz stets ein ganzzahliges Vielfaches von der Kreisfrequenz  $\omega$  der Ausgangsfunktion.

Eine komplexere Schwingung kann gleichermaßen als Addition von einer Grundschwingung und ihren Oberschwingungen betrachtet werden, woraus sich folgende Formel für  $f(t)$  ergibt:

$$f(t) = \underbrace{\hat{f}_0 \cdot \sin(\varphi_{\hat{f}_0})}_{\text{Gleichanteil}} + \underbrace{\hat{f}_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{\hat{f}_1})}_{\text{Grundschiwingung}} + \underbrace{\hat{f}_2 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t + \varphi_{\hat{f}_2})}_{\text{1. Oberschiwingung}} + \underbrace{\hat{f}_3 \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t + \varphi_{\hat{f}_3})}_{\text{2. Oberschiwingung}} + \dots$$

Die Kreisfrequenz  $\omega$  der Grundschiwingung ist mit jener der nichtsinusförmigen Größe  $f(x)$  ident. Die erste Oberschiwingung hat dagegen die doppelte Kreisfrequenz  $2 \cdot \omega$ , die zweite Oberschiwingung die dreifache  $3 \cdot \omega$  und so weiter.

---

<sup>116</sup> Vgl. Henze, Norbert; Last, Günther: Mathematik für Wirtschaftsingenieure Und Naturwissenschaftlich-technische Studiengänge. Band 2: Analysis im  $\mathbb{R}^n$ , Lineare Algebra, Hilberträume, Fourieranalyse, Differentialgleichungen, Stochastik. S. 324

Kurz zusammengefasst lautet die obige Formel:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t + \varphi_{f_k})$$

Die sinusförmigen Anteile der Fourier-Reihe haben natürlich sowohl unterschiedliche  $\varphi_{f_k}$  als auch unterschiedliche Amplituden  $f_k$ . Die Bezeichnung für die Abhängigkeit des Anfangsphasenwinkels von der Frequenz, mathematisch notiert  $\varphi_{f_k} = f(k)$ , lautet Phasenspektrum. Die Abhängigkeit der Amplitude von der Frequenz, das heißt

$$\hat{f}_k = f(k), \text{ nennt sich Amplitudenspektrum.}^{117}$$

Um eine beschränkte nichtsinusförmige Wechselgröße zu jedem Zeitpunkt durch die Fourier-Reihe ersetzen zu können, muss diese konvergent sein. Folglich besitzt jede oben angeführte  $f(t)$ -Funktion mit ihren Teilsummen  $s_k(t)$  (trigonometrische Summen außer dem Gleichanteil) einen Grenzwert.

$$s_0(t) = \hat{f}_0 \cdot \sin(\varphi_{f_0})$$

$$s_1(t) = \hat{f}_0 \cdot \sin(\varphi_{f_0}) + \hat{f}_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{f_1})$$

$$s_2(t) = \hat{f}_0 \cdot \sin(\varphi_{f_0}) + \hat{f}_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{f_1}) + \hat{f}_2 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t + \varphi_{f_2})$$

und so weiter

In einer einzigen Funktion ausgedrückt sind die Teilsummen

$$s_n(t) = \sum_{k=0}^n \hat{f}_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t + \varphi_{f_k})^{118}$$

---

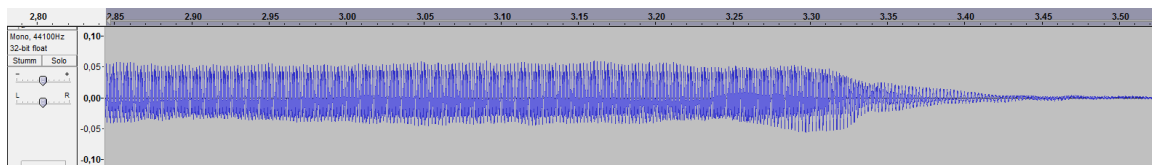
<sup>117</sup> Vgl. Weißgerber, Wilfried: Elektrotechnik Für Ingenieure 3 : Ausgleichsvorgänge, Fourieranalyse, Vierpoltheorie. Ein Lehr- Und Arbeitsbuch Für Das Grundstudium. S. 95

<sup>118</sup> ebd. S. 96

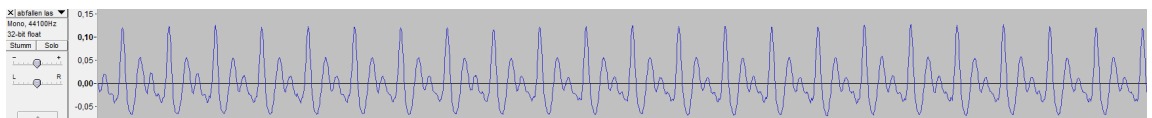


## 4.5.2 Diskrete Fourier-Transformation

Die diskrete Fourier-Transformation, kurz DFT, funktioniert genau anders herum. Bei dieser Methode wird der Klang eines Instrumentes zuerst mit einem Mikrophon aufgenommen und anschließend analysiert. In den meisten Fällen werden die konkreten Klangwerte des Audiosignals mit einer Frequenz von 44 100 Hz notiert und mit Hilfe eines dafür vorgesehenen Programmes wie zum Beispiel Audacity in ein Koordinatensystem eingetragen. Wegen der enorm großen Anzahl der Punkte wirkt der Graf für den Betrachter auf den ersten Blick wie eine Funktion und nicht nur wie aneinandergereihte, diskrete Punkte. In Abbildung 23 ist der Querflötenklang a' zu sehen, der in Abbildung 24 näher hin gezoomt ist.



**Abbildung 23: Querflötenklang a' im Zeitbereich (Verfasser)**



**Abbildung 24: Querflötenklang a' im Zeitbereich - hin gezoomt (Verfasser)**

Die Gesetzmäßigkeit der Punktfolge herauszufinden ist entscheidend, sobald es darum geht, ein Instrument elektrisch zu imitieren. Das wohl gängigste Beispiel im Alltag ist das Keyboard, das bekanntlich nach vielen verschiedenen Instrumenten klingen kann. Um den typischen Klang einer Querflöte erzeugen zu können, müssen die Obertöne und deren Einfluss auf eine Melodie bekannt sein. Dazu wird die Funktion des gehörten Klanges mittels der diskreten Fourier-Transformation in seine einzelnen harmonischen Schwingungen zerlegt.<sup>119</sup>

---

<sup>119</sup> Gangl Peter, Vortrag: Numerische Mathematik. Gehalten im Schloss Weinberg, 08.02.2015.

Jean-Baptiste Fourier entdeckte die allgemeine Formel, mit der jeder beliebige Klang in seine Teilschwingungen aufgespalten werden kann:

$$g(t) = \sum_{f=0}^{n-1} A1_f \cdot \cos(f \cdot 2 \cdot \pi \cdot t) + A2_f \cdot \sin(f \cdot 2 \cdot \pi \cdot t)$$

Die Variable  $f$  ist wieder Platzhalter für die Frequenz,  $t$  für die Zeit,  $n$  für die Anzahl der aufgezeichneten Werte der Aufnahme und  $A1_f$  und  $A2_f$  sind Koeffizienten, welche die Amplituden der Cosinus- und Sinusschwingungen bei der jeweiligen Frequenz  $f$  beschreiben.<sup>120</sup>

Weil der Grafen der Cosinusfunktion um  $\frac{\pi}{2}$  in die positive  $x$ -Richtung verschoben ist, lautet dieselbe Gleichung auch

$$g(t) = \sum_{f=0}^{n-1} A1_f \cdot \sin(f \cdot 2 \cdot \pi \cdot (t + \frac{\pi}{2})) + A2_f \cdot \sin(f \cdot 2 \cdot \pi \cdot t)$$

beziehungsweise

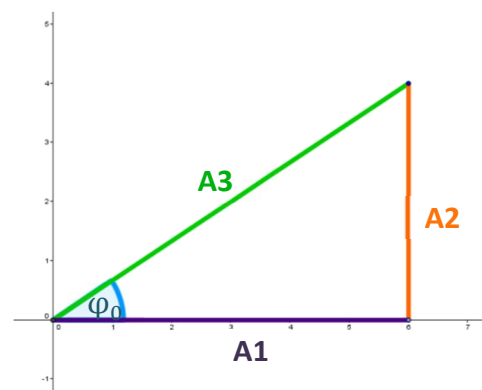
$$g(t) = \sum_{f=0}^{n-1} A1_f \cdot \cos(f \cdot 2 \cdot \pi \cdot t) + A2_f \cdot \cos(f \cdot 2 \cdot \pi \cdot (t - \frac{\pi}{2}))$$

Die bisherige Form  $A1 \cdot \cos(x) + A2 \cdot \sin(x)$  kann somit auch in einem kürzeren Term für die resultierende Interferenzschwingung

$$A3 \cdot \cos(x - \varphi_0)$$

zusammengefasst werden. In Abbildung 25 ist der geometrische Zusammenhang zwischen  $A1$ ,  $A2$ ,  $A3$  und  $\varphi_0$  ersichtlich. Unter der Voraussetzung, dass  $A1$  und  $A2$  gegeben sind, ist die Berechnung von  $A3$  damit ganz einfach.

$$A3 = \sqrt{A1^2 + A2^2}$$



**Abbildung 25: Zusammenhang der Amplituden (Verfasser)**

<sup>120</sup> Gangl Peter, Vortrag: Numerische Mathematik. Gehalten im Schloss Weinberg, 09.02.2015.

Gemeinsam mit

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{A_2}{A_1}$$

eingesetzt ergibt sich die Form

$$\sqrt{A_1^2 + A_2^2} \cdot \cos(x - \tan^{-1} \frac{A_2}{A_1})$$

Aufgrund dieser Erkenntnisse ist auch die neue Form von  $g(t)$  begründet.

$$g(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \cdot \cos(f \cdot 2 \cdot \pi \cdot (t - \tan^{-1} \frac{A_2}{A_1}))$$

Als konkretes Beispiel zur Veranschaulichung sei etwa die Schwingung

$$f_1(t) = \sum_{f=0}^3 A_f \cos(f \cdot 2 \cdot \pi \cdot t)$$

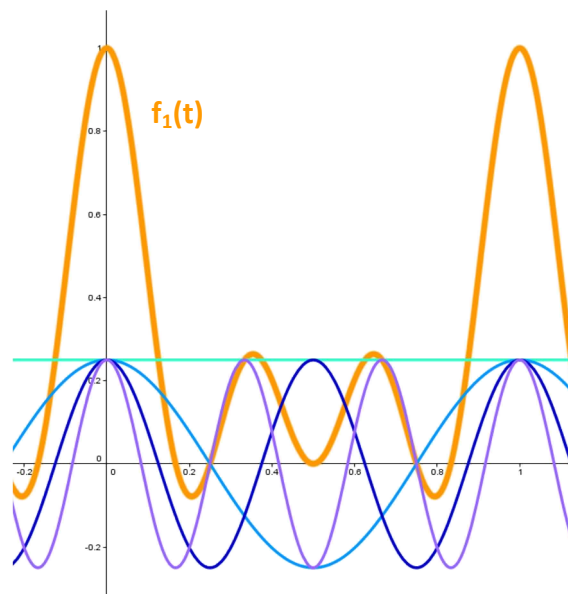
mit den diskreten Werte der Amplituden

$$A_0, A_1, A_2, A_3 = 0.25$$

gegeben, so sieht man schon an der Formel, dass sie aus vier Cosinus-schwingungen mit den Frequenzen 0, 1, 2 und 3 zusammengesetzt ist. In Abbildung 26 sind diese Teilschwingungen von  $f_1(t)$  in verschiedenen blau bis lila Tönen abgebildet.<sup>121</sup>

Gesucht wird nun der Graf  $f_2(t)$ , der durch die Punkte  $P_1(0;0)$ ,  $P_2(0.25;1)$ ,  $P_3(0.5; 0)$  und  $P_4(0.75; 0)$  gehen soll.

Weil die Höhe und der Abstand zwischen diesen Punkten gleich ist wie bei  $f_1(t)$ , können die Werte der Amplituden  $A_0, A_1, A_2$  und  $A_3$  übernommen werden. Lediglich die Pha-



**Abbildung 26: Teilschwingungen von  $f_1(t)$**   
(Verfasser)

<sup>121</sup> Gangl Peter, Vortrag: Numerische Mathematik. Gehalten im Schloss Weinberg, 09.02.2015.

senverschiebung von 0 muss auf 0.25 geändert werden. So kommt man also zu folgender Gleichung für  $f_2(t)$ :

$$f_2(t) = \sum_{f=0}^3 A_f \cos(f \cdot 2 \cdot \pi \cdot (t - 0.25)) \quad \text{mit } A_0, A_1, A_2, A_3 = 0.25$$

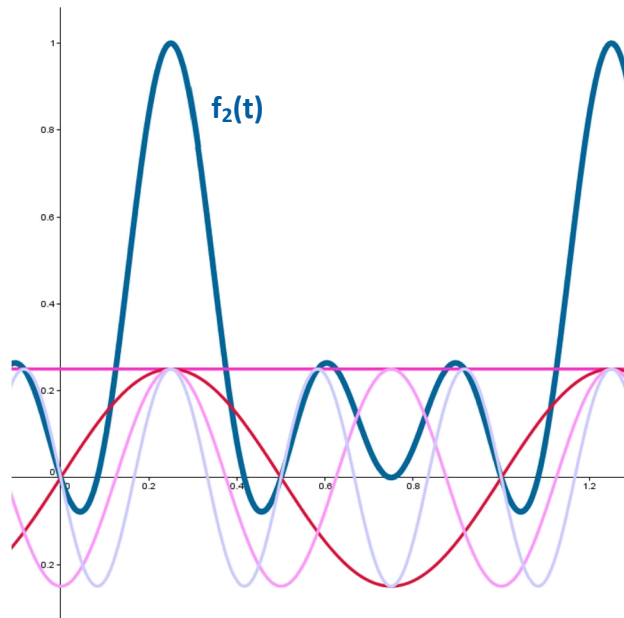
$f_2(t)$  besteht wiederum aus vier Teilschwingungen, welche in Abbildung 27 auf der vorherigen Seite zu sehen sind.  $f_1(t)$  und  $f_2(t)$  zu finden war eine Voraufgabe, um nun eine Gleichung aufstellen zu können, von der beispielsweise nur Folgendes bekannt ist:

$$f_{\text{res}}(0) = 1$$

$$f_{\text{res}}(0.25) = 1$$

$$f_{\text{res}}(0.5) = 0$$

$$f_{\text{res}}(0.75) = 0$$



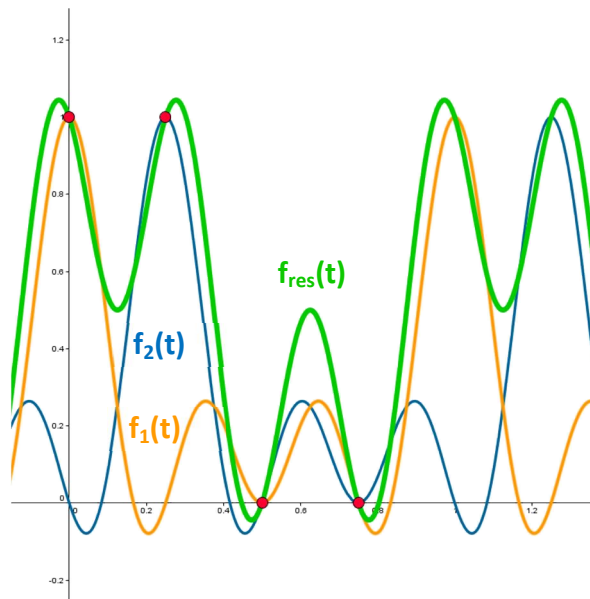
**Abbildung 27: Teilschwingungen von  $f_2(t)$**   
(Verfasser)

In diesem Beispiel sind  $f_1(t)$  und  $f_2(t)$  die Teilschwingungen, aus denen  $f_{\text{res}}(t)$  zusammengesetzt ist. Somit ergibt sich als Interferenzschwingung

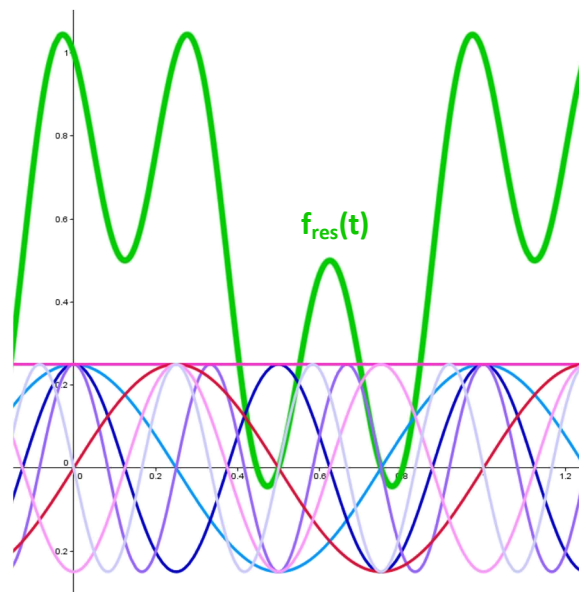
$$f_{\text{res}}(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

$$f_{\text{res}}(t) = \sum_{f=0}^3 A_f \cos(f \cdot 2 \cdot \pi \cdot t) + \sum_{f=0}^3 A_f \cos(f \cdot 2 \cdot \pi \cdot (t - 0.25))$$

In Abbildung 28 ist die grafische Aufschlüsselung dieses anschaulichen Beispiels zu sehen. Jeder Punkt auf dem Grafen von  $f_{\text{res}}(t)$  ist eine Addition der Werte von  $f_1(t)$  und  $f_2(t)$  zum selben Zeitpunkt  $t_1$ . Da sowohl  $f_1(t)$  als auch  $f_2(t)$  aus jeweils vier Cosinusschwingungen bestehen, ist  $f_{\text{res}}(t)$  folglich eine Überlagerung von acht unterschiedlichen harmonischen Schwingungen, wie in Abbildung 29 aufgezeichnet ist.<sup>122</sup>



**Abbildung 28: Addition von Schwingungen**  
(Verfasser)

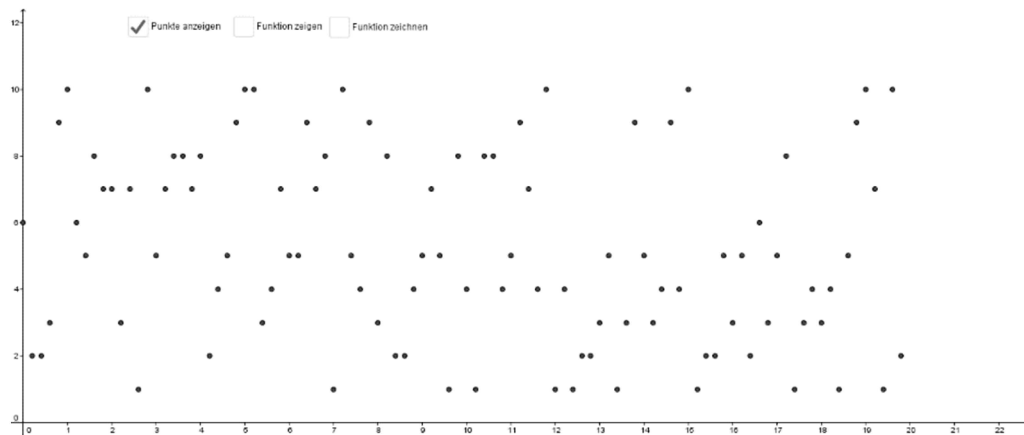


**Abbildung 29: Addition aller Teilschwingungen von  $f_{\text{res}}(t)$**   
(Verfasser)

---

<sup>122</sup> Gangl Peter, Vortrag: Numerische Mathematik. Gehalten im Schloss Weinberg, 09.02.2015.

In der Realität werden natürlich viel mehr Werte aufgenommen, sprich es sind mehr Punkte bekannt. Für Abbildung 30 wurden fiktive beispielhafte Daten angenommen.<sup>123</sup>



**Abbildung 30: diskrete Werte (Verfasser)**

Zu diesen vielen Punkten die passende Funktion zu finden, ist schon etwas anspruchsvoller. Die Schwierigkeit ist hier, dass die Amplituden der Teilschwingungen wie im Beispiel zur Abbildung 28 und 29 nicht gegeben sind. Folglich müssen sie erst ermittelt werden. Die Herleitung der Formel für  $A_1$  und  $A_2$  beginnt mit Vektoren im zweidimensionalen Raum. Vorausgesetzt wird, dass  $\vec{d}$  und  $\vec{c}$  normal aufeinander stehen und  $P = (a|b) = \vec{c}(v_1|v_2) + \vec{d}(w_1|w_2)$  gilt. Mit Hilfe der Winkelfunktionen kommt man auf

$$\cos(\alpha) = \frac{(a|b) \cdot (v_1|v_2)}{|(a|b)| \cdot |(v_1|v_2)|} = \frac{\vec{c}}{|(a|b)|} \Rightarrow \vec{c} = \frac{(a|b) \cdot (v_1|v_2)}{|(a|b)| \cdot |(v_1|v_2)|} \cdot |(a|b)| = \frac{(a|b) \cdot (v_1|v_2)}{|(v_1|v_2)|}$$

Weiter ergibt sich

$$P = (P \cdot \vec{v}) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} + (P \cdot \vec{w}) \cdot \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}$$

<sup>123</sup> Gangl Peter, Vortrag: Numerische Mathematik. Gehalten im Schloss Weinberg, 09.02.2015.

Dehnt man diese Überlegung auf Vektoren in  $\mathbb{R}^x$  aus, so kommt man für P zu

$$P = (P \cdot \vec{e1}) \cdot \frac{\vec{e1}}{|\vec{e1}|} + (P \cdot \vec{e2}) \cdot \frac{\vec{e2}}{|\vec{e2}|} + \dots + (P \cdot \vec{e_x}) \cdot \frac{\vec{e_x}}{|\vec{e_x}|} = \sum_{i=1}^x (P \cdot \vec{e_i}) \cdot \frac{\vec{e_i}}{|\vec{e_i}|}$$

Die letztere Form erinnert schon an Fouriers Formel, wobei vorläufig angenommen wird, A2 sei Null.

$$f(t) = \sum_{f=0}^{\infty} A1_f \cdot \cos(f \cdot 2 \cdot \pi \cdot t)$$

$A1_f$  wird schließlich mit dem Skalarprodukt von  $f(t)$  und  $\cos(f \cdot 2 \cdot \pi \cdot t)$  bestimmt.

$$A1_f = \langle f(t) | \cos(f \cdot 2 \cdot \pi \cdot t) \rangle = \int_{-T}^T f(t) \cdot \cos(f \cdot 2 \cdot \pi \cdot t) dt$$

T steht in diesem Zusammenhang für die Periodendauer.

Weil ein Integral ja die Fläche unter einem Grafen beschreibt, kann man sein Ergebnis näherungsweise auch durch addieren der Unter- und Obersummen errechnen. Aus dieser Überlegung heraus resultiert die Gleichung

$$A1_f = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} [\vec{g_i} \cdot \cos(f \cdot 2 \cdot \pi \cdot t_i)]$$

n ist hier die Anzahl der diskreten, vorgegebenen Punkte, durch die der gesuchte Graf laufen soll. Der Vektor  $\vec{g_i}$  beinhaltet alle konkreten Werte, die zu den jeweiligen Zeitpunkten angegeben sind.

$$\vec{g_i} = (g(t_0) | g(t_1) | g(t_2) | \dots | g(t_n))$$

Dieselbe Herleitungskette gilt auch für A2<sub>f</sub>:

$$A2_f = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} [\vec{g_i} \cdot \sin(f \cdot 2 \cdot \pi \cdot t_i)]$$

Nun können alle Amplituden der Grund- und Oberschwingungen ermittelt und infolgedessen auch die gesuchte Funktion gezeichnet werden. In Abbildung 31 ist die Lösung aufgezeichnet.<sup>124</sup>

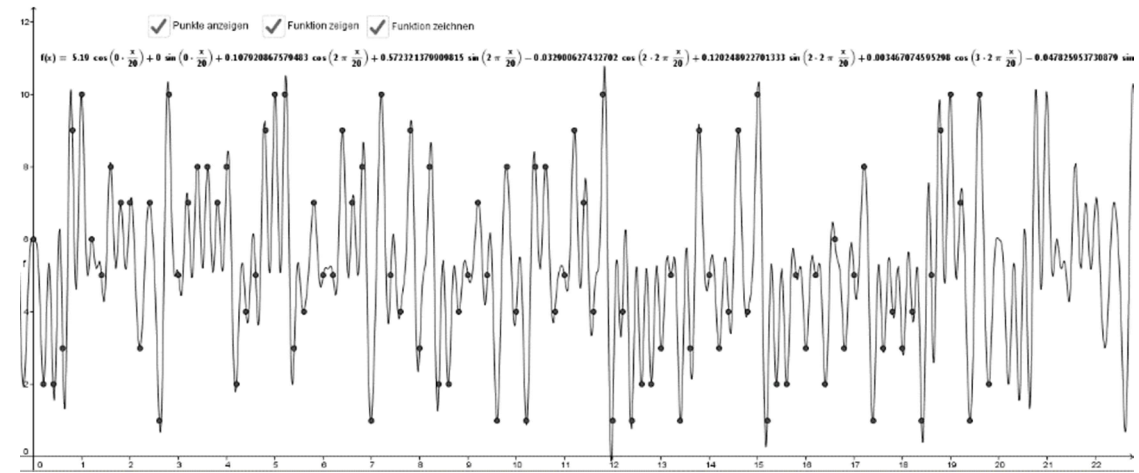


Abbildung 31: Funktion durch die diskreten Werte aus Abbildung 30 (Verfasser)

Während der Projektwoche Angewandte Mathematik haben wir unter anderem den Klang eines Saxophons mit einem Mikrophon aufgenommen und in dem dafür geeigneten Programm Audacity auswerten lassen. Dabei werden die konkreten, gespeicherten Werte zu den jeweiligen Zeitpunkten von Audacity aufgelistet. Mit Hilfe dieser Daten kann nun eine vollständige chromatische Tonleiter der Saxophontöne erstellt werden. Durch ausprobieren stellt sich schnell heraus, dass die Obertöne in einem gewissen Verhältnis zur Grundschwingung stehen. Mit diesem Wissen gekoppelt können die diskreten Werte in Funktionen zu Saxophonklängen umgesetzt werden. In Abbildung 32 ist die lange Programmierung zu sehen.<sup>125</sup>

```

124
125
f(x) = 5.19 cos(0 - π/20) + 0 sin(0 - π/20) + 0.107920867570483 cos(2π - π/20) + 0.57233137909815 sin(2π - π/20) - 0.03200672437202 cos(2 - 2π - π/20) + 0.120248927701313 sin(2 - 2π - π/20) + 0.001467074595200 cos(1 - 2π - π/20) - 0.047825953730079 sin

```

Abbildung 32: nachprogrammierte chromatische Tonleiter eines Saxophons (Verfasser)

<sup>124</sup> Gangl Peter, Vortrag: Numerische Mathematik. Gehalten im Schloss Weinberg, 10.02.2015.

<sup>125</sup> Gangl Peter, Vortrag: Numerische Mathematik. Gehalten im Schloss Weinberg, 11.02.2015.



Lässt man diese Funktionen nun in GeoGebra zum Beispiel mit dem Befehl „SpieleTon“ vertonen, so klingt der Klang tatsächlich nach einem Saxophon. Wichtig ist dabei die Berücksichtigung der Oberschwingungen, welche die Klangfarbe bestimmen. Natürlich kann man in die Berechnungen nur einen beschränkten Teil der Aufnahme-werte miteinbeziehen, es sind ja schließlich pro Sekunde 44 100 Daten. Umso mehr Punkte allerdings beachtet werden, desto originaler klingt der imitierte Klang.<sup>126</sup>

Diese Überlegungen und Rechengänge sind die Grundlage für die Erstellung aller MP3-Dateien.<sup>127</sup>

---

<sup>126</sup> Gangl Peter, Vortrag: Numerische Mathematik. Gehalten im Schloss Weinberg, 11.02.2015.

<sup>127</sup> Gangl Peter, Vortrag: Numerische Mathematik. Gehalten im Schloss Weinberg, 09.02.2015.

## 5 Fazit

„Musik ist schwingende Luft.“ Eine mutige Aussage mit wahren Kern. Der Beweis dafür steht in den vorangegangenen Seiten. Zusammengefasst erklärt die vorliegende VWA, wie physikalische Vorgänge im Alltag durch harmonische Schwingungen beschrieben und durch Differenzialgleichungen in die naturwissenschaftliche Sprache übersetzt niedergeschrieben und verarbeitet werden können.

Mit dem Ziel, meinen eigenen Wissenshorizont zu erweitern und diese persönliche Errungenschaft verständlich weiterzugeben, habe ich meine VWA begonnen. Abschließen darf ich diese Arbeit nun zufrieden mit der Faszination, die in mir geweckt worden ist. Mit dem neu erlangten Verständnis für die physikalischen Vorgänge und Hintergründe beim Zusammenspielen mehrerer Instrumente kam neue Freude bei den Ensembleproben auf. Dank dem anderen Blickwinkel auf die Harmonie in der Musik hat das Querflötenspielen für mich eine neue Dimension gewonnen. Die Freude am naturwissenschaftlichen Arbeiten und Erforschen der Naturphänomene hat mich letztendlich auch in meinem Wunsch Physik zu studieren bestätigt.

Zusätzliche, wertvolle Hinweise und spannende Aspekte kamen während der Projektwoche Angewandte Mathematik von 8. bis 12. Februar 2015 auf Schloss Weinberg auf. Glücklicherweise durfte ich am Projekt „Numerische Mathematik – Musik und Mathematik: Fourier-Analyse“ teilnehmen, das meine Recherchen zu diesem Thema ideal ergänzte.

Als eines der eindrucksvollsten Beispiele für harmonische Schwingungen gilt die Tacoma-Narrows-Brücke, dicht gefolgt von der revolutionären Erfindung der Infrarotfernbedienung und der Lärmreduzierung im Innenraum mancher Audi-Modelle, der lebensrettenden MTR-Untersuchung sowie der intelligenten Gegenschall-Technologie um dem Tinitus entgegenzuwirken. Summa summarum sind die bisherigen Forschungen zu harmonischen Schwingungen bereits sehr erfolgreich gewesen. Mit dem Verständnis der Naturphänomene können wir die Erkenntnisse zu unserem Vorteil in Form neuer Technologien nutzen. In Folge war es beispielsweise möglich, mit Kenntnissen über die Tonübertragung das Radio zu entwickeln. Heutzutage ist der Komfort,

den die Technik bietet, nicht mehr wegzudenken. Ob im technischen, musikalischen oder medizinischen Bereich, harmonische Schwingungen begegnen uns überall. Die vielseitige Anwendung zeigt, dass in diesem Forschungsgebiet noch viel Potential steckt und sicherlich noch lange nicht alles ausgeschöpft ist.

# Literaturverzeichnis

## Printmedien

Apolin, Martin: Big Bang. Physik 6 RG. - Wien. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG. 2008.

Götz, Stefan; Kraft, Johann: Mathematische Formelsammlung. – Wien. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG. 2013.

Henze, Norbert; Last, Günther: Mathematik für Wirtschaftsingenieure Und Naturwissenschaftlich-technische Studiengänge. Band 2: Analysis Im  $\mathbb{R}^n$ , Lineare Algebra, Hilberträume, Fourieranalyse, Differentialgleichungen, Stochastik. – Wiesbaden. Springer-Verlag GmbH. 2010.

Hoffmann, Manfred: Großes Handbuch Mathematik. – München. Compact Verlag GmbH. 2006.

Kempermann, Theo: Zahlentheoretische Kostproben. - Frankfurt am Main. Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH. 2005.

Kopp, Bernhard: Der große Mathematik Überblick. – Wien. G&G Verlagsgesellschaft mbH. 2007.

Kuypers, Friedhelm: Physik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. – Weinheim. VILEY-VCH Verlag GmbH & co. KgaA. 2003.

Malle, Günther; Ramharter, Esther; Ulovec, Andreas; Kandl, Susanne: Mathematik verstehen 8. – Wien. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.

Malle, Günther; Ramharter, Esther; Ulovec, Andreas; Kandl, Susanne: Mathematik verstehen 8. – Wien. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG. 2007.

Quellhorst, Anna: Physik der Blasinstrumente. – München. GRIN Verlag GmbH. 2000.

Reinhardt, Fritz: Schulmathematik. – München. Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH & Co. KG. 2002.

## Online zur Verfügung gestellte Quellen

### PDF-Dokumente

<http://www.tphys.uni-heidelberg.de/~huefner/PhysikUeberall/V09S.pdf>

[www.physik.uni-freiburg.de/~fromm/uni/PIVppt.pdf](http://www.physik.uni-freiburg.de/~fromm/uni/PIVppt.pdf)

[http://www.elenbruch.info/ph12\\_down/schwing\\_well.pdf](http://www.elenbruch.info/ph12_down/schwing_well.pdf)

[http://www.ltam.lu/physique/vorlesungen/12GE/cours\\_kneip/skript/12GE\\_Schwingung\\_Teil\\_3.pdf](http://www.ltam.lu/physique/vorlesungen/12GE/cours_kneip/skript/12GE_Schwingung_Teil_3.pdf)

[http://www.elenbruch.info/ph12\\_down/schwing\\_well.pdf](http://www.elenbruch.info/ph12_down/schwing_well.pdf)

[http://www.ltam.lu/physique/vorlesungen/12GE/cours\\_kneip/skript/12GE\\_Schwingung\\_Teil\\_3.pdf](http://www.ltam.lu/physique/vorlesungen/12GE/cours_kneip/skript/12GE_Schwingung_Teil_3.pdf)

### Website

<http://archive.geogebra.org/>

<http://daten.didaktikchemie.uni-bayreuth.de/>

<http://de.m.wikipedia.org/>

<http://de-de.sennheiser.com/>

<http://einstein.informatik.uni-oldenburg.de/>

<http://physik.uni-graz.at/>

<http://schulphysik.ch/>

<http://schulphysikwiki.de/>

<http://web.utamet.at/>

<http://www.abi-physik.de/>

<http://www.chemie.de/>

<http://www.danner.at/>

<http://www.elektrotechnik-fachwissen.de/>

<http://www.flutepage.de/>

<http://www.google.at/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&cad=rja&uact=8&ved=0CCsQFjAC&url=http%3A%2F%2Fphysik.uibk.ac.at%2Fdidaktik%2Fakustik%2F5>

=

[Fal-](#)

[ger\\_Musik.ppt&ei=6bNLVNfEGab4ywOe1YGwCQ&usg=AFQjCNG2S6WgFXoSg5\\_gtfFj5FKs39RJNQ&bvm=bv.77880786,d.bGQ](#)

<http://www.ipu-bs.de/>

<http://www.laermorama.ch/>

<http://www.leifiphysik.de/>

<http://www.mathe-online.at/>

<http://www.musikakustik.de/>

<http://www.musik-kunstschule.de/>

<http://www.musik-steiermark.at/>

<http://www.sengpielaudio.com/>

<https://lp.uni-goettingen.de/>

<http://wirtschaftslexikon.gabler.de/>

<http://www.youtube.com/>

<http://www.moz.ac.at/>

## Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Schwingungsbewegung (Verfasser) .....	8
Abbildung 2: Sinus, Cosinus und Kreisbogen im Einheitskreis (Verfasser).....	9
Abbildung 3: abrollen des Einheitskreises auf der x-Achse ( <a href="http://www.math.uni-sb.de/vum/index.php?option=com_content&amp;view=article&amp;id=123&amp;Itemid=61">http://www.math.uni-sb.de/vum/index.php?option=com_content&amp;view=article&amp;id=123&amp;Itemid=61</a> ) .....	10
Abbildung 4: Projektion der Sinuswerte ( <a href="https://elearning.physik.uni-frankfurt.de/data/FB13-PhysikOnline/lm_data/lm_281/modul_2/teil_6/node40.html">https://elearning.physik.uni-frankfurt.de/data/FB13-PhysikOnline/lm_data/lm_281/modul_2/teil_6/node40.html</a> ) .....	11
Abbildung 5: punktsymmetrische Sinuskurve (Verfasser).....	12
Abbildung 6: Sinus in den vier Quadranten des Einheitskreises (Verfasser).....	12
Abbildung 8: periodische Sinuskurve (Verfasser) .....	13
Abbildung 7: axialsymmetrische Sinuskurve (Verfasser).....	13
Abbildung 9: Federpendel (Malle, Günther; Ramharter, Esther; Ulovec, Andreas; Kandl, Susanne: Mathematik verstehen 8. S. 126).....	16
Abbildung 10: Beispiel für eine harmonische Schwingung als Lösung einer Differenzialgleichung (Verfasser).....	17
Abbildung 11: Einfluss des Proportionalitätsfaktors $r$ (Malle, Günther; Ramharter, Esther; Ulovec, Andreas; Kandl, Susanne: Mathematik verstehen 8. S. 127) .....	19
Abbildung 12: schwingende Zinken einer Stimmgabel ( <a href="http://www.musikakustik.de/arbeit1.htm">http://www.musikakustik.de/arbeit1.htm</a> ) .....	20
Abbildung 13: Entstehung einer stehenden Welle ( <a href="http://daten.didaktikchemie.uni-bayreuth.de/umat/wellen_mechanisch/wellen_mechanisch.htm">http://daten.didaktikchemie.uni-bayreuth.de/umat/wellen_mechanisch/wellen_mechanisch.htm</a> ) .....	23
Abbildung 14: Frequenzanalyse einer Querflöte (Verfasser) .....	25

Abbildung 15: Frequenzanalyse eines Saxophons (Verfasser) .....	25
Abbildung 16: Frequenzanalyse einer Kalimba (Verfasser) .....	25
Abbildung 17: Schallwechseldruck und Auslenkung der Luftmolekülen ( <a href="http://forum.physik-lab.de/ftopic9154.html">http://forum.physik-lab.de/ftopic9154.html</a> ) .....	26
Abbildung 18: ungestörte Überlagerung von Wasserwellen ( <a href="http://schulphysik.ch/inline/html/Wellen/">http://schulphysik.ch/inline/html/Wellen/</a> ) .....	29
Abbildung 19: konstruktive Interferenz ( <a href="http://schulphysik.ch/inline/html/Wellen/">http://schulphysik.ch/inline/html/Wellen/</a> ) .....	30
Abbildung 20: destruktive Interferenz ( <a href="http://schulphysik.ch/inline/html/Wellen/">http://schulphysik.ch/inline/html/Wellen/</a> ) .....	31
Abbildung 22: unreine Schwebung (Verfasser) .....	32
Abbildung 21: reine Schwebung (Verfasser) .....	32
Abbildung 23: Querflötenklang a' im Zeitbereich (Verfasser) .....	41
Abbildung 24: Querflötenklang a' im Zeitbereich - hin gezoomt (Verfasser) .....	41
Abbildung 25: Zusammenhang der Amplituden (Verfasser) .....	42
Abbildung 26: Teilschwingungen von $f_1(t)$ (Verfasser) .....	43
Abbildung 27: Teilschwingungen von $f_2(t)$ (Verfasser) .....	44
Abbildung 28: Addition von Schwingungen (Verfasser) .....	45
Abbildung 29: Addition aller Teilschwingungen von $f_{res}(t)$ (Verfasser) .....	45
Abbildung 30: diskrete Werte (Verfasser) .....	46
Abbildung 31: Funktion durch die diskreten Werte aus Abbildung 30 (Verfasser) .....	48
Abbildung 32: nachprogrammierte chromatische Tonleiter eines Saxophons (Verfasser)	48



## Eidesstattliche Erklärung

Ich, Anna Oelsch, erkläre hiermit eidesstattlich, dass ich diese vorwissenschaftliche Arbeit selbständig und ohne Hilfe Dritter verfasst habe. Insbesondere versichere ich, dass ich alle wörtlichen und sinngemäßen Übernahmen aus anderen Werken als Zitate kenntlich gemacht und alle verwendeten Quellen angegeben habe.

Polsing, 23. Februar 2015

A handwritten signature in black ink, reading "Anna Oelsch". The signature is written in a cursive style with a horizontal line underneath it.

Anna Oelsch