

GRG3 KUNDMANNGASSE, WIEN 3

Regelflächen – theoretisch, exemplarisch, visuell

Fachbereichsarbeit aus dem Fach Mathematik

Verfasst von Anna Niggas

Betreut von Dr. Gerhard Pillwein

Schuljahr 2013/14

I. Zusammenfassung

Raumkurven lassen sich mit Hilfe von Parameterdarstellungen angeben: Die drei Koordinatenfunktionen sind jeweils abhängig von einem Parameter t aus einem Intervall $[a; b]$. Der Tangentenvektor in einem Kurvenpunkt berechnet sich durch Ableiten der Parameterdarstellung. Der Tangentenvektor spannt gemeinsam mit dem zweiten Ableitungsvektor die Schmieg Ebene der Kurve im jeweiligen Kurvenpunkt auf.

Auch Flächen lassen sich auf die gleiche Weise darstellen: Nun sind die Koordinatenfunktionen jeweils in Abhängigkeit von zwei Parametern u und v gegeben. Hält man einen der beiden Parameter konstant, erhält man eine Parameterlinie. Setzt man die beiden Parameter u und v in Abhängigkeit von einem Parameter t fest, erhält man eine Flächenkurve. Parameterlinien helfen bei Visualisierungen, um sich die Flächen besser vorstellen zu können. Vergleichbar mit einer Kurventangente ist bei einer Fläche die Tangentialebene. Sie enthält die Tangentenvektoren aller Flächenkurven in einem Punkt, damit auch die partiellen Ableitungsvektoren, welche die Tangentenvektoren der Parameterlinien sind.

Für viele Anwendungen wichtig sind Regelflächen. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass auf ihnen unendlich viele Geraden liegen. Jede Regelfläche lässt sich darstellen, indem eine Leitkurve und die Erzeugendenrichtung in Abhängigkeit von einem Parameter t angegeben werden, wobei der Erzeugendenvektor mit Hilfe eines Parameters v in seiner Länge variiert werden kann.

Bei Regelflächen muss zwischen windschiefen und torsalen Erzeugenden und bei torsalen Erzeugenden noch zwischen zylindrisch torsalen und nichtzylindrisch torsalen Erzeugenden unterschieden werden: Bei windschiefen Erzeugenden sind alle Tangentialebenen verschieden. Im Gegensatz dazu sind bei torsalen Erzeugenden alle Tangentialebenen gleich. Eine zylindrisch torsale Erzeugende hat nur reguläre Punkte. Eine nichtzylindrisch torsale Erzeugende hat hingegen genau einen singulären Punkt.

Jede windschiefe Erzeugende hat einen Zentralpunkt. Die Tangentialebenen von symmetrisch zum Zentralpunkt liegenden Punkten schließen mit der Tangentialebene im Zentralpunkt gleich große Winkel ein. Verbindet man die Zentralpunkte aller Erzeugenden, erhält man die Striktionslinie der Regelfläche.

Die einschaligen Hyperboloide und die HP-Flächen sind „doppelte“ Regelflächen, auf denen sogar zwei Scharen von unendlich vielen Geraden liegen. Die Schraubwendelfläche, das Plücker-Konoid, das Möbius-Band, die Schraubtorse und das Oloid sind weitere Beispiele für besonders interessante Regelflächen.

Für schwierige oder aufwändige Rechengänge habe ich MAPLE verwendet. Die Grafiken sind mit MAPLE, MicroStation und CorelDRAW erstellt worden. Mehrere Grafiken habe ich aus meinen Unterrichtsunterlagen oder der Literatur übernommen.

II. Inhaltsverzeichnis

I. Zusammenfassung.....	2
II. Inhaltsverzeichnis.....	4
III. Vorwort	6
1. Kurven	7
1.1. Parameterdarstellung.....	7
1.2. Parameterwechsel.....	11
1.3. Tangente.....	12
1.4. Bogenlänge s als Parameter	14
1.5. Schmieg Ebene	16
1.6. Begleitendes Dreibein	17
2. Flächen	22
2.1. Parameterdarstellung.....	22
2.2. Parameterlinien und Flächenkurven	23
2.3. Tangenten und Tangentialebenen	26
3. Regelflächen.....	28
3.1. Parameterdarstellung.....	29
3.2. Tangentialebene und Flächennormale.....	31
3.3. Windschiefe und torsale Erzeugende.....	32
3.3.1. Torsale Erzeugende	32
3.3.2. Windschiefe Erzeugende	34
3.4. Striktionslinie.....	35
3.5. Erzeugende – Zusammenfassung.....	39
3.5.1. Windschiefe Erzeugende	39
3.5.2. Torsale Erzeugende	39
3.6. Torsale Regelflächen	40
3.6.1. Zylinderflächen	41
3.6.2. Kegelflächen	42
3.6.3. Tangentenflächen.....	43
3.6.4. Allgemeine torsale Regelflächen.....	45
4. Spezielle Regelflächen	47
4.1. Drehregelflächen.....	47
4.1.1. Parameterdarstellung einer allgemeinen Drehregelfläche.....	47
4.1.2. Meridian der allgemeinen Drehregelfläche	49

4.1.3.	Weitere Eigenschaften	51
4.2.	HP – Flächen	53
4.2.1.	Parameterdarstellung.....	53
4.2.2.	Parameterlinien.....	54
4.2.3.	Beispiel einer HP-Fläche	55
4.2.4.	Hyperbolische Paraboloid	55
4.3.	Wendelflächen	57
4.3.1.	Parameterdarstellung.....	58
4.3.2.	Schraubwendelfläche	59
4.3.3.	Plücker-Konoid.....	60
4.4.	Möbius-Band	63
4.4.1.	Parameterdarstellung.....	63
4.4.2.	Besonderheiten des Möbius-Bandes	65
4.5.	Schraubtorse	67
4.5.1.	Parameterdarstellung.....	67
4.5.2.	Höhenschichtlinien.....	68
4.6.	Oloid	69
4.6.1.	Parameterdarstellung.....	70
4.6.2.	Erzeugende.....	72
IV.	Nachwort.....	74
V.	Quellenverzeichnis	75
VI.	Abbildungsverzeichnis.....	76
VII.	Erklärung	78

III. Vorwort

Inhalt:

Die ersten beiden Kapitel befassen sich mit Parameterdarstellungen von Kurven und Flächen. Für die Arbeit wichtige geometrische Begriffe werden erklärt.

Im dritten Kapitel werden die Regelflächen mathematisch erfasst und untersucht. Einige wichtige Eigenschaften dieser interessanten und besonders in der Architektur wichtigen Flächen werden hergeleitet.

Im letzten Kapitel werden einige spezielle Regelflächen vorgestellt, u.a. das einschalige Drehhyperboloid und das Möbius-Band.

Mathematische Voraussetzungen:

Wenn man an eine Funktion $x \rightarrow f(x)$, $x \in [a, b]$ denkt, stellt man sich ihren Graph in der Regel als glatte Kurve vor. Damit diese Vorstellung auch zutrifft, muss man Annahmen bezüglich Stetigkeit und Differenzierbarkeit treffen.

Alle in dieser Arbeit nicht explizit angegebenen Funktionen mögen so sein, dass ihre ersten und zweiten Ableitungen existieren und dass auch die zweiten Ableitungen noch stetig sind.

Man sagt auch, die verwendeten Funktionen sind aus der Funktionsklasse C^2 .

Alle Informationen stammen aus der angegebenen Literatur, dem Mathematik- und DG-Unterricht sowie dem persönlichen Gespräch mit meinem Betreuer.

1. Kurven

1.1. Parameterdarstellung

Bei der **Parameterdarstellung** einer Kurve werden die Punkte der Kurve mit einer Hilfsvariablen berechnet, die man Parameter nennt.

Eine Kurve wird also in der Form $P = P(t)$ angegeben, wobei jede Koordinate eine Funktion des Parameters t ist:

$$P(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$

Zu einer Parameterdarstellung gehört immer auch ein Intervall $[a; b]$, in dem sich der Parameter t bewegt.

Durch Einsetzen eines Parameterwertes t erhält man einen Punkt $P(t)$. Jedem Parameterwert des Intervalls $[a; b]$ kann somit genau ein Punkt zugeschrieben werden. Die Gesamtheit dieser Punkte ergibt die Kurve. Die Endpunkte des Intervalls ergeben die Endpunkte der Kurve.

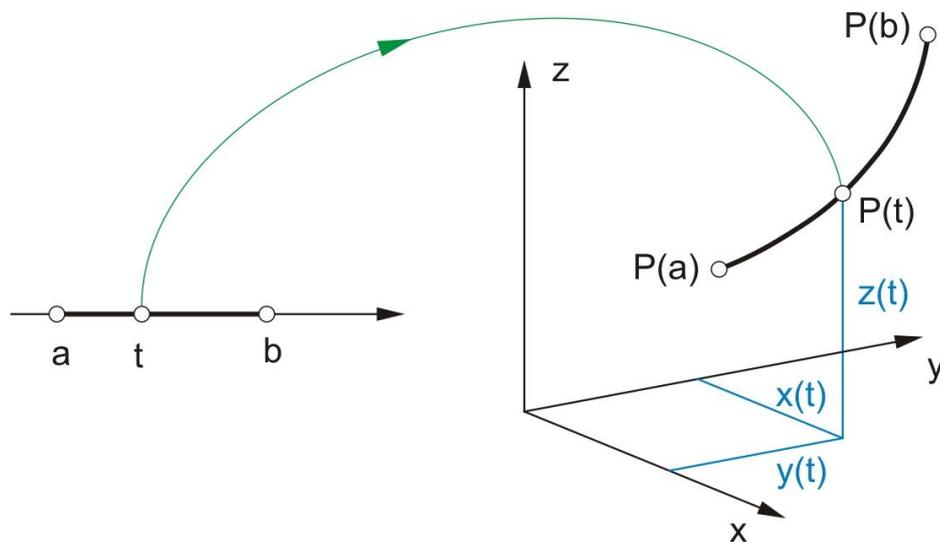


Abbildung 1 – Parameterdarstellung

Bei ebenen Kurven, die in der xy -Ebene liegen, ist die z -Koordinate $z = 0$ zu setzen.

Beispiel 1: Parameterdarstellung einer Schraublinie

Dreht man einen Punkt P mit dem Drehwinkel t um eine Achse a und schiebt ihn gleichzeitig in Richtung der Achse a , wobei die Schiebstrecke proportional zum Drehwinkel ist (also $p \cdot t$), so bewegt sich P auf einer Schraublinie.

Wählt man die z -Achse als Achse a und legt den Anfangspunkt $P_0 = (r, 0, 0)$ auf die x -Achse, so ergibt sich – wie aus Abbildung 2 ablesbar – folgende Parameterdarstellung:

$$P(t) = [r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t), p \cdot t]$$

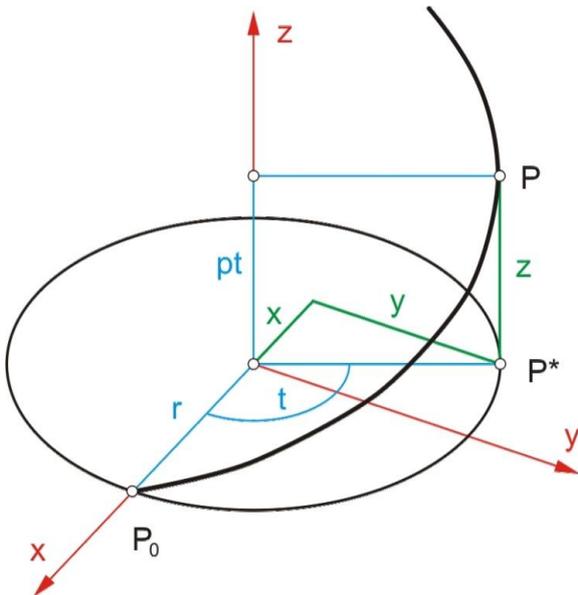


Abbildung 2 – Herleitung Schraublinie

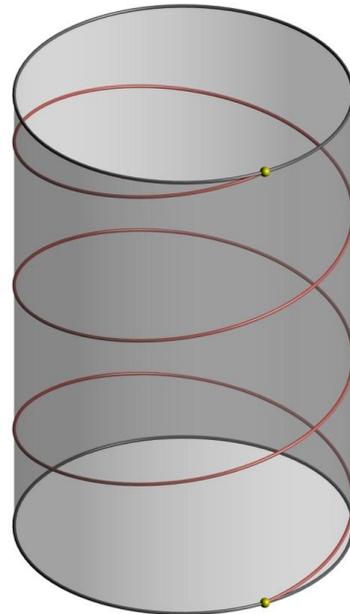


Abbildung 3 – Schraublinie (drei Gänge) [8]

Die Schraublinie liegt auf einem Drehzylinder. Im Grundriss erscheint sie als Kreis mit dem Radius r . Man nennt r den Radius und p den Parameter der Schraublinie. Für $0 \leq t \leq 2\pi$ erhält man einen Gang der Schraublinie, der sich für $t \geq 2\pi$ periodisch wiederholt.

Beispiel 2: Parameterdarstellung einer Bezierkurve

Bezierkurven¹ sind in der Computergrafik von grundlegender Bedeutung. Sie werden durch ein Polygon festgelegt und mit dem Algorithmus von de Casteljau² berechnet.

Wenn das Polygon aus vier Punkten B_0, B_1, B_2 und B_3 besteht (siehe Abbildung 4), sieht der Algorithmus von de Casteljau so aus:

- 1) Nach Wahl eines Parameterwerts $t \in [0; 1]$ werden die Strecken B_0B_1, B_1B_2 und B_2B_3 im Verhältnis $t: (1 - t)$ geteilt. Dies liefert die Punkte B_0^1, B_1^1 und B_2^1 .
- 2) Nun werden die Strecken $B_0^1B_1^1$ und $B_1^1B_2^1$ im Verhältnis $t: (1 - t)$ geteilt. Dies liefert die Punkte B_0^2 und B_1^2 .
- 3) Schließlich wird noch die Strecke $B_0^2B_1^2$ im Verhältnis $t: (1 - t)$ geteilt. Dies liefert den Punkt $B_0^3 = P$

Wenn t das Intervall $[0; 1]$ durchläuft, bewegt sich P auf einer Kurve, die man Bezierkurve nennt.

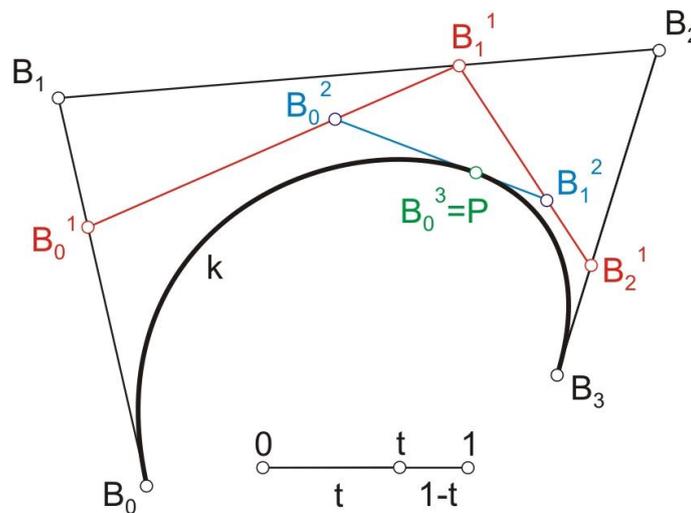


Abbildung 4 – Bezierkurve [7]

Will man eine Strecke AB im Verhältnis $t: (1 - t)$ teilen, erhält man den Teilungspunkt T bekanntlich mit der Formel $T = A + t \cdot AB$. Aufgrund von $AB = B - A$ erhält man durch Umformung die Formel $T = (1 - t) \cdot A + t \cdot B$, mit der man den Teilungspunkt direkt aus den Koordinaten der Eckpunkte berechnen kann, ohne zuvor den Verbindungsvektor AB bestimmt zu haben.

¹ Pierre Bezier, 1910-1999, französischer Ingenieur

² Paul de Casteljau, *1930, französischer Mathematiker und Physiker

Die genannte Formel liefert die ersten drei Teilungspunkte B_0^1, B_1^1 und B_2^1 (Schritt 1 des Algorithmus von de Casteljau):

$$B_0^1 = (1 - t) \cdot B_0 + t \cdot B_1$$

$$B_1^1 = (1 - t) \cdot B_1 + t \cdot B_2$$

$$B_2^1 = (1 - t) \cdot B_2 + t \cdot B_3$$

Ebenso erhält man die Teilungspunkte B_0^2 und B_1^2 (Schritt 2 des Algorithmus von de Casteljau):

$$B_0^2 = (1 - t) \cdot B_0^1 + t \cdot B_1^1$$

$$B_1^2 = (1 - t) \cdot B_1^1 + t \cdot B_2^1$$

Schließlich erhält man den Punkt $P = B_0^3$ (Schritt 3 des Algorithmus von de Casteljau):

$$P = (1 - t) \cdot B_0^2 + t \cdot B_1^2$$

Durch Einsetzen von B_0^2 und B_1^2 sowie von B_0^1, B_1^1 und B_2^1 erhält man nach einigen Umformungen:

$$P = (1 - t)^3 \cdot B_0 + 3 \cdot (1 - t)^2 \cdot t \cdot B_1 + 3 \cdot (1 - t) \cdot t^2 \cdot B_2 + t^3 \cdot B_3$$

Gegeben sei nun ein Kontrollpolygon durch die Punkte $B_0(1,0,0), B_1(1,1,0), B_2(0,1,0)$ und $B_3(0,0,1)$. Gesucht ist die dazugehörige Bezierkurve.

Die Parameterdarstellung lautet:

$$P = (1 - t)^3 \cdot [1,0,0] + 3 \cdot (1 - t)^2 \cdot t \cdot [1,1,0] + 3 \cdot (1 - t) \cdot t^2 \cdot [0,1,0] + t^3 \cdot [0,0,1]$$

Nach Vereinfachen der einzelnen Koordinatenfunktionen erhält man folgende Parameterdarstellung:

$$P = [2t^3 - 3t^2 + 1, -3t^2 + 3t, t^3]$$

Diese dem Einheitswürfel eingeschriebene Bezierkurve ist in Abbildung 5 dargestellt.

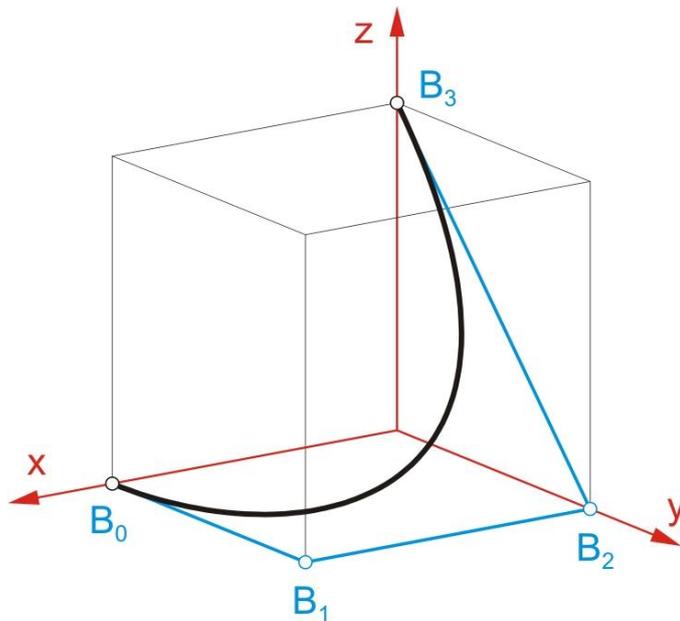


Abbildung 5 – Bezierkurve [7]

1.2. Parameterwechsel

In manchen Fällen kann eine gezielte Veränderung des Parameters hilfreich sein, beispielsweise wenn man die Funktion für eine Koordinate möglichst einfach halten möchte. Dafür muss der Parameter t selbst als eine Funktion $t = t(u)$ eines Parameters u aufgefasst werden. Damit kann die ursprüngliche Parameterdarstellung in t in eine Parameterdarstellung in u transformiert werden:

$$P(u) = P[t(u)] = [x(t(u)), y(t(u)), z(t(u))]$$

Zusätzlich müssen auch die Intervallgrenzen angepasst werden.

Die Kurve verändert sich dadurch in ihrem Verlauf nicht. Der einzige Unterschied ist, dass die Kurve mit verschiedenen Geschwindigkeiten durchlaufen wird, wenn man den Parameter jeweils als Zeit interpretiert.

Beispiel 3: Parameterwechsel

Die in *Beispiel 2* behandelte Bezierkurve besitzt im Intervall $[0; 1]$ die zuvor ermittelte Parameterdarstellung:

$$P(t) = [2t^3 - 3t^2 + 1, -3t^2 + 3t, t^3]$$

Die Kurve kann etwa mit der Funktion $t(u) = \sqrt[3]{u}$ umparametrisiert werden. Man erhält eine neue Parameterdarstellung derselben Kurve:

$$P(u) = [2u - 3\sqrt[3]{u^2} + 1, -3\sqrt[3]{u^2} + 3\sqrt[3]{u}, u]$$

In diesem Fall ergibt sich kein anderes Intervall, da sich bei Einsetzen der Grenzen $t = 0$ und $t = 1$ in die Funktion $t(u) = \sqrt[3]{u}$ die Grenzen $u = 0$ und $u = 1$ ergeben. Die Parameterdarstellung $P(u)$ ist daher auch im Intervall $[0; 1]$ definiert.

1.3. Tangente

Die Herleitung der Tangente erfolgt wie in der elementaren Differentialrechnung. Sei $P(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ ein Punkt auf der Kurve k . Es wird eine Gerade durch den Punkt $P(t)$ und einen zweiten Punkt $P(t + \Delta t)$ gelegt. Bei $\Delta t \rightarrow 0$ nähert sich die Gerade immer mehr der Tangente in $P(t)$ an.

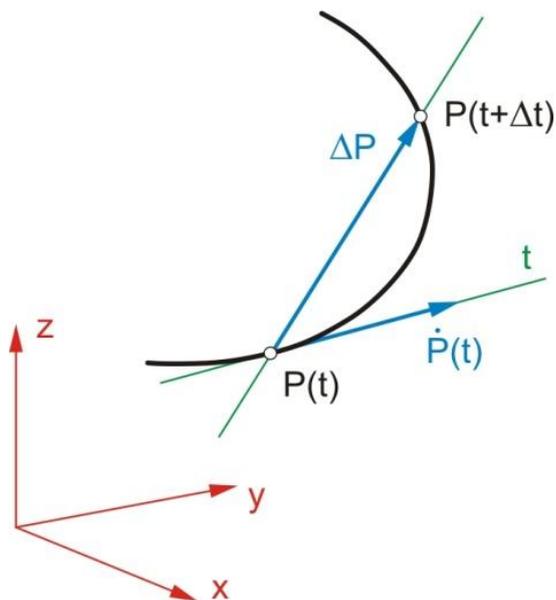


Abbildung 6 – Tangente

Da $\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t)$ immer kleiner wird, je mehr $\Delta t \rightarrow 0$ geht, wird ΔP durch Δt dividiert, da die Division durch eine sehr kleine Zahl den Vektor wieder länger macht. Durch die Division von ΔP durch Δt wird ein Richtungsvektor der Sekante erzeugt, der bei $\Delta t \rightarrow 0$ nicht gegen den Nullvektor konvergiert:

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \Delta P = \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} x(t + \Delta t) - x(t) \\ y(t + \Delta t) - y(t) \\ z(t + \Delta t) - z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\ \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \\ \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \end{bmatrix}$$

Für $\Delta t \rightarrow 0$ erhält man einen auf der Tangente liegenden Vektor \dot{P} , den man **Tangentenvektor** nennt.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = \dot{P} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

Somit ist hergeleitet, dass man einen Richtungsvektor der Tangente erhält, indem man die einzelnen Funktionen $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ ableitet.

Nach einem Parameterwechsel $t = t(u)$ ergibt sich aufgrund der Kettenregel ein anderer Tangentenvektor:

$$P(u) = P(t(u))$$

$$P'(u) = \dot{P}(t) \cdot t'(u)$$

Hier bedeutet $\dot{}$ die Ableitung nach t und $'$ die Ableitung nach u .

Es ist zu erkennen, dass der Vektor P' sich nur betragsmäßig vom Vektor \dot{P} unterscheidet. Der Tangentenvektor P' hat somit die gleiche Richtung, kann sich jedoch in Orientierung und Länge vom Tangentenvektor \dot{P} unterscheiden.

Beispiel 4: Tangentenvektor

Gegeben ist wieder die Parameterdarstellung der Bezierkurve

$$P = [2t^3 - 3t^2 + 1, -3t^2 + 3t, t^3]$$

von *Beispiel 2*. Für $t = 0.5$ ergibt sich der Punkt $P_0 = [0.5, 0.75, 0.125]$. Um den Tangentenvektor \dot{P} in einem Punkt P berechnen zu können, muss man die erste Ableitung bilden:

$$\dot{P} = [6t^2 - 6t, -6t + 3, 3t^2]$$

Der Tangentenvektor im Punkt P_0 wird nun durch Einsetzen von $t = 0.5$ berechnet:

$$\dot{P}_0 = [-1.5, 0, 0.75]$$

1.4. Bogenlänge s als Parameter

Eine spezielle Art der Parametrisierung ist die Verwendung der Bogenlänge s als Parameter. Diese wird auch natürliche Parametrisierung genannt und ist für theoretische Herleitungen sehr gut geeignet.

Wenn man sich auf der Kurve vom Punkt $P(t)$ zum Punkt $P(t + \Delta t)$ bewegt, so ändern sich die x -, y - und z -Koordinate von P um Δx , Δy und Δz .

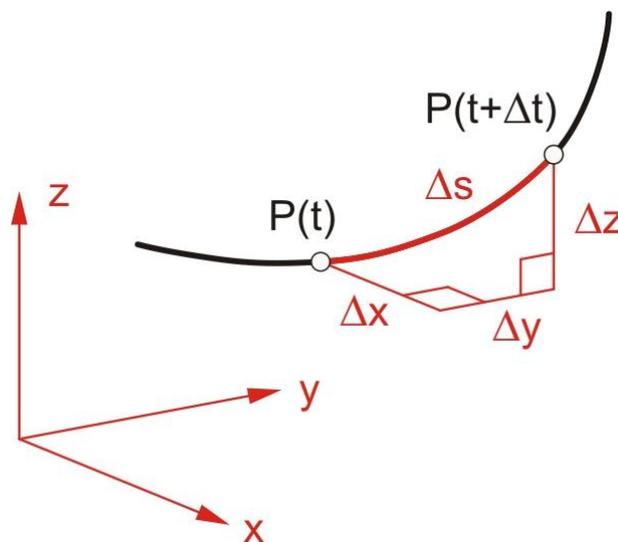


Abbildung 7 – Herleitung Bogenlänge

Für sehr kleine Δt kann der Bogen Δs als fast geradlinig angesehen werden. Zweimalige Anwendung des Satzes von Pythagoras liefert:

$$\Delta s^2 \approx \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

Nach Division durch Δt^2 ergibt sich:

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)^2 \approx \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2$$

Nach dem Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ erhält man:

$$\dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

Die Ableitung \dot{s} der Bogenlänge s ist also der Betrag des Tangentenvektors $\dot{P} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$:

$$\dot{s} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = |\dot{P}|$$

Die Bogenlänge lässt sich daher durch Integration berechnen:

$$s = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

Man kann die Bogenlänge s selbst als Parameter verwenden. Bei der Ableitung nach der Bogenlänge s verwendet man üblicherweise das Symbol $'$.

Da die Ableitung von s nach sich selbst 1 ist, ergibt sich aus der Formel

$$s' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = |P'|$$

dass der Tangentenvektor P' in diesem Fall die Länge 1 hat.

$$|P'(s)| = 1$$

1.5. Schmiegebene

Wenn man den Tangentenvektor \dot{P} differenziert, erhält man den Vektor \ddot{P} . Die an dem Punkt P angehängten Vektoren \dot{P} und \ddot{P} spannen eine Ebene auf, die als **Schmiegebene** σ der Kurve im Punkt P bezeichnet wird.

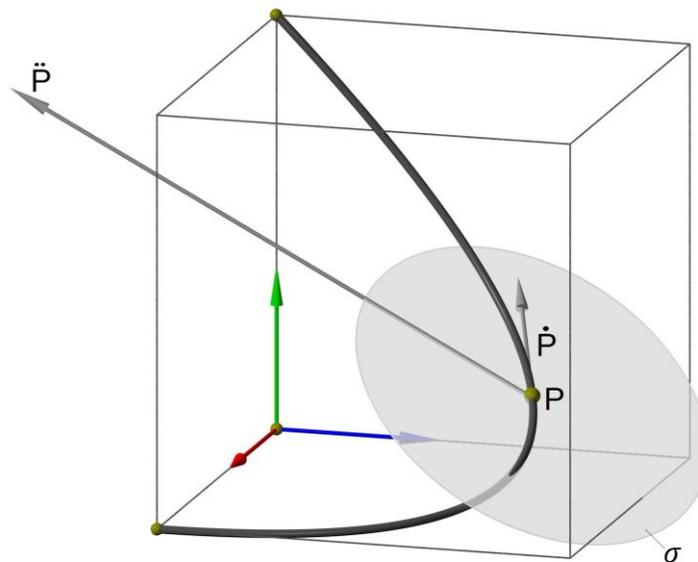


Abbildung 8 – Schmiegebene

Bei einem Parameterwechsel $t = t(u)$ benötigt man für die Herleitung von $P''(u)$ die Kettenregel und die Produktregel:

$$P(u) = P(t(u))$$

$$P'(u) = \dot{P}(t) \cdot t'(u)$$

$$P''(u) = \ddot{P}(t) \cdot [t'(u)]^2 + \dot{P}(t) \cdot t''(u)$$

Der Vektor P' hat dieselbe Richtung wie der Vektor \dot{P} . Der Vektor P'' hat nicht dieselbe Richtung wie der Vektor \ddot{P} , er liegt aber in der von \ddot{P} und \dot{P} aufgespannten Ebene. Die Schmiegebene σ wird folglich auch von den Vektoren P' und P'' aufgespannt. Sie ändert sich also bei einem Parameterwechsel nicht und ist daher ein „geometrischer Begriff“.

Bei einer Parametrisierung mit der Bogenlänge s gilt:

$$|P'| = 1$$

$$P'^2 = 1$$

$$2 \cdot P' \cdot P'' = 0$$

$$P' \cdot P'' = 0$$

Der Vektor P'' steht also in diesem Fall normal auf den Tangentenvektor P' , der immer ein Einheitsvektor ist.

1.6. Begleitendes Dreiein

Jeder Kurve kann im Punkt $P(t)$ mithilfe der Tangente und der Schmiegebene ein Koordinatensystem zugewiesen werden: Die x-Achse liegt auf \dot{P} , die y-Achse liegt in der Schmiegebene σ und weist in dieselbe Halbebene, in die auch \ddot{P} weist. Die z-Achse ist automatisch mitbestimmt. Dieses Koordinatensystem wird **begleitendes Dreiein** genannt.

Für die Untersuchung der lokalen Lage der Kurve bezüglich ihrer Schmiegebene und somit auch des begleitenden Dreieins wird die Kurve mit dem natürlichen Parameter, der Bogenlänge s , parametrisiert: $P = P(s)$.

Das heißt für die Kurve, dass der Tangentenvektor P' ein Einheitsvektor ist und dass der Vektor P'' normal auf P' ist. Da P'' in der Schmiegebene liegt, muss P'' also auf der positiven y-Achse des begleitenden Dreieins liegen.

Wie die Kurve in der Nähe eines Punktes P_0 bezüglich ihrer Schmiegebene liegt, kann lokal mit Hilfe einer Taylor-Approximation³ festgestellt werden. Wir stellen uns dazu vor, dass die Kurve im Dreiein des Punktes P_0 beschrieben wird, wobei P_0 zu $s = 0$ gehört. Für die Taylor-Approximation werden die Ableitungen benötigt.

$$P_0 = (0,0,0)$$

$$P'_0 = (1,0,0)$$

$$P''_0 = (0, a, 0), a \geq 0$$

$$P'''_0 = (b, c, d)$$

³ Brook Taylor, 1685-1731, englischer Mathematiker

Für den allgemeinen Fall ($a, b, c, d \neq 0$ – nur dieser wird hier behandelt) lautet die Taylor-Approximation wie folgt:

$$x(s) = 0 + 1s + 0s^2 + \frac{bs^3}{6} + \dots$$

$$y(s) = 0 + 0s + \frac{a}{2}s^2 + \frac{cs^3}{6} + \dots$$

$$z(s) = 0 + 0s + 0s^2 + \frac{d}{6}s^3 + \dots$$

Für kleine s kommt man zu folgendem Ergebnis:

$$x(s) \approx s$$

$$y(s) \approx \frac{a}{2}s^2, a \geq 0$$

$$z(s) \approx \frac{d}{6}s^3$$

Mit diesen lokalen Näherungen kann die Kurve jetzt genauer beschrieben werden. Dafür werden der Grundriss, der Aufriss und der Kreuzriss im Dreibein von P_0 betrachtet.

Grundriss:

Eliminiert man den Parameter s aus $x = s$ und $y = \frac{a}{2} \cdot s^2$, so erhält man $a \cdot x^2 = 2 \cdot y$. Das ist die Gleichung einer Parabel, die zur y -Achse symmetrisch ist.

Aufriss:

Eliminieren von s aus $y = \frac{a}{2} \cdot s^2$ und $z = \frac{d}{6} \cdot s^3$ führt auf $8 \cdot d^2 \cdot y^3 = 36 \cdot a^3 \cdot z^2$. Diese Kurve ist symmetrisch zur y -Achse und hat in P_0 eine Spitze mit der y -Achse als Spitzentangente.

Kreuzriss:

Eliminieren von s aus $z = \frac{d}{6} \cdot s^3$ und $x = s$ liefert die Gleichung $d \cdot x^3 = 6 \cdot z$. Diese Kurve hat in P_0 einen Wendepunkt mit der x -Achse als Wendetangente.

Diese theoretische Untersuchung der lokalen Lage der Kurve in der Nähe eines Punktes P_0 rechtfertigt auch den Namen „Schmiegeebene“. Die Ebene schmiegt sich in P_0 optimal an die Kurve an. Überquert man P_0 beim Durchlaufen der Kurve, so ändert sich das Vorzeichen der z-Koordinate. Die Schmiegeebene berührt die Kurve also nicht nur (wie es bei jeder Ebene durch die Tangente der Fall wäre), sondern sie durchsetzt sie.

Blickt man in Richtung der Tangente in P_0 (x-Achse) auf die Kurve, so weist das Bild (Aufriss) in P_0 eine Spitze auf. Blickt man hingegen in Richtung der Hauptnormalen in P_0 (y-Achse) auf die Kurve, so weist das Bild (Kreuzriss) in P_0 einen Wendepunkt auf. Die als Gerade erscheinende Schmiegeebene ist die Wendetangente.

Eine Visualisierung mit der bereits erwähnten Bezierkurve

$$P = [2t^3 - 3t^2 + 1, -3t^2 + 3t, t^3]$$

bestätigt diese theoretische Einsicht. Das erste Bild (Abbildung 9) zeigt die Bezierkurve und das Dreibein für einen Punkt P_0 in einer üblichen Ansicht. Die weiteren Bilder zeigen den Grundriss (Abbildung 10), den Aufriss (Abbildung 11) und den Kreuzriss (Abbildung 12) im Dreibein von P_0 .

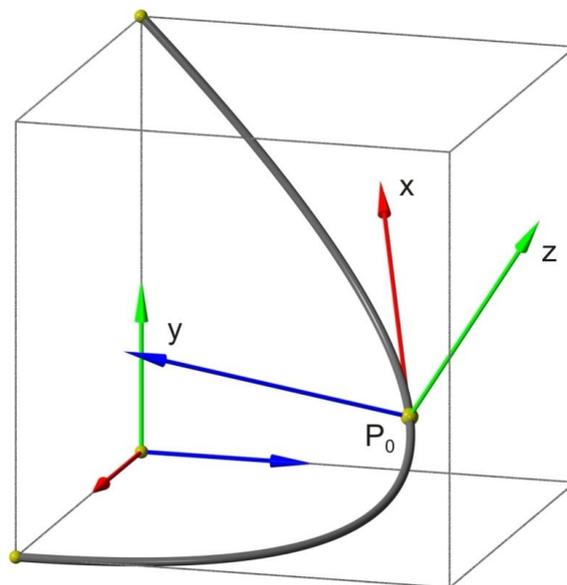


Abbildung 9 – Dreibein

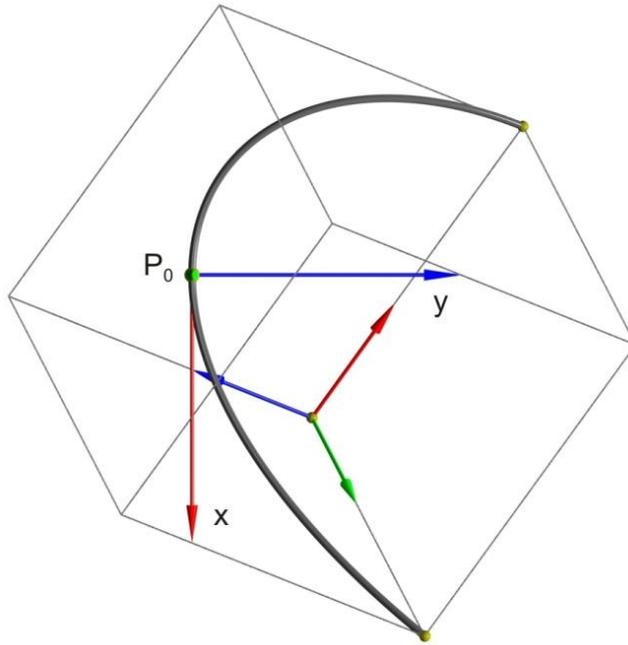


Abbildung 10 – Dreibein - Grundriss

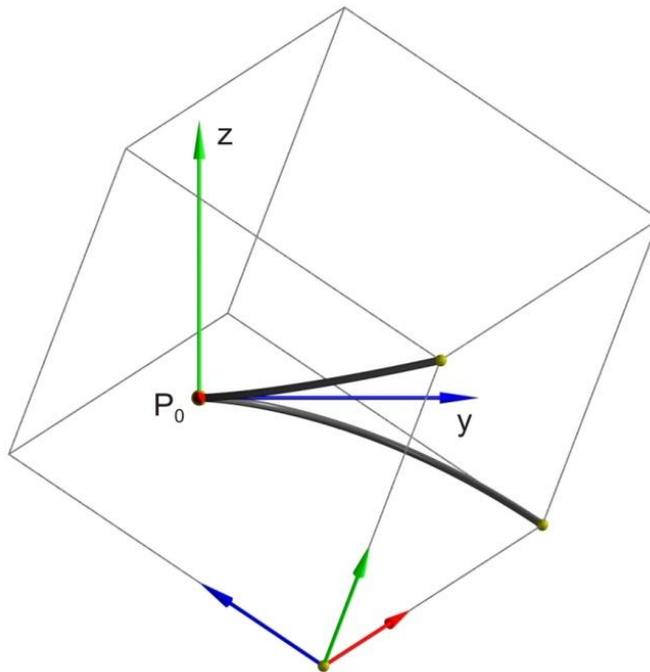


Abbildung 11 – Dreibein – Aufriss

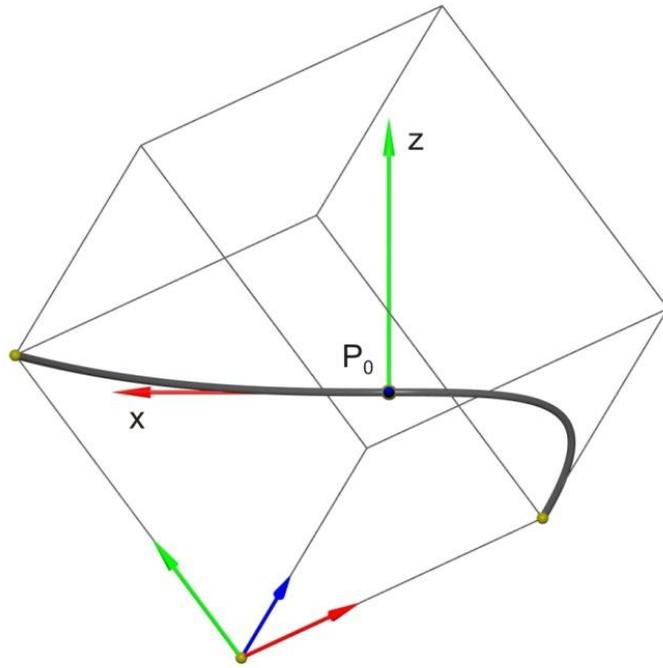


Abbildung 12 – Dreibein - Kreuzriss

2. Flächen

2.1. Parameterdarstellung

Bei Kurven kann jeder Punkt mit einer Parameterdarstellung der Form

$$P(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$

angeben werden.

Um Flächen darstellen zu können, braucht man Parameterdarstellungen mit zwei Parametern u und v , jeweils mit ihren Intervallen $[a; b]$ beziehungsweise $[c; d]$. Man kann sich dazu ein Koordinatensystem mit den Achsen u und v vorstellen. Durch $a \leq u \leq b$ und $c \leq v \leq d$ wird ein Rechteck beschrieben. Jeder Punkt (u, v) dieses Rechteckes wird mit drei Funktionen $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ und $z = z(u, v)$ auf einen Punkt $P(x, y, z)$ der Fläche abgebildet. Es handelt sich also um eine Parameterdarstellung der Form:

$$P(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$$

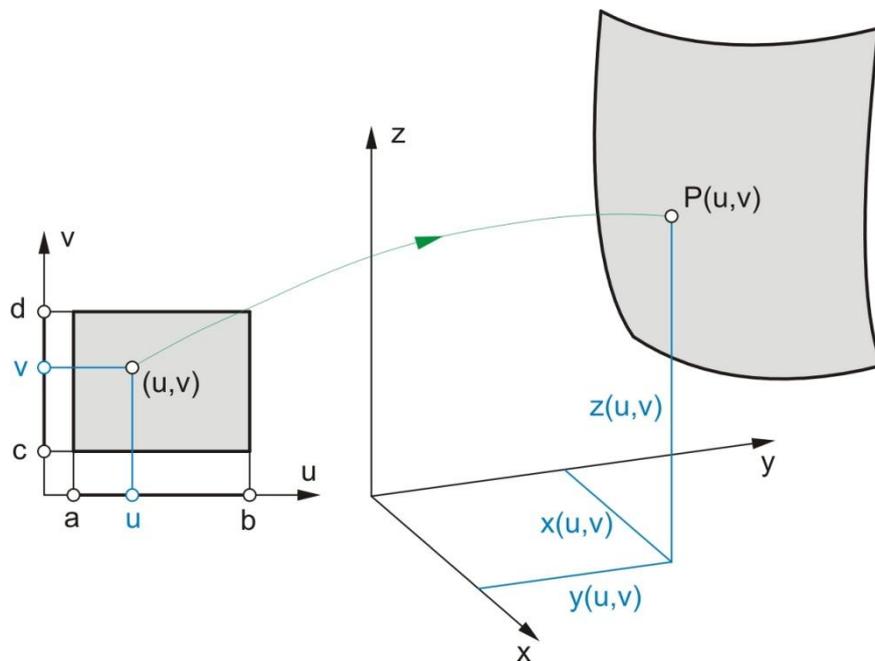


Abbildung 13 – Parameterdarstellung [4, bearbeitet]

Beispiel 5: Parameterdarstellung einer Fläche

Eine Fläche ist durch folgende Parameterdarstellung festgelegt:

$$P(u, v) = [u, v, u^3 - 3 \cdot u \cdot v^2]$$

In Abbildung 14 ist der durch $-1 \leq u \leq 1$ und $-1 \leq v \leq 1$ begrenzte Teil der Fläche zu sehen. Diese Fläche ist übrigens unter dem Namen „Affensattel“ bekannt.

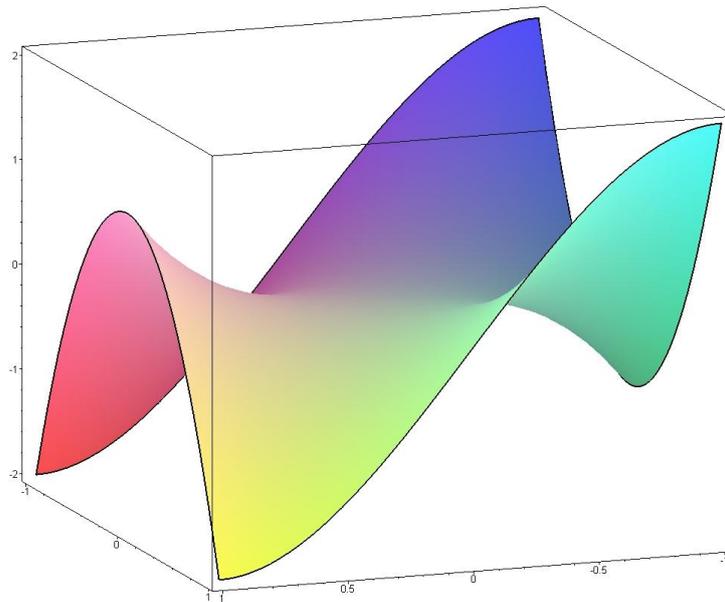


Abbildung 14 – Beispiel 5 (Affensattel)

2.2. Parameterlinien und Flächenkurven

Wird einer der beiden Parameter u oder v konstant gehalten (dies entspricht im Koordinatensystem der Parameter einer achsenparallelen Geraden), so entsteht auf der Fläche eine **Parameterlinie**. Hält man v konstant und u variabel, so nennt man die entsprechende Parameterlinie eine u -Linie. Ist hingegen u konstant und v variabel, so erhält man eine v -Linie. Bei Visualisierungen werden Flächen meistens mit einem Netz von Parameterlinien dargestellt, das die Form der Fläche gut erkennen lässt.

Allgemeiner kann man eine beliebige Kurve im Koordinatensystem der Parameter betrachten, festgelegt durch eine Parameterdarstellung $[u(t), v(t)]$. Die entsprechende Kurve auf der Fläche nennt man eine **Flächenkurve**.

Da die beiden Parameter u und v nun von einem Parameter t abhängen, sieht die Parameterdarstellung der Flächenkurve wie folgt aus:

$$P(t) = [x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))]$$

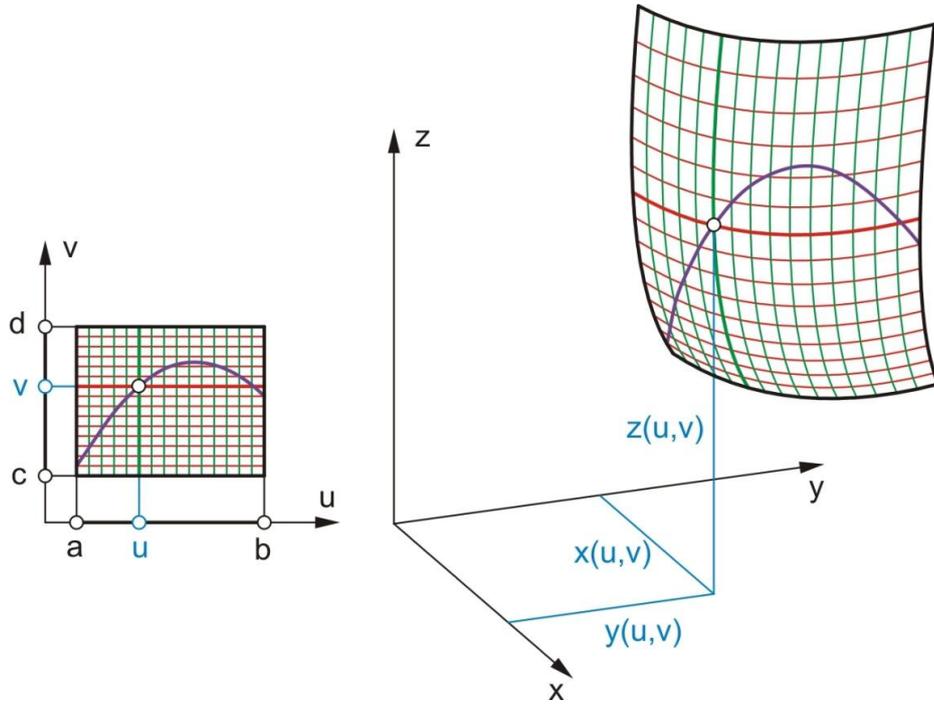


Abbildung 15 – Parameterlinien und Flächenkurven [4, bearbeitet]

Beispiel 6: Parameterlinien und Flächenkurve einer Torusfläche

Dreht man einen Kreis (Mittelpunkt M , Radius r) um eine in der Kreisebene liegende Achse a (Abstand $aM = R$), so erhält man eine **Torusfläche** (Abbildung 16).

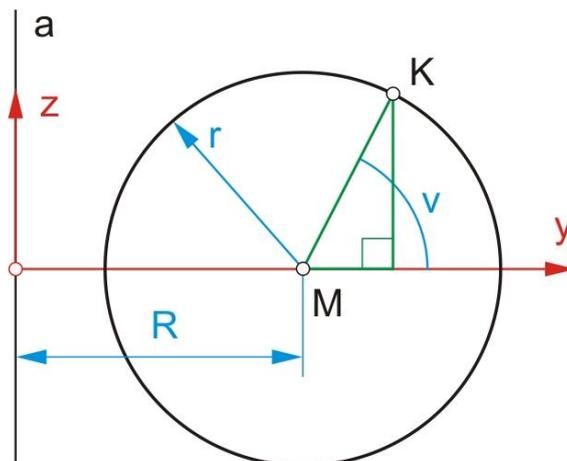


Abbildung 16 – Erzeugung Torusfläche [7]

Bei Verwendung des in Abbildung 16 zu sehenden Koordinatensystems (z-Achse auf a , y-Achse durch M) lässt sich die Parameterdarstellung des Kreises unmittelbar ablesen:

$$K(v) = [0, R + r \cdot \cos v, r \cdot \sin v]$$

Die Drehung um die z-Achse (Drehwinkel u) wird bekanntlich durch die folgenden Gleichungen beschrieben:

$$x = x_0 \cdot \cos u - y_0 \cdot \sin u$$

$$y = x_0 \cdot \sin u + y_0 \cdot \cos u$$

$$z = z_0$$

Setzt man K in diese Gleichungen ein, erhält man eine Parameterdarstellung der Torusfläche:

$$P(u, v) = [-(R + r \cdot \cos v) \cdot \sin u, (R + r \cdot \cos v) \cdot \cos u, r \cdot \sin v]$$

Um die gesamte Torusfläche zu erhalten, müssen die Parameter u und v etwa die Intervalle $[0; 2\pi]$ und $[-\pi; \pi]$ durchlaufen.

In Abbildung 17 ist eine Torusfläche ($r = 1, R = 2$) samt einigen Parameterlinien und einer Flächenkurve dargestellt. Die u -Linien sind die Breitenkreise (Bahnkreise der Punkte des erzeugenden Kreises), die v -Linien sind die Drehlagen des erzeugenden Kreises. Die Flächenkurve wurde durch $u = 2t$ und $v = t$ festgelegt. Ihre Parameterdarstellung lautet:

$$P(t) = [-(2 + \cos t) \cdot \sin 2t, (2 + \cos t) \cdot \cos 2t, \sin t]$$

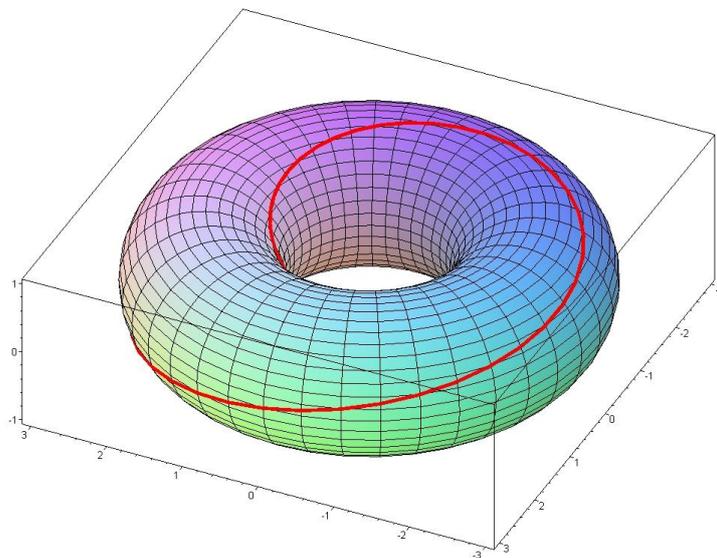


Abbildung 17 – Beispiel 6 (Torus mit Parameterlinien und Flächenkurve)

2.3. Tangenten und Tangentialebenen

Durch jeden Flächenpunkt $P = P(u_0, v_0)$ gehen die beiden Parameterlinien und unendlich viele weitere Flächenkurven (Abbildung 18). Jeder Tangentenvektor dieser Kurven legt eine Flächentangente fest. Den Tangentenvektor der u -Linie $P(u) = P(u, v_0)$ erhält man durch Ableiten nach dem Parameter u . Man schreibt P_u statt \dot{P} für diesen Tangentenvektor, den man auch den partiellen Ableitungsvektor von $P(u, v)$ nach dem Parameter u nennt. Ebenso erhält man für die v -Linie $P(v) = P(u_0, v)$ den Tangentenvektor P_v als partiellen Ableitungsvektor von $P(u, v)$ nach v .

Eine beliebige Flächenkurve durch P wird durch $P(t) = P[u(t), v(t)]$ mit $u_0 = u(t_0)$ und $v_0 = v(t_0)$ festgelegt. Für die Berechnung des Tangentenvektors benötigt man die Kettenregel:

$$\dot{P} = P_u \cdot \dot{u} + P_v \cdot \dot{v}$$

Der Tangentenvektor \dot{P} ist also eine Linearkombination der Tangentenvektoren P_u und P_v der Parameterlinien und liegt daher in der von P_u und P_v aufgespannten Ebene. Diese Ebene enthält demnach alle durch P gehenden Flächentangenten. Man nennt sie die **Tangentialebene** τ der Fläche im Punkt P .

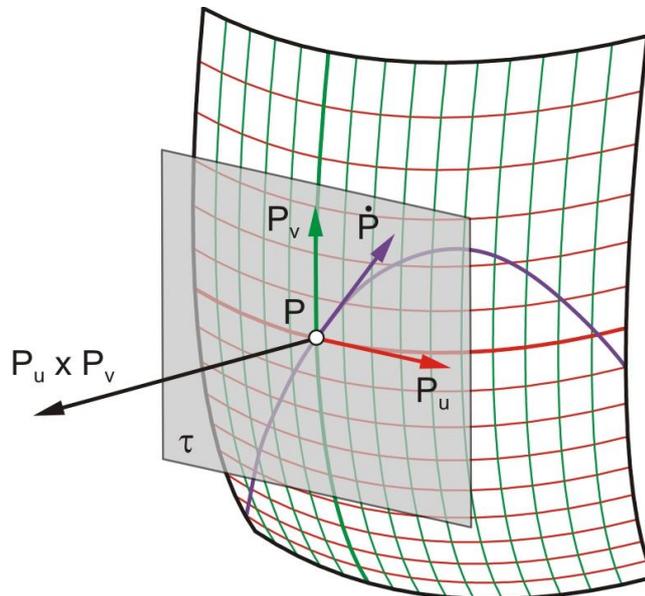


Abbildung 18 – Tangentialebene [4, bearbeitet]

Zum Festlegen einer Tangentialebene verwendet man am einfachsten das Kreuzprodukt der Tangentenvektoren P_u und P_v der Parameterlinien:

$$\mathbf{n} = P_u \times P_v$$

Dieser Vektor steht auf die Tangentialebene normal. Ist $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$, so nennt man den betreffenden Flächenpunkt P regulär. Ist hingegen ausnahmsweise $\mathbf{n} = \mathbf{0}$ (weil P_u und P_v auf einer Linie liegen), so nennt man den Flächenpunkt P singular.

Beispiel 7: Normalvektor

Gegeben ist wieder die Parameterdarstellung der Torusfläche aus Beispiel 6:

$$P(u, v) = [-(2 + \cos v) \cdot \sin u, (2 + \cos v) \cdot \cos u, \sin v]$$

Für $u = \frac{\pi}{3}$ und $v = \frac{\pi}{3}$ ergibt sich der Punkt $P_0 = \left(-\frac{5}{4}\sqrt{3}, \frac{5}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$. Um den Normalvektor $\mathbf{n} = P_u \times P_v$ berechnen zu können, muss man die partiellen Ableitungen bilden:

$$P_u = [-(2 + \cos v) \cdot \cos u, -(2 + \cos v) \cdot \sin u, 0]$$

$$P_v = [\sin v \cdot \sin u, -\sin v \cdot \cos u, \cos v]$$

Durch Einsetzen der konkreten Parameterwerte und Berechnen des vektoriellen Produkts erhält man:

$$\mathbf{n} = \left[-\frac{5}{8}\sqrt{3}, \frac{5}{8}, \frac{5}{4}\sqrt{3}\right] \parallel [-\sqrt{3}, 1, 2\sqrt{3}]$$

3. Regelflächen

Regelflächen werden durch Bewegen einer Geraden im Raum erzeugt.

Der etwas eigenartige Name könnte eventuell auf einem Übersetzungsfehler beruhen. Die englische Bezeichnung lautet „ruled surface“. Natürlich kann man „rule“ mit „Regel“ übersetzen; in diesem Zusammenhang bedeutet „ruled“ aber wohl eher „liniert“.

Ein einfaches Beispiel für eine Regelfläche ist die Wendelfläche: Eine Gerade e wird um eine sie orthogonal treffende Achse a verschraubt, also gedreht und in Richtung der Achse a verschoben, wobei die Schieb Strecke proportional zum Drehwinkel ist (Abbildung 19).

Dreht man die Wendelfläche um die Achse a um 180° , so erhält man die gleiche Fläche wie vor der Drehung. Symmetrisch zur Achse a liegende Punkte P und P^* werden dabei vertauscht. Dies lässt erkennen, dass deren Tangentialebenen τ_P und τ_{P^*} mit der Achse a gleich große Winkel einschließen.

Wandert man mit P und P^* symmetrisch vom zentralen Punkt Z (Schnittpunkt von e und a) weg, so drehen sich die Tangentialebenen τ_P und τ_{P^*} – von der zentralen Lage τ_Z ausgehend – jeweils um denselben Winkel, aber mit entgegengesetzter Orientierung.

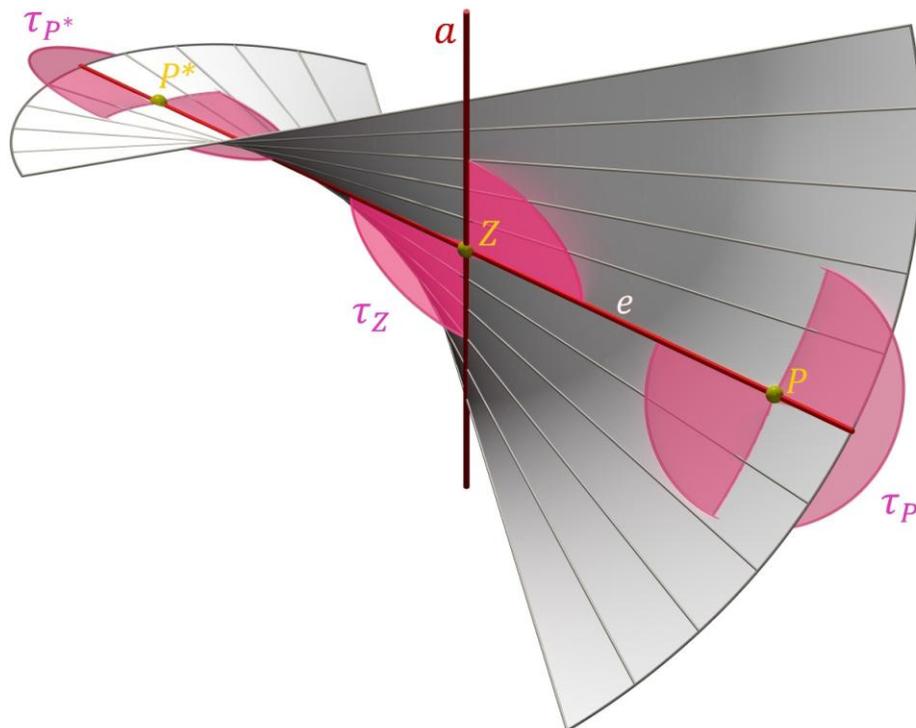


Abbildung 19 – Wendelfläche

Die Achse a ist also eine „Zentrallinie“ für die Wendelfläche. Dies folgt unmittelbar aus der Erzeugung der Fläche durch Verschraubung um die Achse a .

Es ist erstaunlich, dass alle „windschiefen“ Regelflächen eine derartige Zentrallinie haben. Der Nachweis dafür und die Berechnung der Zentrallinie bilden den Schwerpunkt der folgenden Kapitel.

3.1. Parameterdarstellung

Für eine Regelfläche bildet eine beliebige Leitlinie $L = L(t)$ die Grundlage der Parameterdarstellung. Außerdem benötigt man die Richtung der Erzeugenden e , festgelegt durch den **Erzeugendenvektor** $e = e(t)$, der durch Multiplikation mit einem Parameter v in seiner Länge und Orientierung verändert werden kann. Die allgemeine Parameterdarstellung einer Regelfläche lautet daher:

$$P(t, v) = L(t) + v \cdot e(t)$$

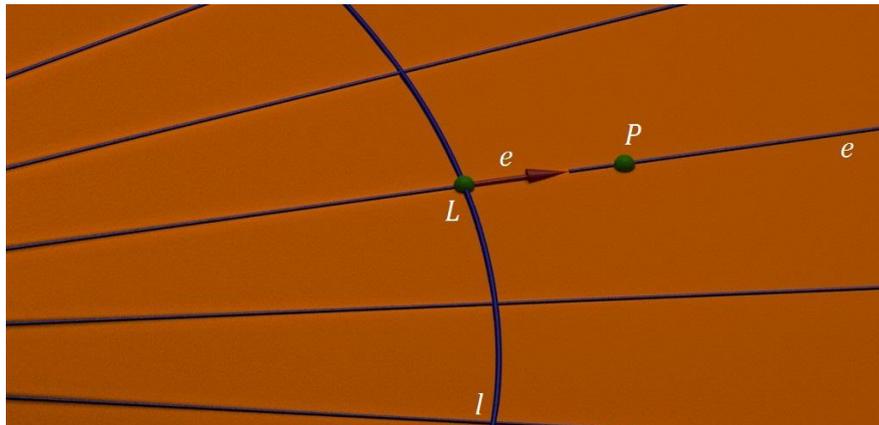


Abbildung 20 – Regelfläche (Parameterdarstellung)

Beispiel 8: Parameterdarstellung einer Regelfläche

Gegeben sei die Bezierkurve aus Beispiel 2 als Leitlinie und $e(t)$ als Erzeugendenvektor:

$$L(t) = [2t^3 - 3t^2 + 1, -3t^2 + 3t, t^3]$$

$$e(t) = [\sin t, t, \cos t]$$

Die Parameterdarstellung der Regelfläche lautet daher:

$$P(t, v) = [2t^3 - 3t^2 + 1 + v \cdot \sin t, -3t^2 + 3t + v \cdot t, t^3 + v \cdot \cos t]$$

Für den Parameter t wird das Intervall $[0; 1]$ verwendet.

Legt man für den Parameter v ein Intervall fest, wobei eine Intervallgrenze 0 ist, so bildet die Leitlinie eine Randkurve der Regelfläche. Dieser Fall ist in Abbildung 21 (links) dargestellt – v bewegt sich im Intervall $[0; 1]$. Die Leitkurve verläuft inmitten der Regelfläche, wenn 0 im Intervall des Parameters v liegt, wie etwa beim Intervall $[-1; 1]$. Dieser Fall ist ebenfalls in Abbildung 21 (rechts) visualisiert. Die Leitlinie ist jeweils rot eingefärbt.

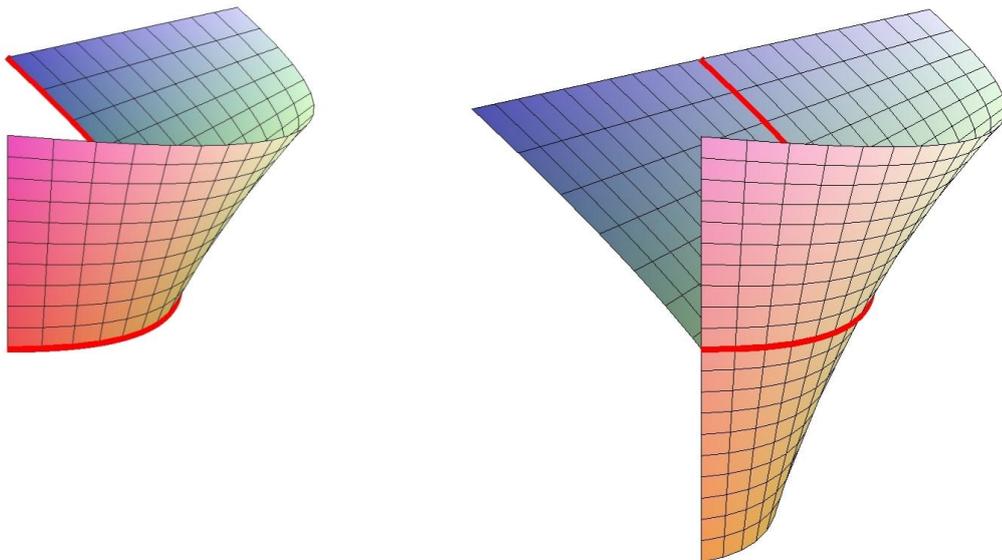


Abbildung 21 – Beispiel 8

Für theoretische Untersuchungen ist es hilfreich, wenn der Erzeugendenvektor \mathbf{e} ein Einheitsvektor ist:

$$|\mathbf{e}| = 1$$

Wegen $\mathbf{e}^2 = 1$ und der Ableitung $2 \cdot \mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{e}} = 0$ folgt daher, dass der Ableitungsvektor $\dot{\mathbf{e}}$ auf den Vektor \mathbf{e} orthogonal steht: $\dot{\mathbf{e}} \perp \mathbf{e}$.

Ab jetzt wird der Erzeugendenvektor \mathbf{e} als Einheitsvektor vorausgesetzt.

3.2. Tangentialebene und Flächennormale

Die Tangentialebene τ wird in einem Punkt P immer von den Tangenten der Parameterlinien im Punkt P aufgespannt. Hält man bei einer Regelfläche t konstant und v variabel, bewegt man sich entlang einer Erzeugenden e . Alle Erzeugenden sind somit auch Parameterlinien. Der Tangentialvektor dieser Parameterlinie ($P(t, v)$ nach v abgeleitet) lautet daher:

$$P_v = e$$

Die Tangentialebene τ in einem Punkt P einer Regelfläche geht immer durch die Erzeugende e und die Normalvektoren n_P aller Tangentialebenen entlang einer Erzeugenden stehen normal auf e . Wenn man diese Normalvektoren n_P in einem fixen Punkt bündelt, zum Beispiel im Koordinatenursprung, so liegen alle in einer Ebene ε , die durch ihren Normalvektor e beschrieben werden kann.

Die zweite Parameterlinie durch P erhält man, wenn man v konstant und t variabel hält. Der Tangentialvektor dieser Parameterlinie ($P(t, v)$ nach t abgeleitet) lautet daher:

$$P_t = \dot{L} + v \cdot \dot{e}$$

Der Normalvektor, der die Tangentialebene im Punkt P festlegt, berechnet sich wie folgt:

$$n_P = P_t \times P_v = (\dot{L} + v \cdot \dot{e}) \times e = \dot{L} \times e + v \cdot (\dot{e} \times e)$$

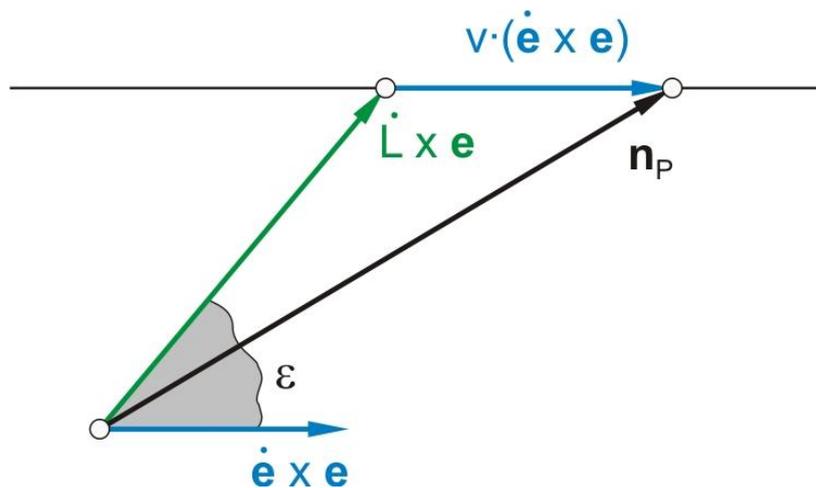


Abbildung 22 – Ebene der Normalvektoren n_P

Der Normalvektor liegt also im Allgemeinen in der von $\dot{L} \times e$ und $\dot{e} \times e$ aufgespannten Ebene. Für $v = 0$ erhält man den Normalvektor im Punkt L :

$$n_L = \dot{L} \times e$$

3.3. Windschiefe und torsale Erzeugende

Wenn man voraussetzt, dass L ein regulärer Flächenpunkt ist (also $\mathbf{n}_L \neq \mathbf{0}$), so können bei der eben hergeleiteten Formel für den Normalvektor

$$\mathbf{n}_P = \dot{L} \times \mathbf{e} + v \cdot (\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{e})$$

drei Fälle unterschieden werden:

- 1) Sonderfall 1: $\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{e}$ ist der Nullvektor
- 2) Sonderfall 2: $\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{e}$ liegt auf \mathbf{n}_L
- 3) Allgemeiner Fall: \mathbf{n}_L und $\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{e}$ spannen eine Ebene auf

3.3.1. Torsale Erzeugende

Sonderfall 1: $\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{e} = \mathbf{0}$

Da der Vektor \mathbf{e} ein Einheitsvektor ist ($|\mathbf{e}| = 1$) und der Ableitungsvektor $\dot{\mathbf{e}}$ orthogonal auf diesen steht ($\dot{\mathbf{e}} \perp \mathbf{e}$), kann das Kreuzprodukt der beiden Vektoren nur dann gleich $\mathbf{0}$ sein ($\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{e} = \mathbf{0}$), wenn $\dot{\mathbf{e}}$ der Nullvektor ist. Dies bedeutet auch, dass alle Normalvektoren \mathbf{n}_P mit dem Normalvektor \mathbf{n}_L ident sind.

$$\mathbf{n}_P = \mathbf{n}_L = \dot{L} \times \mathbf{e}$$

Alle Tangentialebenen längs der betreffenden Erzeugenden sind also gleich. Man spricht von einer **zylindrisch torsalen Erzeugenden**.

Sonderfall 2: $\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{e} \parallel \mathbf{n}_L$

Wenn $\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{e}$ auf $\dot{L} \times \mathbf{e}$ liegt, zieht das nach sich, dass $\dot{\mathbf{e}}$, \mathbf{e} und \dot{L} in einer Ebene liegen. Dadurch hat das durch diese drei Vektoren aufgespannte Parallelepiped das Volumen $V = 0$. Wegen $V = \det(\dot{L}, \mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}})$ gilt:

$$\det(\dot{L}, \mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) = 0^4$$

Alle Normalvektoren \mathbf{n}_P liegen auf einer Geraden. Daher sind auch in diesem Fall alle Tangentialebenen entlang der betreffenden Erzeugenden gleich, weil sich die Normalvektoren \mathbf{n}_P nur in ihrer Länge oder Orientierung unterscheiden.

Man spricht von einer **nichtzylindrisch torsale Erzeugenden**.

⁴ Dies ist auch bei Sonderfall 1 gültig, da bereits $\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{e} = \mathbf{0}$ ist.

Im Unterschied zu Sonderfall 1 gibt es hier genau einen Punkt Z auf der Erzeugenden, in dem der Normalvektor $\mathbf{n}_Z = \mathbf{0}$ ist. Dieser Punkt wird **Zentralpunkt** oder **Kuspidalpunkt** genannt.

Der

Punkt

$$Z = L + v_Z \cdot \mathbf{e}$$

ist ein singulärer Punkt.

Um den zu Z gehörenden Parameter v_Z zu berechnen, wird der Normalvektor gleich Null gesetzt:

$$\mathbf{n}_Z = \dot{L} \times \mathbf{e} + v_Z \cdot (\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{e}) = \mathbf{0}$$

$$v_Z = -\frac{|\dot{L} \times \mathbf{e}|}{|\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{e}|}$$

Unter Beachtung von $\dot{\mathbf{e}} \perp \mathbf{e}$ kann man die Formel für v_Z vereinfachen:

$$|\dot{L} \times \mathbf{e}| = |\dot{L}| \cdot |\mathbf{e}| \cdot \sin \varphi$$

$$\dot{L} \cdot \dot{\mathbf{e}} = |\dot{L}| \cdot |\dot{\mathbf{e}}| \cdot \cos(90^\circ - \varphi)$$

Da $\cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi$ und $|\mathbf{e}| = 1$ ist, können diese beiden Gleichungen so zusammengefasst werden:

$$|\dot{L} \times \mathbf{e}| = \frac{\dot{L} \cdot \dot{\mathbf{e}}}{|\dot{\mathbf{e}}|}$$

Außerdem ist $|\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{e}| = |\dot{\mathbf{e}}| \cdot |\mathbf{e}| \cdot \sin 90^\circ = |\dot{\mathbf{e}}|$. Daher erhält man durch Einsetzen in die Formel für v_Z :

$$v_Z = -\frac{\dot{L} \cdot \dot{\mathbf{e}}}{|\dot{\mathbf{e}}|^2}$$

Da $|\dot{\mathbf{e}}|^2$ aber gleich $\dot{\mathbf{e}}^2$ ist, folgt die in der Literatur übliche Formel:

$$v_Z = -\frac{\dot{L} \cdot \dot{\mathbf{e}}}{\dot{\mathbf{e}}^2}$$

Eine Erzeugende wird also immer dann torsal genannt, wenn entlang dieser alle Tangentialebenen gleich sind. Unterschieden wird zwischen zylindrisch torsalen Erzeugenden, die keinen Zentralpunkt Z haben, und nichtzylindrisch torsalen Erzeugenden, die einen singulären Zentralpunkt Z haben.

Es handelt sich immer dann um eine torsale Erzeugende, wenn $\det(\dot{L}, \mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) = 0$ ist. Diese Formel gilt übrigens auch, wenn \mathbf{e} kein Einheitsvektor ist.

3.3.2. Windschiefe Erzeugende

Allgemeiner Fall: \mathbf{n}_L und $\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{e}$ spannen eine Ebene auf

Im allgemeinen Fall sind alle Tangentialebenen längs einer Erzeugenden e verschieden. Alle Normalvektoren \mathbf{n}_P liegen in der von $\dot{L} \times e$ und $\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{e}$ aufgespannten Ebene ε . Diese Ebene steht orthogonal auf e , da e sowohl normal auf $\dot{L} \times e$ als auch auf $\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{e}$ ist. Der Ableitungsvektor $\dot{\mathbf{e}}$ liegt in ε , weil $\dot{\mathbf{e}} \perp e$ ist.

Der kürzeste Normalvektor \mathbf{n}_Z gehört zu einem Punkt Z , den man **Zentralpunkt** oder **Striktionspunkt** nennt. Der Zentralpunkt Z ist in diesem Fall regulär, da \mathbf{n}_Z gemäß der Definition des allgemeinen Falles nicht der Nullvektor sein kann.

Da \mathbf{n}_Z als kürzester Normalvektor auf $\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{e}$ normal sein muss und da $\dot{\mathbf{e}}$ in der Ebene ε aller Normalvektoren liegt, liegt \mathbf{n}_Z immer auf $\dot{\mathbf{e}}$.

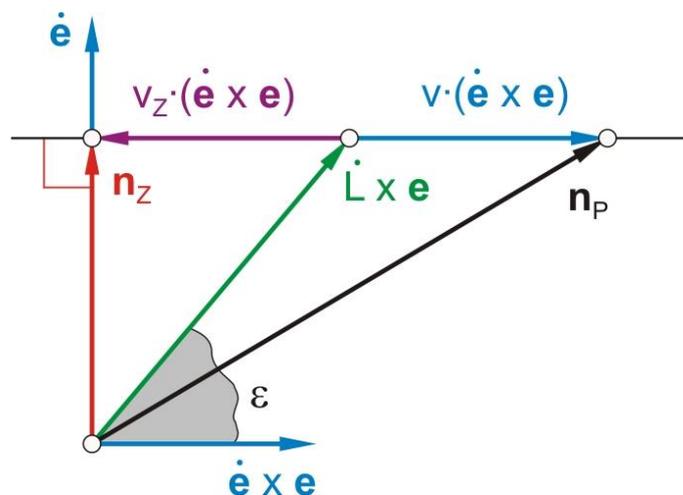


Abbildung 23 – Normalvektor \mathbf{n}_Z auf $\dot{\mathbf{e}}$.

Für die Berechnung des Zentralpunktes Z muss man nun den dazugehörigen Parameter v_Z ermitteln:

$$\mathbf{n}_Z = \dot{L} \times \mathbf{e} + v_Z \cdot (\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{e})$$

Da \mathbf{n}_Z normal auf $\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{e}$ steht, ist das skalare Produkt der beiden Vektoren gleich Null:

$$(\dot{L} \times \dot{\mathbf{e}} + v_Z \cdot (\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{e})) \cdot (\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{e}) = 0$$

Durch Umformen erhält man folgendes Zwischenergebnis:

$$v_Z = -\frac{(\dot{L} \times \mathbf{e}) \cdot (\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{e})}{(\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{e})^2}$$

Nach Anwendung der Identität von Lagrange⁵ kann der Zähler vereinfacht werden, da $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = 1$ und $\mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{e}} = 0$ ist:

$$(\dot{L} \times \mathbf{e}) \cdot (\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{e}) = (\dot{L} \cdot \dot{\mathbf{e}}) \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) - (\dot{L} \cdot \mathbf{e}) \cdot (\mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{e}}) = \dot{L} \cdot \dot{\mathbf{e}}$$

Für den Nenner gilt:

$$(\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{e})^2 = |\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{e}|^2 = (|\dot{\mathbf{e}}| \cdot |\mathbf{e}| \cdot \sin 90^\circ)^2 = |\dot{\mathbf{e}}|^2 = \dot{\mathbf{e}}^2$$

Daraus ergibt sich die in der Literatur übliche Formel für v_z :

$$v_z = -\frac{\dot{L} \cdot \dot{\mathbf{e}}}{\dot{\mathbf{e}}^2}$$

Dies ist exakt dieselbe Gleichung, mit der man den Zentralpunkt bei einer nichtzylindrisch torsalen Erzeugenden berechnen kann.

3.4. Striktionslinie

Alle Zentralpunkte Z bilden die **Zentrallinie**, die auch **Striktionslinie** genannt wird.

$$Z = L - \frac{\dot{L} \cdot \dot{\mathbf{e}}}{\dot{\mathbf{e}}^2} \cdot \mathbf{e}$$

Beispiel 9: Striktionslinie

Ein in der xz -Ebene liegender Parabelbogen

$$L(t) = [1 - t, 0, t^2], \quad 0 \leq t \leq 1$$

und eine parallel zur xz -Ebene liegende Strecke

$$R(t) = [1 - t, 1, 1 - t], \quad 0 \leq t \leq 1$$

sollen durch eine Regelfläche verbunden werden, wobei die Erzeugenden die zum jeweils gleichen Parameterwert t gehörenden Punkte L und R verbinden. Die Richtung der Erzeugenden wird durch den Vektor LR festgelegt:

$$\mathbf{r}(t) = LR = [0, 1, 1 - t - t^2]$$

Die Parameterdarstellung der Regelfläche lautet also:

$$P(t, v) = [1 - t, v, t^2 + v \cdot (1 - t - t^2)]$$

Die Regelfläche ist in Abbildung 24 für $0 \leq t \leq 1$ und $0 \leq v \leq 1$ dargestellt; der Parabelbogen und die Strecke sind rot hervorgehoben.

⁵ Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813, italienisch-französischer Mathematiker und Astronom

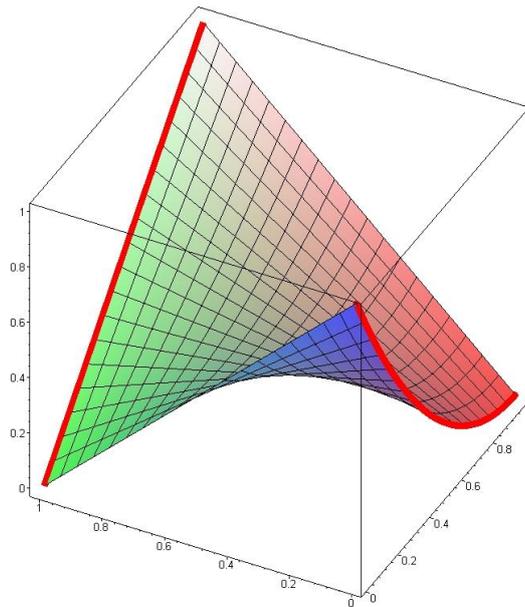


Abbildung 24 – Beispiel 9 (Regelfläche zwischen Parabel und Strecke)

Obwohl die Parameterdarstellung der Regelfläche recht einfach aussieht, ist die Berechnung der Striktionslinie trotzdem sehr aufwändig. Man muss auch beachten, dass der Richtungsvektor \mathbf{r} nicht in die Formel für die Striktionslinie eingesetzt werden darf, da er kein Einheitsvektor ist; er muss also vorher normiert werden:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

Die folgende Berechnung der Striktionslinie habe ich mit MAPLE durchgeführt:

```
e:=r/norm(r,2): e:=evalm(e): e:=simplify(e,symbolic);
Lp:=map(diff,L,t): Lp:=simplify(Lp,symbolic);
ep:=map(diff,e,t): ep:=simplify(ep,symbolic);
vz:=-dotprod(Lp,ep,'orthogonal')/dotprod(ep,ep,'orthogonal'):
vz:=simplify(vz,symbolic);
Z:=evalm(L+vz*e): Z:=simplify(Z,symbolic);
```

$$e := \left[0, \frac{1}{\sqrt{2-2t-t^2+2t^3+t^4}}, -\frac{-1+t+t^2}{\sqrt{2-2t-t^2+2t^3+t^4}} \right]$$

$$Lp := [-1, 0, 2t]$$

$$ep := \left[0, -\frac{-1-t+3t^2+2t^3}{(2-2t-t^2+2t^3+t^4)^{(3/2)}}, -\frac{1+2t}{(2-2t-t^2+2t^3+t^4)^{(3/2)}} \right]$$

$$vz := 2 \frac{\sqrt{2-2t-t^2+2t^3+t^4} t}{1+2t}$$

$$Z := \left[1-t, 2 \frac{t}{1+2t}, -\frac{t(t-2)}{1+2t} \right]$$

Abbildung 25 – Beispiel 9 (Screenshot Berechnung der Striktionslinie)

Abbildung 26 zeigt die Regelfläche samt der blau eingezeichneten Striktionslinie.

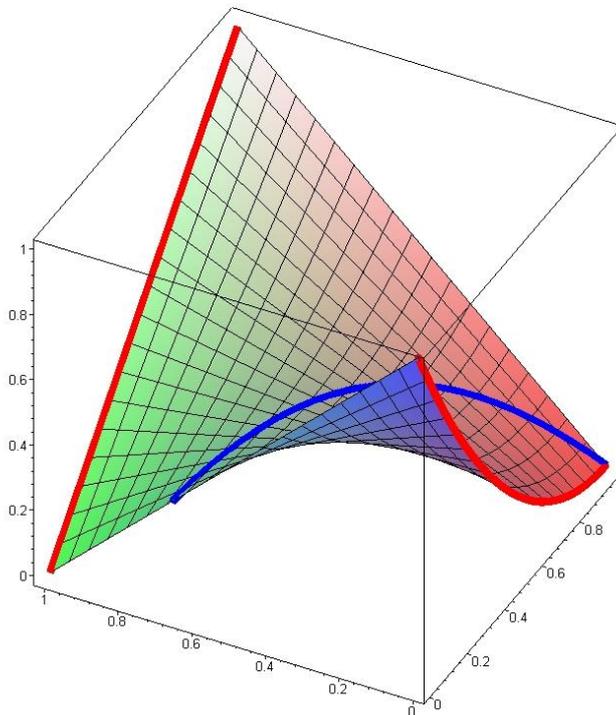


Abbildung 26 – Beispiel 9 (Regelfläche mit Striktionslinie)

Mithilfe der Striktionslinie kann eine Regelfläche neu parametrisiert werden: Anstatt von einer beliebigen Leitlinie geht man jetzt von der Striktionslinie aus, also der Linie, auf der die Zentralpunkte Z aller Erzeugenden liegen. Die neue Parameterdarstellung der Regelfläche lautet daher so:

$$P(t, v) = Z(t) + v \cdot \mathbf{e}(t)$$

Wenn man auf einer Erzeugenden e von ihrem Zentralpunkt Z aus auf beide Seiten dieselbe Strecke v aufträgt, so erhält man die Punkte P und P^* . Die Normalvektoren \mathbf{n}_P und \mathbf{n}_{P^*} schließen mit dem zentralen Normalvektor \mathbf{n}_Z gleich große Winkel ein (Abbildung 27).

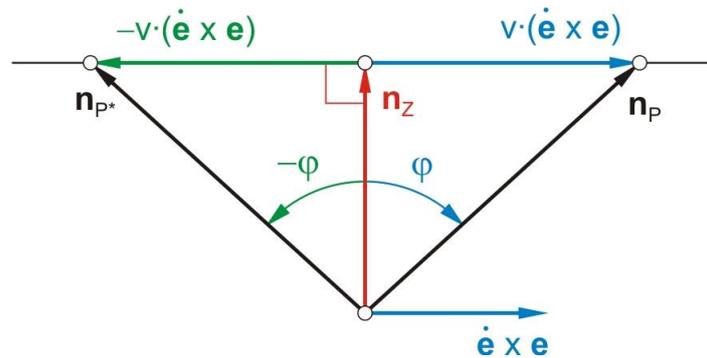


Abbildung 27 – Winkel der Normalvektoren \mathbf{n}_P und \mathbf{n}_{P^*} mit \mathbf{n}_Z

Wenn sich also P und P^* gleich schnell von Z wegbewegen, so drehen sich ihre Tangentialebenen um e mit gleicher Winkelgeschwindigkeit, aber entgegengesetztem Drehsinn.

Abbildung 27 lässt auch erkennen, dass der Tangens des Winkels $\varphi = \sphericalangle \mathbf{n}_Z \mathbf{n}_P$ proportional zum Abstand $v = ZP$ ist:

$$\tan \varphi = k \cdot v$$

Bei Verdoppelung des Abstands v wird also nicht der Winkel φ doppelt so groß, sondern sein Tangens.

Eine andere Möglichkeit, die Striktionslinie zu definieren, geht von der gemeinsamen Normalen einer Erzeugenden $e(t)$ und einer Nachbarerzeugenden $e(t + \Delta t)$ aus. Wenn $\Delta t \rightarrow 0$ strebt, wird der Fußpunkt E der Normalen auf $e(t)$ zum Zentralpunkt Z . Diese Herleitung wird in dieser Arbeit nicht durchgeführt.

Auf der gemeinsamen Normalen zweier Geraden wird ihr kürzester Abstand gemessen. Die Zentrallinie ist daher jene Kurve auf der Regelfläche, entlang welcher die Erzeugenden „am

dichtesten“ liegen. So kann auch der Name Striktionslinie erklärt werden: „Striktion“ kommt aus dem Lateinischen und bedeutet so viel wie „Zusammenziehung“ oder „Verengung“.

Diese Möglichkeit der Herleitung der Striktionslinie legt vielleicht die Vermutung nahe, dass die Striktionslinie die Erzeugenden orthogonal schneidet. Dies ist aber in der Regel nicht der Fall, wie etwa das einschalige Drehhyperboloid (vgl. Abschnitt 4.1.3.) erkennen lässt.

3.5. Erzeugende – Zusammenfassung

Das folgende Kapitel fasst die verschiedenen Arten von Erzeugenden, die in den vorherigen Kapiteln erarbeitet worden sind, zusammen.

3.5.1. Windschiefe Erzeugende

Bei einer windschiefen Erzeugenden sind alle Tangentialebenen verschieden. Wenn P entlang der Erzeugenden von Z bis ∞ und P^* von Z bis $-\infty$ wandert, so dreht sich die Tangentialebene τ_P von 0° bis 90° . Die Tangentialebene τ_{P^*} dreht sich entgegengesetzt zu τ_P , hat aber in jedem Punkt den betragsmäßig gleichen Drehwinkel φ .

3.5.2. Torsale Erzeugende

Bei einer torsalen Erzeugenden sind alle Tangentialebenen gleich. Die analytische Bedingung dafür lautet:

$$\det(\dot{L}, \mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) = 0$$

Man unterscheidet zwei Arten von torsalen Erzeugenden: Zum einen gibt es zylindrisch torsale Erzeugende und zum anderen nichtzylindrisch torsale Erzeugende.

Zylindrisch torsale Erzeugende zeichnen sich dadurch aus, dass der Ableitungsvektor $\dot{\mathbf{e}}$ der Nullvektor ist. Alle Normalvektoren \mathbf{n}_P sind gleich. Es gibt keinen Zentralpunkt.

Bei nichtzylindrisch torsalen Erzeugenden sind die Normalvektoren \mathbf{n}_P zwar nicht gleich, sie liegen aber alle auf einer Geraden. Sie unterscheiden sich also nur in ihrer Länge oder Orientierung. Bei nichtzylindrisch torsalen Erzeugenden gibt es einen Zentralpunkt, der singular ist.

Sind entlang einer Erzeugenden zwei Tangentialebenen gleich, handelt es sich um eine torsale Erzeugende (zylindrisch oder nichtzylindrisch); alle Tangentialebenen sind dann gleich. Genauso kann man sagen, dass es sich um eine windschiefe Erzeugende handelt, wenn zwei Tangentialebenen verschieden sind; alle Tangentialebenen sind dann verschieden.

3.6. Torsale Regelflächen

Wenn eine Regelfläche nur torsale Erzeugende hat, nennt man sie eine **torsale Regelfläche** oder eine **Torse**. Jede Tangentialebene einer torsalen Regelfläche berührt die Regelfläche also nicht nur in einem Punkt, sondern entlang einer ganzen Erzeugenden.

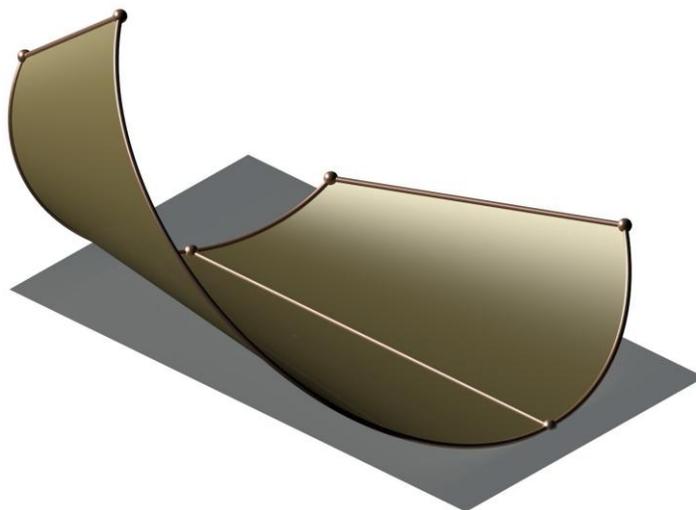


Abbildung 28 – Torsale Regelfläche [8]

Torsale Regelflächen sind die einzigen krummen Flächen, die sich verzerrungsfrei in eine Ebene ausbreiten lassen – sie lassen sich abwickeln.

Nur torsale Regelflächen können auf einer Ebene rollen. Der „Stempelabdruck“, den die Fläche hinterlässt, wenn sie über die Ebene rollt, ist ihre Abwicklung.

Der Beweis für die Abwickelbarkeit benötigt die Krümmungstheorie, ist schwierig und geht über den Rahmen dieser Arbeit hinaus.

Im Folgenden werden wichtige torsale Regelflächen vorgestellt.

3.6.1. Zylinderflächen

Eine **Zylinderfläche** hat in jedem Punkt der Leitlinie den gleichen Erzeugendenvektor \mathbf{e} . Er ist konstant, hängt also nicht von t ab.

$$P(t, v) = L(t) + v \cdot \mathbf{e}$$

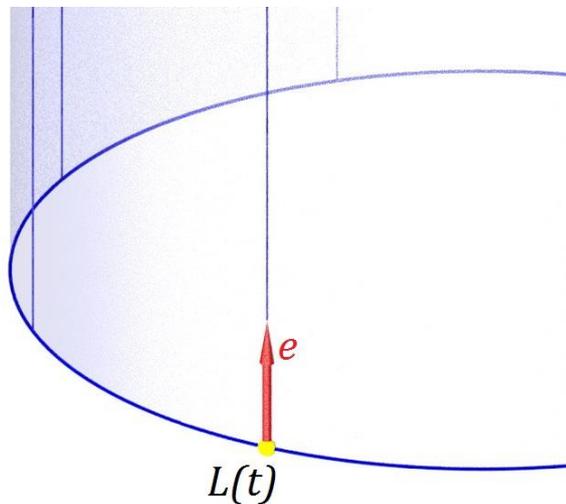


Abbildung 29 – Zylinderfläche

Aus der allgemeinen Formel

$$\mathbf{n}_P = \dot{L} \times \mathbf{e} + v \cdot (\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{e})$$

erhält man wegen $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{0}$ die Formel

$$\mathbf{n}_P = \dot{L} \times \mathbf{e}$$

Es ist zu erkennen, dass für alle Normalvektoren \mathbf{n}_P entlang einer Erzeugenden der Parameter v keine Rolle spielt. Alle Normalvektoren entlang einer Erzeugenden sind gleich. Da der Ableitungsvektor $\dot{\mathbf{e}}$ der Nullvektor ist, sind alle Erzeugenden zylindrisch torsal (Sonderfall 1: Es gibt keinen Zentralpunkt).

3.6.2. Kegelflächen

Bei **Kegelflächen** gehen alle Erzeugenden durch einen gemeinsamen Punkt L – die Spitze der Kegelfläche. L ist konstant, also nicht von t abhängig. Die Parameterdarstellung einer Kegelfläche sieht daher wie folgt aus:

$$P(t, v) = L + v \cdot e(t)$$

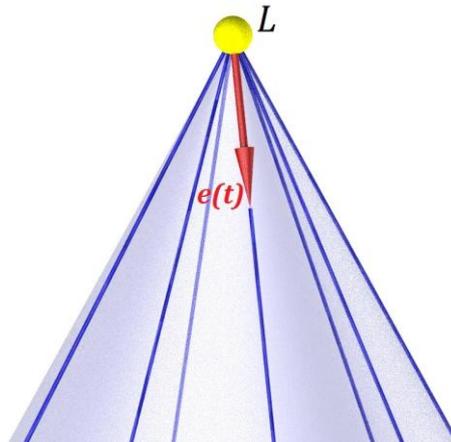


Abbildung 30 – Kegelfläche

Wegen $\dot{L} = \mathbf{0}$ erhält man für den Normalvektor \mathbf{n}_p die Formel

$$\mathbf{n}_p = v \cdot (\dot{e} \times e)$$

Die Normalvektoren entlang einer Erzeugenden e unterscheiden sich also nur in ihrer Länge – sie liegen alle auf einer Geraden. Dadurch sind alle Tangentialebenen entlang e gleich und es handelt sich um eine nichtzylindrisch torsale Erzeugende mit L als singulärem Zentralpunkt (Sonderfall 2: Es gibt einen singulären Punkt).

3.6.3. Tangentenflächen

Eine **Tangentenfläche** besteht aus allen Tangenten einer Raumkurve l .

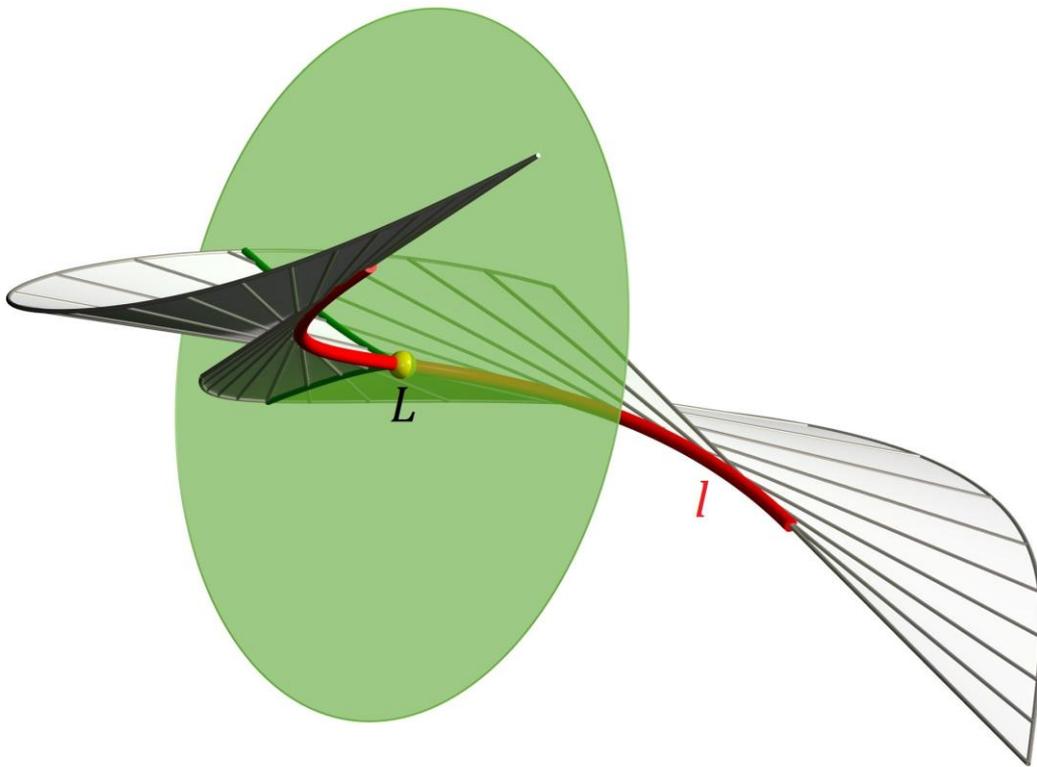


Abbildung 31 – Tangentenfläche

Für eine Parameterdarstellung wählt man die Raumkurve l als Leitlinie und parametrisiert diese mit der Bogenlänge s :

$$L = L(s)$$

Dadurch erreicht man, dass der Tangentenvektor $\dot{L}(s)$ ein Einheitsvektor ist:

$$|\dot{L}(s)| = 1$$

Die Parameterdarstellung der Tangentenfläche ergibt sich daher wie folgt:

$$P(s, v) = L(s) + v \cdot \dot{L}(s)$$

Für den Normalvektor \mathbf{n}_P erhält man:

$$\mathbf{n}_P = \dot{L} \times \dot{L} + v \cdot (\ddot{L} \times \dot{L})$$

Da $\dot{L} \times \dot{L} = \mathbf{0}$ ist, ergibt sich:

$$\mathbf{n}_P = v \cdot (\ddot{L} \times \dot{L})$$

Dieser Vektor ist auf die Schmiegebene der Leitlinie in L normal, da die Schmiegebene von \dot{L} und \ddot{L} aufgespannt wird. Die Tangentialebene in allen Punkten einer Erzeugenden ist also die Schmiegebene der Leitlinie in L .

Für $v = 0$ ist $P = L$ und der Normalvektor $\mathbf{n}_L = \mathbf{0}$. Der Punkt L ist also ein singulärer Punkt für die Tangentenfläche. Die Tangentenfläche von l besteht aus zwei Teilen: $v \geq 0$ (Abbildung 32) und $v \leq 0$ (Abbildung 33). Die zwei Teile hängen entlang l zusammen, wobei l einen scharfkantigen Grat bildet (Abbildung 31). Dies wird durch den transparent ausgeführten Normalschnitt verdeutlicht.

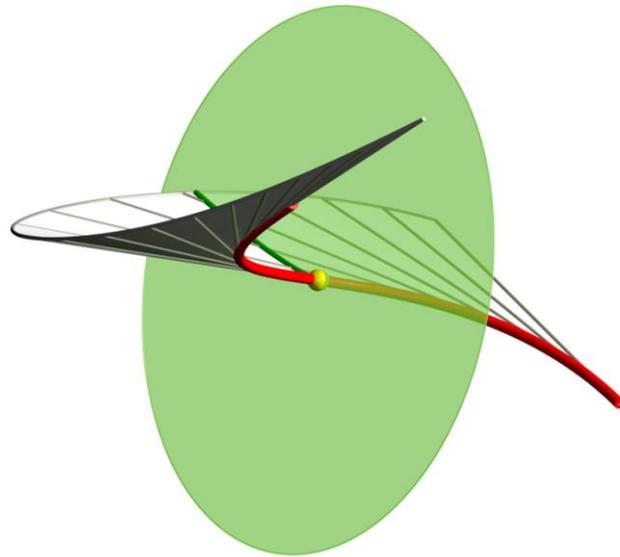


Abbildung 32 – Tangentenfläche $v \geq 0$

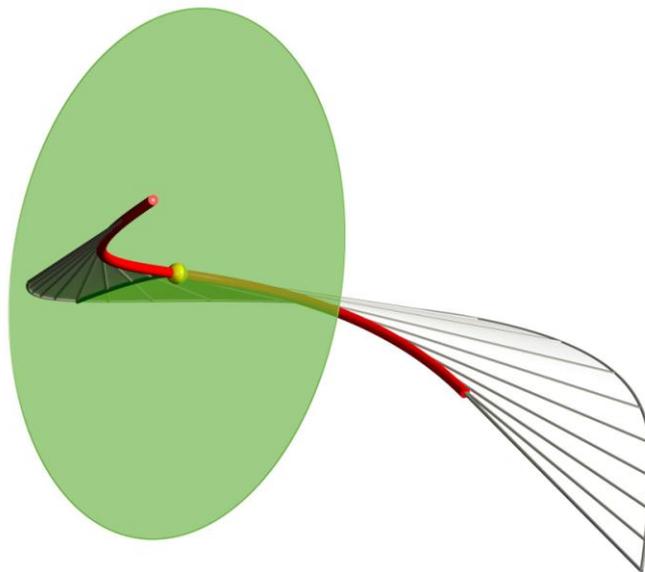


Abbildung 33 – Tangentenfläche $v \leq 0$

3.6.4. Allgemeine torsale Regelflächen

In den vorhergehenden Kapiteln sind die Zylinderflächen, die Kegelflächen und die Tangentenflächen als Beispiele für torsale Regelflächen vorgestellt worden. Diese sind erstaunlicherweise eigentlich auch schon alle torsalen Regelflächen – es kann jedoch vorkommen, dass sich eine allgemeine torsale Regelfläche stückweise aus diesen drei Flächenarten zusammensetzt. Ein mathematisch vereinfachter Beweis dafür wird nun vorgestellt. Einen exakten Beweis findet man in [6] (S. 112f).

Behauptung:

Jede torsale Regelfläche ist entweder eine Zylinder-, eine Kegel- oder eine Tangentenfläche oder aus diesen Flächen zusammengesetzt.

Beweis:

Bei einer torsalen Regelfläche sind alle Erzeugenden torsal. Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

- 1) Alle Erzeugenden sind zylindrisch
- 2) Alle Erzeugenden sind nichtzylindrisch
- 3) Es treten sowohl zylindrische als auch nichtzylindrische Erzeugende auf

Fall 1: Alle Erzeugenden sind zylindrisch

Zylindrische Erzeugende haben keinen Zentralpunkt. Der Ableitungsvektor \dot{e} ist immer der Nullvektor.

Da \dot{e} für alle Parameterwerte t der Nullvektor ist, ist e ein konstanter Vektor. Alle Erzeugenden sind daher parallel. Es handelt sich also um eine Zylinderfläche.

Fall 2: Alle Erzeugenden sind nichtzylindrisch

Alle Erzeugenden haben hier einen Zentralpunkt Z , für den $n_z = \mathbf{0}$ ist.

Die Regelfläche lässt sich mit Hilfe der Zentralpunkte Z neu parametrisieren:

$$P(t, v) = Z(t) + v \cdot e(t)$$

Für den Normalvektor erhält man:

$$n_z = \dot{Z} \times e$$

Da dieser Vektor stets der Nullvektor ist, ergeben sich drei Möglichkeiten für den Ableitungsvektor \dot{Z} :

a) $\dot{Z} \neq \mathbf{0}$ für alle Parameterwerte t

Da $\dot{Z} \times \mathbf{e} = \mathbf{0}$ ist, muss \dot{Z} auf \mathbf{e} liegen. Die Regelfläche ist daher die Tangentenfläche der Zentrallinie.

b) $\dot{Z} = \mathbf{0}$ für einzelne t -Werte

Auch hier liegt wie bei a) eine Tangentenfläche vor; die Zentrallinie hat aber einzelne singuläre Punkte.

c) $\dot{Z} = \mathbf{0}$ für alle Parameterwerte t aus einem Intervall

In diesem Fall muss Z konstant sein. Alle Erzeugenden haben also denselben Zentralpunkt. Es handelt sich daher um eine Kegelfläche.

Bei einer Fläche, die nur nichtzylindrisch torsale Erzeugende hat, kann es sich also entweder um eine Tangentenfläche handeln – wenn $\dot{Z} \neq \mathbf{0}$ für alle oder $\dot{Z} = \mathbf{0}$ für einzelne t -Werte ist – oder um eine Kegelfläche – wenn $\dot{Z} = \mathbf{0}$ für alle t -Werte ist.

Fall 3: Es treten sowohl zylindrische als auch nichtzylindrische Erzeugende auf

Wenn eine Fläche vorliegt, die sowohl zylindrische als auch nichtzylindrische Erzeugende hat, kann man immer (ohne Beweis) Flächenabschnitte betrachten, deren Erzeugende einheitlich sind (entweder zylindrisch oder nichtzylindrisch).

Die Fläche ist also zusammengesetzt aus Teilflächen, die schon in den ersten beiden Fällen bearbeitet worden sind.

4. Spezielle Regelflächen

4.1. Drehregelflächen

Dreht man eine Gerade e_0 um eine Achse a , so entsteht eine Drehregelfläche. Wenn e_0 parallel zu a ist, entsteht eine Drehzylinderfläche; schneidet e_0 die Achse a , entsteht eine Drehkegelfläche. Sind die Geraden a und e_0 jedoch windschief, entsteht eine allgemeine Drehregelfläche.

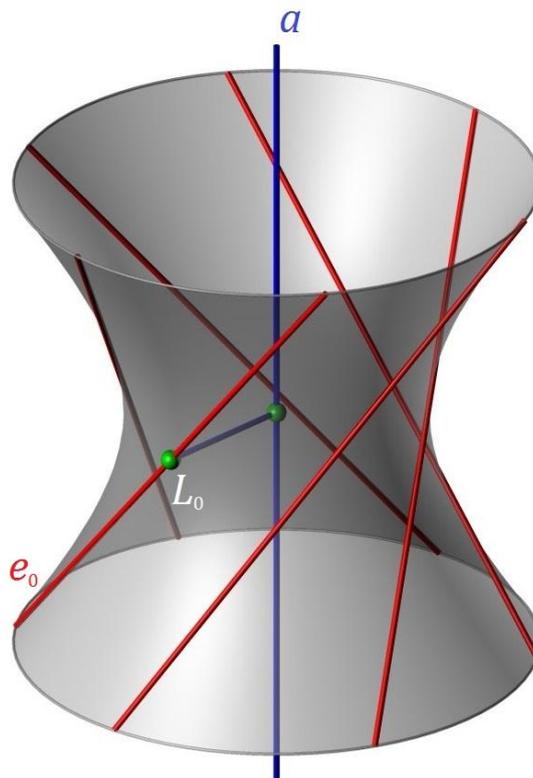


Abbildung 34 – Einschaliges Drehhyperboloid [7]

4.1.1. Parameterdarstellung einer allgemeinen Drehregelfläche

Man setzt das Koordinatensystem so, dass die Achse a auf der z -Achse liegt und die kürzeste Normale auf die Achse a , die e_0 im Punkt L_0 trifft, auf der x -Achse liegt. Die Gerade e_0 schneidet die x -Achse orthogonal und wird durch ihren Abstand d von der z -Achse und ihren Steigungswinkel α festgelegt (vgl. Abbildung 35).

4.1.2. Meridian der allgemeinen Drehregelfläche

Der Satz von Wren⁶ besagt, dass die Schnittkurve einer allgemeinen Drehregelfläche mit einer durch die Achse a gehenden Ebene immer eine Hyperbel ist.

Beweis:

Die allgemeine Drehregelfläche wird mit der yz -Ebene geschnitten – also ist $x = 0$. Aus der Funktion für die x -Koordinate lässt sich v ausdrücken:

$$d \cdot \cos t - v \cdot \cos \alpha \cdot \sin t = 0$$

$$v = \frac{d \cdot \cos t}{\cos \alpha \cdot \sin t}$$

Setzt man diesen Bruch für v in die Funktionen für die y - und z -Koordinaten ein, lassen sich diese wie folgt umformen:

$$y = d \cdot \sin t + \cos \alpha \cdot \cos t \cdot \frac{d \cdot \cos t}{\cos \alpha \cdot \sin t}$$

$$y = d \cdot \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t}$$

$$y = d \cdot \frac{1}{\sin t}$$

$$z = \sin \alpha \cdot \frac{d \cdot \cos t}{\cos \alpha \cdot \sin t}$$

$$z = d \cdot \tan \alpha \cdot \frac{\cos t}{\sin t}$$

Wenn man nun zeigen kann, dass die eben hergeleiteten Funktionen für y und z eine Gleichung der Form $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$ erfüllen, ist der Satz von Wren bewiesen.

$$y^2 = d^2 \cdot \frac{1}{\sin^2 t}$$

$$\frac{y^2}{d^2} = \frac{1}{\sin^2 t}$$

$$z^2 = d^2 \cdot \tan^2 \alpha \cdot \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}$$

⁶ Christopher Wren, 1632-1723; Mathematiker, Astronom und Architekt; Erbauer der St. Paul's Cathedral (London)

$$\frac{z^2}{d^2 \cdot \tan^2 \alpha} = \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}$$

$$\frac{y^2}{d^2} - \frac{z^2}{d^2 \cdot \tan^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 t} - \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}$$

Da die rechte Seite der Gleichung offensichtlich 1 ist, folgt die Behauptung.

Der Meridian der allgemeinen Drehregelfläche ist also eine Hyperbel mit $a = d$ und $b = d \cdot \tan \alpha$. Die Steigung der Asymptoten berechnet sich mit $k = \pm \frac{b}{a}$ und ist daher hier $k = \pm \tan \alpha$. Es ist also zu erkennen, dass eine der beiden Asymptoten parallel zu e_0 ist.

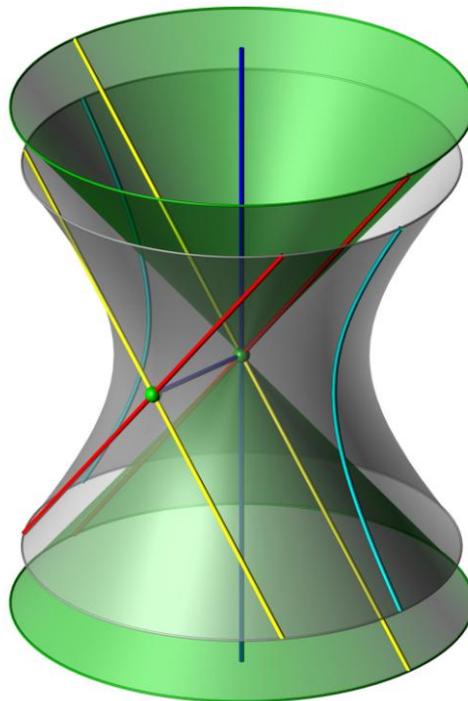


Abbildung 36 – Drehhyperboloid (Asymptotenkegel) [8]

Lässt man die Asymptoten um die z-Achse rotieren, erhält man den **Asymptotenkegel** (Abbildung 36).

Die durch Rotation einer Hyperbel um ihre Nebenachse erzeugte Drehfläche nennt man ein **einschaliges Drehhyperboloid**. Jede allgemeine Drehregelfläche ist also ein einschaliges Drehhyperboloid. Umgekehrt ist aber auch jedes einschalige Drehhyperboloid (festgelegt durch a und b) eine Drehregelfläche, da durch geeignete Wahl von d und α jede beliebige Kombination von a und b erzeugt werden kann.

4.1.3. Weitere Eigenschaften

Doppelte Regelfläche

Spiegelt man alle Erzeugenden des Drehhyperboloids an der xz -Ebene, so erkennt man, dass auf dem Drehhyperboloid sogar zwei Scharen von unendlich vielen Geraden liegen. Es handelt sich also um eine „doppelte“ Regelfläche.

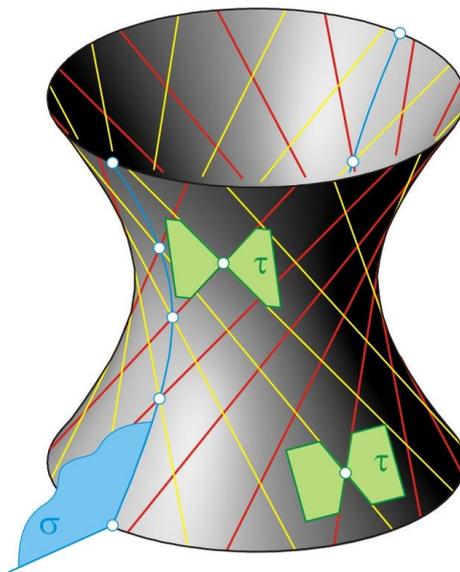


Abbildung 37 – Drehhyperboloid (Spiegelung der Erzeugenden) [7]

Durch jeden Flächenpunkt gehen also zwei Erzeugende. Die Tangentialebene wird von diesen beiden Erzeugenden aufgespannt.

Skalierung

Wird ein einschaliges Drehhyperboloid skaliert, so wird es zu einem **einschaligen Hyperboloid**. Die Striktionslinie des Drehhyperboloids ist der Kehlkreis. Es würde daher naheliegen, dass die Striktionslinie des Hyperboloids jene Ellipse ist, die durch Skalierung aus dem Kehlkreis entstanden ist. Die Striktionslinie verändert sich aber grundlegend.

Für ein Drehhyperboloid mit $d = 1$ und $\alpha = 45^\circ$ lautet der Erzeugendenvektor:

$$\mathbf{r} = (-\cos 45^\circ \cdot \sin t, \cos 45^\circ \cdot \cos t, \sin 45^\circ) \parallel (-\sin t, \cos t, 1)$$

Die Parameterdarstellung des Drehhyperboloids sieht daher wie folgt aus:

$$P = (\cos t, \sin t, 0) + v \cdot (-\sin t, \cos t, 1)$$

In Abbildung 38 ist dieses Drehhyperboloid visualisiert; die Striktionslinie (der Kehlkreis) ist blau eingefärbt.

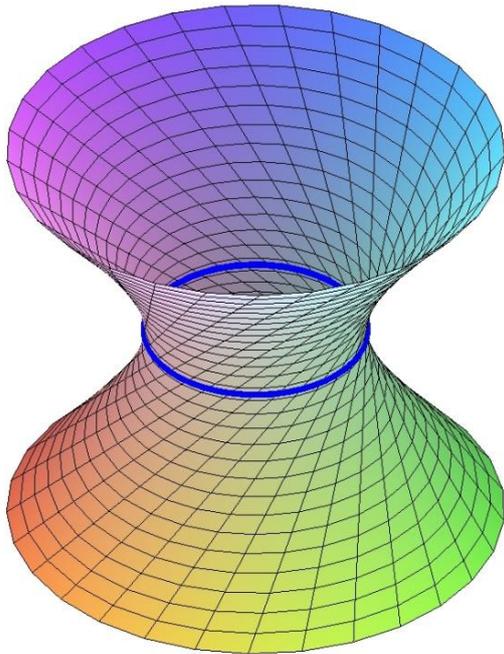


Abbildung 38 – Drehhyperboloid mit Striktionslinie (Kehlkreis)

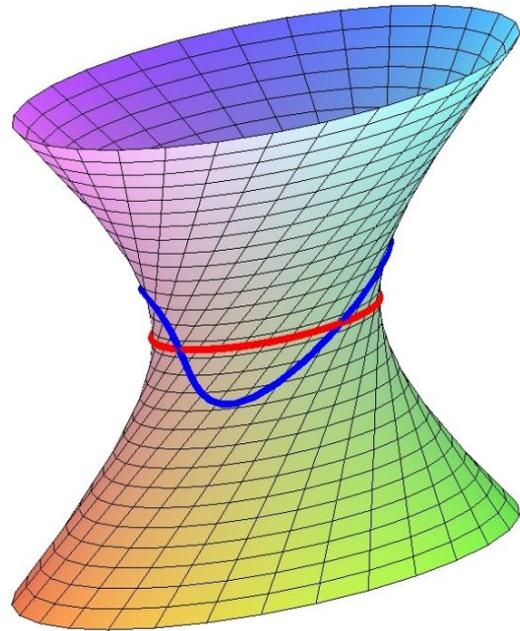


Abbildung 39 – Hyperboloid mit Striktionslinie

Wird dieses Drehhyperboloid z.B. mit den Faktoren 5, 2 und 3 skaliert, lautet die Parameterdarstellung des entstandenen Hyperboloids:

$$P = (5 \cdot \cos t, 2 \cdot \sin t, 0) + v \cdot (-5 \cdot \sin t, 2 \cdot \cos t, 3)$$

Abbildung 39 zeigt dieses Hyperboloid, bei dem die aus dem Kehlkreis entstandene Ellipse rot und die Striktionslinie blau eingefärbt sind.

Die händische Berechnung der Striktionslinie mit der in Kapitel 3 hergeleiteten Formel wäre extrem aufwändig. Die Berechnung mit MAPLE lieferte folgende Parameterdarstellung der Striktionslinie:

$$Z = \left[1625 \cdot \frac{\cos t}{189 \cdot \cos^2 t + 136}, 272 \cdot \frac{\sin t}{189 \cdot \cos^2 t + 136}, -567 \cdot \frac{\cos t \cdot \sin t}{189 \cdot \cos^2 t + 136} \right]$$

4.2. HP - Flächen

Es gibt unendlich viele krumme Flächen, die man über ein windschiefes Viereck $ABCD$ legen kann. Man erhält die einfachste Verbindungsfläche, indem man die Seiten AB und DC im selben Verhältnis teilt und die entsprechenden Punkten L und R miteinander verbindet (Abbildung 40). Die Fläche, die sich aus all diesen Strecken zusammensetzt, heißt **HP-Fläche**.

4.2.1. Parameterdarstellung

AB und DC werden jeweils im Verhältnis $t: (1 - t)$ für $0 \leq t \leq 1$ geteilt.

$$L = A + t \cdot AB = (1 - t) \cdot A + t \cdot B$$

$$R = D + t \cdot DC = (1 - t) \cdot D + t \cdot C$$

$$\mathbf{r} = LR = (1 - t) \cdot D + t \cdot C - (1 - t) \cdot A - t \cdot B$$

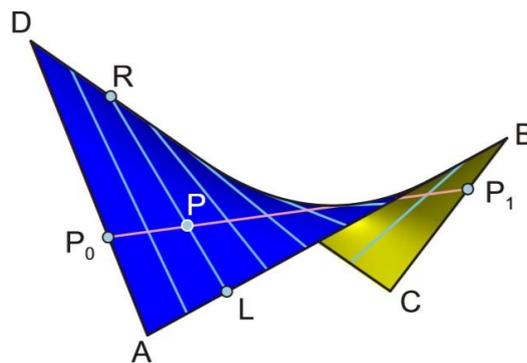


Abbildung 40 – HP-Fläche (Erzeugung) [8]

Die Parameterdarstellung der Regelfläche mit AB als Leitlinie und \mathbf{r} als Erzeugendenvektor lautet daher:

$$P = L + v \cdot \mathbf{r}$$

$$P = (1 - t) \cdot A + t \cdot B + v \cdot ((1 - t) \cdot D + t \cdot C - (1 - t) \cdot A - t \cdot B)$$

$$P = (1 - t) \cdot (1 - v) \cdot A + t \cdot (1 - v) \cdot B + (1 - t) \cdot v \cdot D + t \cdot v \cdot C$$

4.2.2. Parameterlinien

Die v -Linien ($t = t_0, v$ variabel) sind natürlich die Erzeugenden der HP-Fläche.

Die t -Linien ($v = v_0, t$ variabel) erhält man durch Einsetzen von v_0 in die Parameterdarstellung der HP-Fläche:

$$P = (1 - t) \cdot (1 - v_0) \cdot A + t \cdot (1 - v_0) \cdot B + (1 - t) \cdot v_0 \cdot D + t \cdot v_0 \cdot C$$

Man erkennt, dass die Parameterdarstellung linear in t ist. Alle t -Linien sind also Geraden. Die HP-Fläche ist daher (genauso wie das einschalige Drehhyperboloid) auch eine „doppelte“ Regelfläche, auf der zwei Scharen von unendlich vielen Geraden liegen.

Da $P = L + v \cdot LR$ ist, teilt P die Strecke LR im Verhältnis $v : (1 - v)$. Auch die Randstrecken AD und BC werden von P_0 und P_1 im Verhältnis $v : (1 - v)$ geteilt. Daher sind die HP-Flächen, die einerseits über AB, DC und andererseits über AD, BC festgelegt sind, ident.

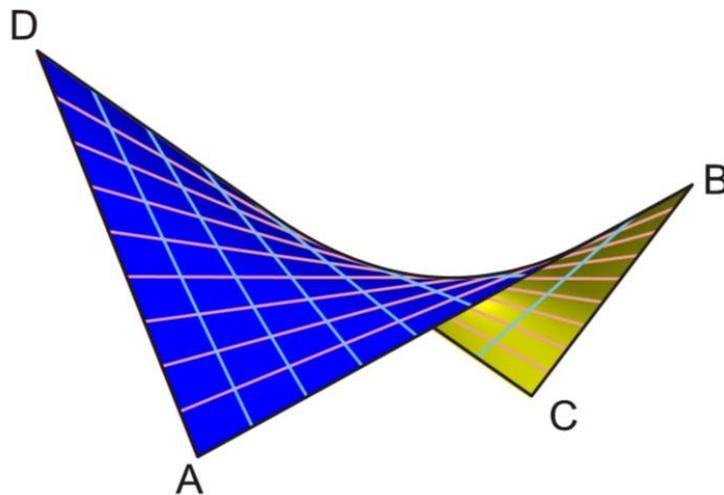


Abbildung 41 – HP-Fläche (Parameterlinien) [8]

4.2.3. Beispiel einer HP-Fläche

Gegeben sind die Punkte $A(10,0,0)$, $B(10,10,0)$, $C(0,5,0)$ und $D(0,5,10)$. Setzt man die Punkte in die vorhin hergeleitete Parameterdarstellung der HP-Fläche ein und vereinfacht diese, so erhält man:

$$P = (10 - 10 \cdot v, 10t + 5v - 10 \cdot t \cdot v, 10 \cdot v - 10 \cdot t \cdot v)$$

Die aufwändige Berechnung der Striktionslinie wurde wieder mit MAPLE durchgeführt:

$$Z = \left[\frac{10}{9} \cdot (3 + 2 \cdot t), \frac{10}{9} \cdot (3 + 2 \cdot t + 2 \cdot t^2), \frac{20}{9} \cdot (3 - 4 \cdot t + t^2) \right]$$

Die Parameterdarstellung ist quadratisch in t – es handelt sich also um eine Parabel. In Abbildung 42 sind die HP-Fläche und die Striktionslinie (rot) visualisiert.

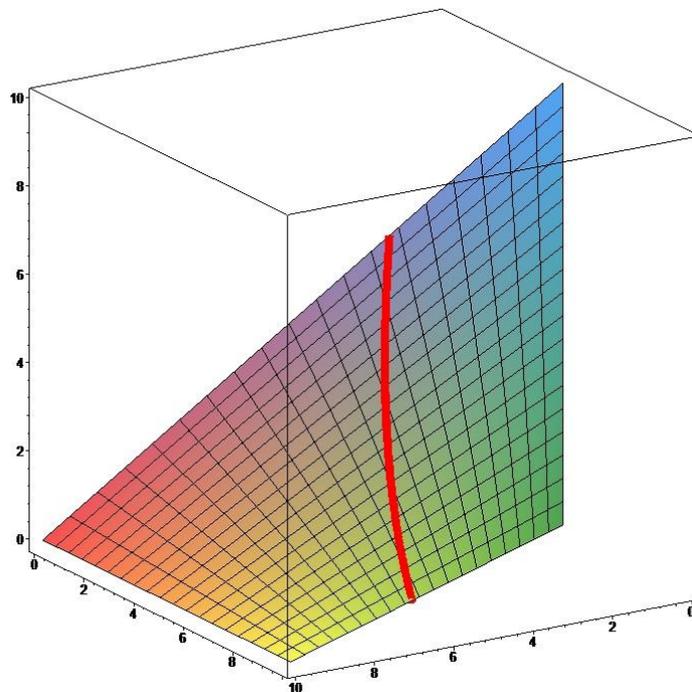


Abbildung 42 – HP-Fläche (Beispiel 9)

4.2.4. Hyperbolische Paraboloid

Hyperbolische Paraboloid sind Schiebflächen. Sie entstehen durch Schieben einer Parabel entlang einer anderen Parabel. Die Parabeln müssen aber folgende Bedingungen erfüllen:

- 1) Sie müssen eine gemeinsame Achse a und einen gemeinsamen Scheitel S haben
- 2) Ihre Trägerebenen müssen orthogonal sein.
- 3) Sie müssen nach verschiedenen Seiten geöffnet sein.

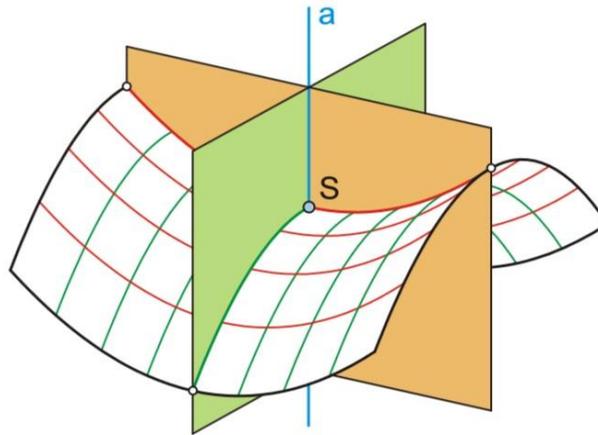


Abbildung 43 – Hyperbolisches Paraboloid [7]

Die Bezeichnung „hyperbolisches Paraboloid“ ergibt sich einerseits aus der Erzeugung durch die Schiebparabeln und andererseits aus der Tatsache, dass die „waagrechten“ Schnitte der Fläche Hyperbeln sind.

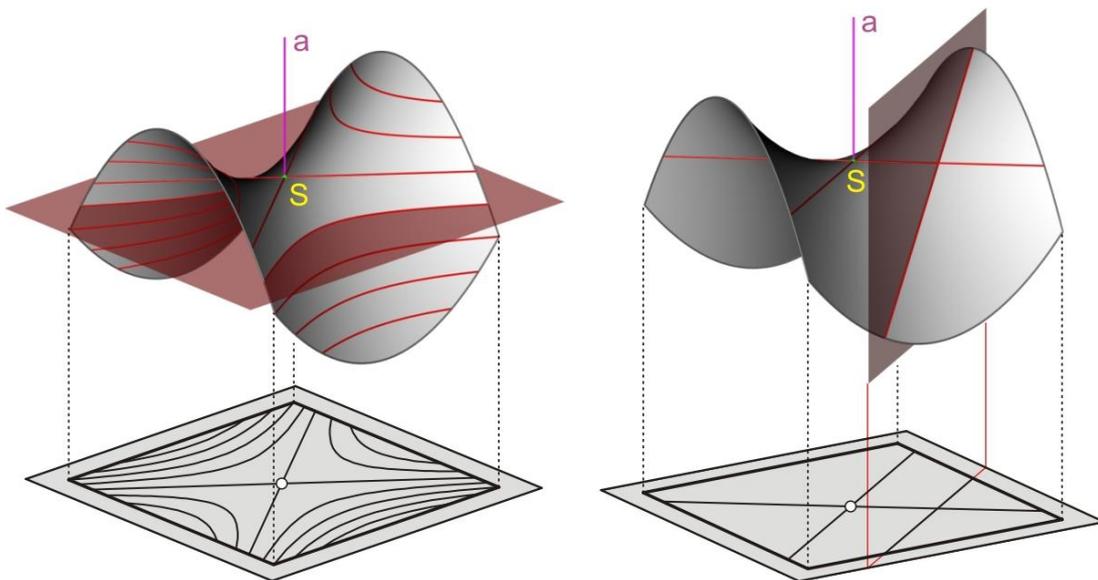


Abbildung 44 – Hyperbolisches Paraboloid („waagrechte“ bzw. „senkrechte“ Schnitte) [7], [8]

Der waagrechte Schnitt durch den Scheitel S besteht aus zwei Geraden. Jeder „lotrechte“ Schnitt parallel zu einer dieser beiden Geraden liefert wieder eine Gerade. Daraus lässt sich ableiten, dass auf einem hyperbolischen Paraboloid unendlich viele HP-Flächen liegen (vgl. [7], S. 129).

Auch die Umkehrung dieser Aussage gilt (Abbildung 45): Jede HP-Fläche liegt auf einem hyperbolischen Paraboloid (vgl. [2], S. 361).

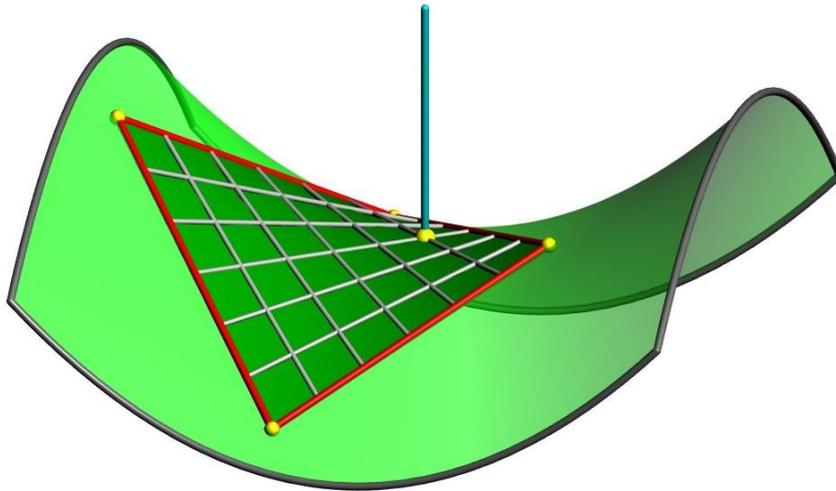


Abbildung 45 – Hyperbolisches Paraboloid mit HP-Fläche [8]

Die hyperbolischen Paraboloid und die einschaligen Hyperboloide sind übrigens die einzigen krummen Flächen, auf denen es zwei Scharen von unendlich vielen Geraden gibt (vgl. [2], S. 370).

4.3. Wendelflächen

Eine Gerade e_0 trifft normal auf eine Leitgerade auf; e_0 liegt auf der x-Achse, die Leitgerade liegt auf der z-Achse.

Die Gerade e_0 wird um den Winkel t um die z-Achse gedreht. Gleichzeitig ändert sich die z-Koordinate gemäß einer Funktion $f(t)$, für die $f(0) = 0$ ist (Abbildung 46).

Da alle Erzeugenden orthogonal auf die Leitgerade auftreffen, liegt ein **gerades Konoid** vor.

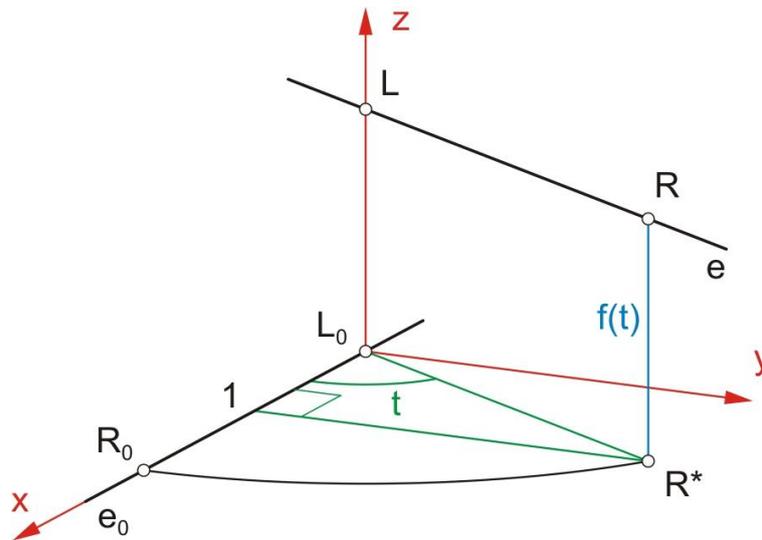


Abbildung 46 – Wendelfläche (Erzeugung)

4.3.1. Parameterdarstellung

Der Punkt $R_0 = (1,0,0)$ befindet sich nach der Drehung in der Position $R^* = (\cos t, \sin t, 0)$ und nach der Änderung der z-Koordinate in der Position $R = (\cos t, \sin t, f(t))$. Der Punkt $L_0 = (0,0,0)$ gelangt in die Position $L = (0,0, f(t))$. Der Erzeugendenvektor \mathbf{r} ist daher:

$$\mathbf{r} = LR = (\cos t, \sin t, 0)$$

Daher lautet die Parameterdarstellung der Regelfläche:

$$P = L + v \cdot \mathbf{r}$$

$$P = [v \cdot \cos t, v \cdot \sin t, f(t)]$$

Im Folgenden werden zwei besonders interessante Fälle vorgestellt. Es wird jeweils die Schnittkurve der Regelfläche mit einer lotrechten Drehzylinderfläche (mit beliebigem Radius r) untersucht, die durch die z-Achse geht und deren Achse die x-Achse trifft.

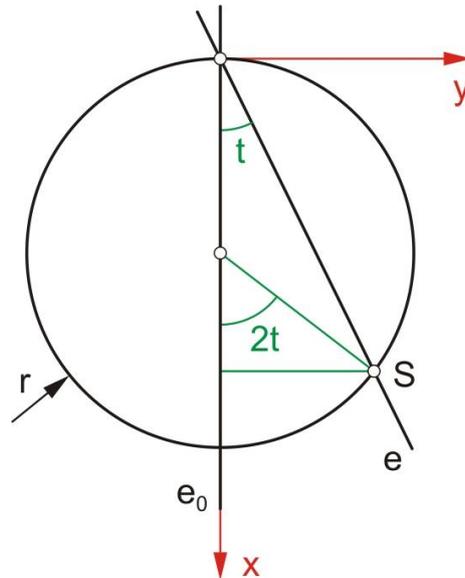


Abbildung 47 – Wendelfläche (Schnittkurve mit Drehzylinderfläche)

Aus Abbildung 47 lässt sich die Parameterdarstellung dieser Schnittkurve leicht ablesen, wobei der Peripheriewinkelsatz zu beachten ist:

$$S = (r + r \cdot \cos 2t, r \cdot \sin 2t, f(t))$$

4.3.2. Schraubwendelfläche

Eine **Schraubwendelfläche** ist eine Wendelfläche, bei der die Schiebstrecke $f(t)$ entlang der z-Achse proportional zum Drehwinkel t ist, also $f(t) = p \cdot t$ gilt.

$$P = [v \cdot \cos t, v \cdot \sin t, p \cdot t]$$

Die Parameterdarstellung der Schnittkurve mit der vorhin genannten Drehzylinderfläche lautet:

$$S = (r + r \cdot \cos 2t, r \cdot \sin 2t, p \cdot t)$$

Diese Parameterdarstellung lässt sich auch so interpretieren:

Der Punkt $(2 \cdot r, 0, 0)$ wird um den Punkt $(r, 0, 0)$ um den Winkel $2t$ gedreht und dann um $p \cdot t$ nach oben geschoben. Da die Schiebstrecke proportional zum Drehwinkel ist, ist die Schnittkurve eine Schraublinie.

Wenn die Gerade e jedoch eine volle Umdrehung macht, vollführt S zwei volle Umdrehungen.

In Abbildung 48 ist die Schraubwendelfläche samt Schnittkurve für $p = 1.5$, $r = 2$, $0 \leq t \leq 2\pi$ und $-5 \leq v \leq 5$ dargestellt.

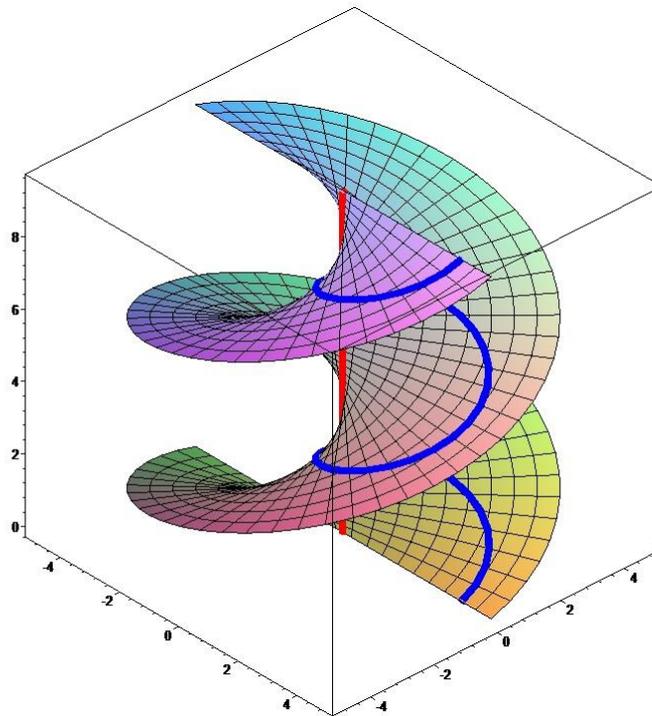


Abbildung 48 – Schraubwendelfläche

4.3.3. Plücker-Konoid

Eine Wendelfläche, bei der die z-Koordinate $f(t)$ proportional zum Sinus des doppelten Drehwinkels t ist, also $f(t) = p \cdot \sin 2t$ gilt, heißt **Plücker-Konoid**.

$$P = [v \cdot \cos t, v \cdot \sin t, p \cdot \sin 2t]$$

Die Parameterdarstellung der Schnittkurve mit der in 4.3.1. genannten Drehzylinderfläche lautet:

$$S = (r + r \cdot \cos 2t, r \cdot \sin 2t, p \cdot \sin 2t)$$

Aus der Parameterdarstellung ist zu erkennen, dass die Schnittkurve in einer Ebene liegt, da für die Koordinatenfunktionen $y(t)$ und $z(t)$ gilt:

$$\frac{y}{r} = \frac{z}{p}$$

Die Schnittkurve ist daher ein ebener Schnitt einer Drehzylinderfläche, also eine Ellipse.

In Abbildung 49 ist das Plücker-Konoid samt Schnittkurve für $p = 1.5$, $r = 2$, $0 \leq t \leq \pi$ und $-5 \leq v \leq 5$ dargestellt.

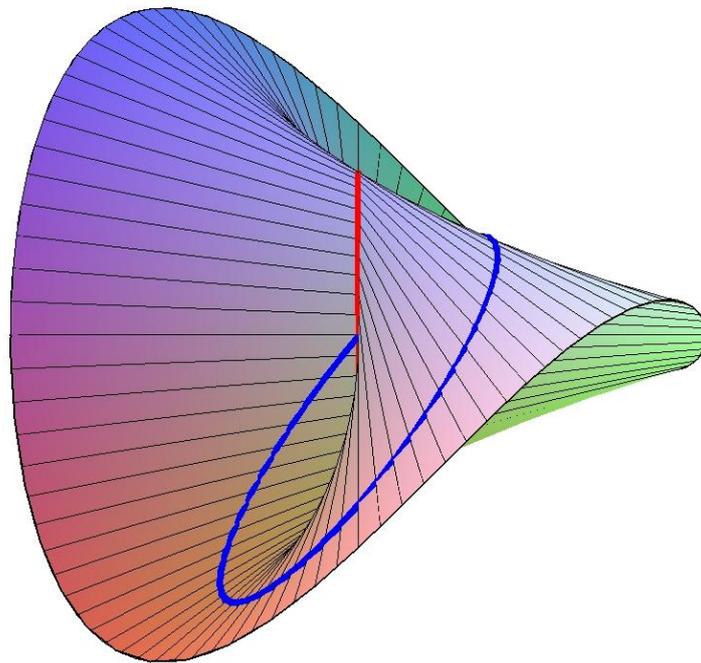


Abbildung 49 – Plücker-Konoid

Schneidet man nun das Plücker-Konoid mit einer beliebigen Drehzylinderfläche, die durch die z-Achse geht und den Radius r hat, so erhält man wieder eine Ellipse, die zur vorhin ermittelten Ellipse kongruent ist. Ein analytischer Beweis dieser verblüffenden Aussage wäre ziemlich schwierig. Der folgende geometrische Beweis ist hingegen recht einfach.

Behauptung:

Wenn man den „Ausgangszylinder“ (Achse trifft x-Achse, enthält z-Achse) in einem doppelt so großen Zylinder (Achse ist z-Achse) rollen lässt und dabei die Schnittkurve des Ausgangszylinders mit dem Plücker-Konoid mitnimmt, bleibt diese stets auf dem Plücker-Konoid.

Beweis:

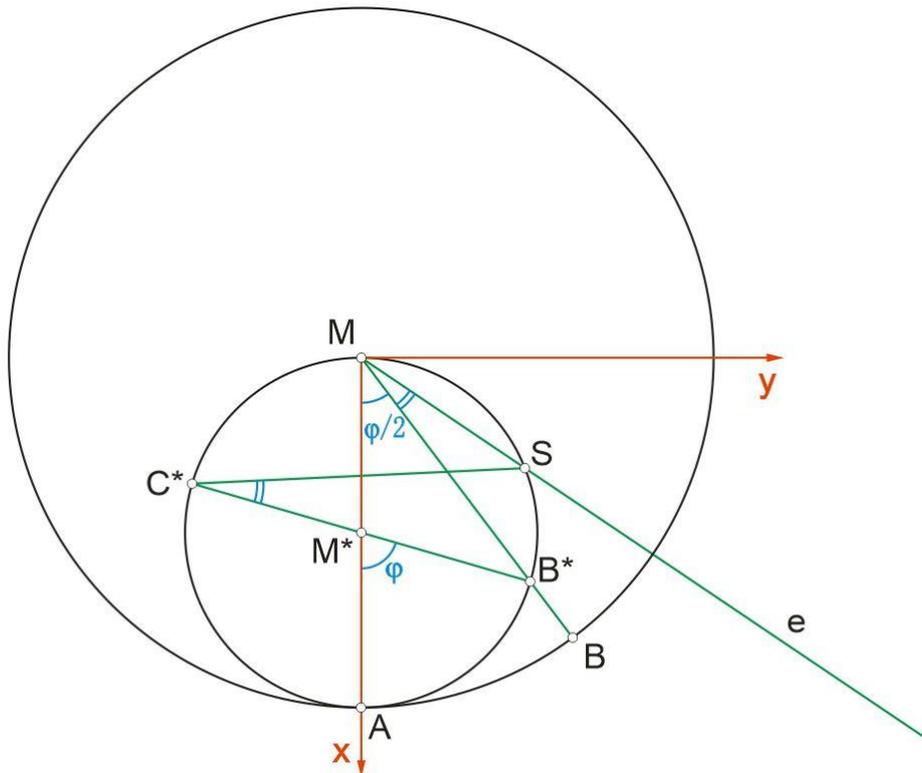


Abbildung 50 – Plücker-Konoid (Beweis Schnittkurve)

Beim Rollen kommt der Umfangspunkt B^* des kleinen Kreises auf einem Umfangspunkt B des großen Kreises zu liegen.

Der Winkel $\sphericalangle AM^*B^*$ ist wegen des Peripheriewinkelsatzes doppelt so groß wie der Winkel $\sphericalangle AMB^*$. Daher liegt B^* auf MB , weil die Bögen AB^* und AB aufgrund des Rollens gleich lang sind.

Da aber auch $\sphericalangle B^*C^*S = \sphericalangle B^*MS$ ist (Peripheriewinkelsatz), gilt beim Rollen:

$$B^* \rightarrow B, C^* \rightarrow M, S \text{ bleibt auf } e$$

Jeder Punkt S der Schnittkurve bleibt beim Rollen also auf „seiner“ Erzeugenden und somit auf dem Plücker-Konoid.

4.4. Möbius-Band

Eine Gerade e_0 trifft normal auf eine Achse a auf; e_0 liegt auf der x -Achse, a liegt auf der z -Achse. Auf e_0 wird ein Punkt L_0 gewählt. Die Gerade e_0 vollführt nun eine „doppelte“ Drehbewegung:

Zuerst wird sie in der xz -Ebene um den Punkt L_0 gedreht (Drehwinkel t) und dann um die z -Achse (Drehwinkel $2t$). Bei dieser Bewegung erzeugt die Gerade eine Regelfläche, die man **Möbius-Band**⁷ nennt. Der Punkt L_0 bewegt sich auf einem Kreis in der xy -Ebene, alle anderen Punkte von e_0 bewegen sich auf komplizierteren Kurven.

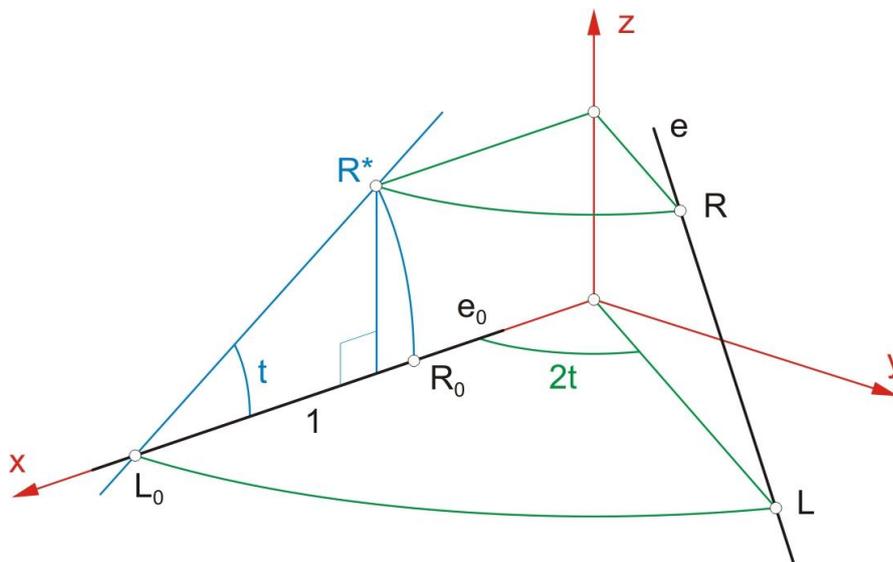


Abbildung 51 – Erzeugung Möbius-Band

Da sich die Drehwinkel wie 1:2 verhalten, entspricht einer vollen Umdrehung um die z -Achse eine halbe Umdrehung um L_0 . Die Gerade kommt also wieder in ihre Ausgangslage, aber gespiegelt an L_0 .

4.4.1. Parameterdarstellung

Der von $L_0 = (a, 0, 0)$ erzeugte Bahnkreis wird als Leitlinie verwendet.

Die Drehung in der xy -Ebene hat den Drehwinkel $2t$. Die Parameterdarstellung des Leitkreises mit dem Radius a lautet daher:

$$L = [a \cdot \cos 2t, a \cdot \sin 2t, 0]$$

⁷ August Ferdinand Möbius, 1790 – 1868, deutscher Mathematiker und Astronom

Um die Erzeugendenvektoren zu beschreiben, wird ein zweiter Punkt R_0 auf der Geraden e_0 im Abstand 1 von L_0 festgesetzt. Bei der Rotation um den Punkt L_0 mit dem Drehwinkel t gelangt R_0 in die Lage R^* .

$$R^* = [a - \cos t, 0, \sin t]$$

Weiters muss R^* noch, gleich wie der Punkt L_0 , mit einem Drehwinkel von $2t$ um die z-Achse gedreht werden. R^* bewegt sich also auf einem Kreis mit dem Radius $r = a - \cos t$ in einer Höhe von $\sin t$. Den auf der Erzeugenden e liegenden Punkt R erhält man daher durch folgende Parameterdarstellung:

$$R = [(a - \cos t) \cdot \cos 2t, (a - \cos t) \cdot \sin 2t, \sin t]$$

Der Erzeugendenvektor LR ist so bereits immer ein Einheitsvektor. Der Richtungsvektor e lautet also:

$$LR = e = (-\cos t \cdot \cos 2t, -\cos t \cdot \sin 2t, \sin t)$$

Die Parameterdarstellung des Möbius-Bandes lautet somit:

$$P = [a \cdot \cos 2t - v \cdot \cos t \cdot \cos 2t, a \cdot \sin 2t - v \cdot \cos t \cdot \sin 2t, v \cdot \sin t]$$

In Abbildung 52 ist das Möbius-Band für $a = 10$ dargestellt. Als Parameterbereich wurde $0 \leq t \leq \pi$ und $-3 \leq v \leq 3$ gewählt.

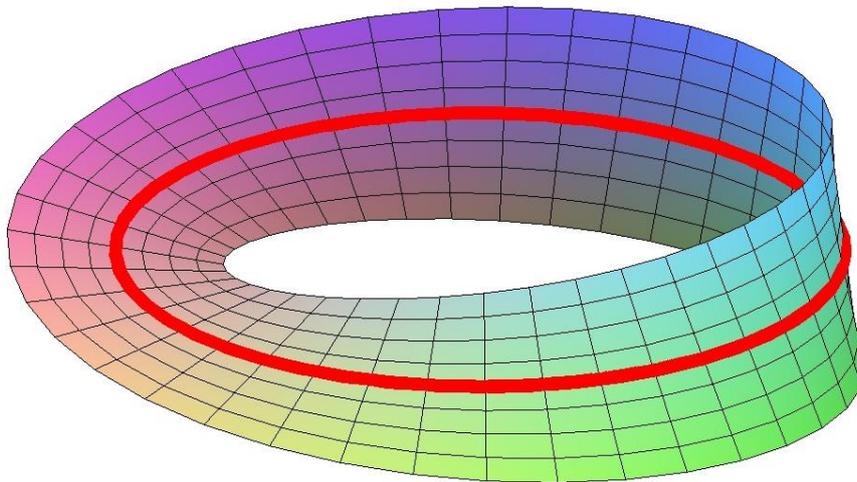


Abbildung 52 – Möbius-Band

4.4.2. Besonderheiten des Möbius-Bandes

Wie bereits erwähnt, entspricht einer vollen Umdrehung um die z -Achse genau eine halbe Umdrehung um L . Die Erzeugenden kommen also wieder dort an, wo sie am Anfang waren. Jeder von L verschiedene Punkt R einer Erzeugenden benötigt aber zwei volle Umdrehungen um die z -Achse, um wieder in seine Ausgangslage zu kommen. Nimmt man den Normalvektor in L bei der Bewegung mit, so zeigt er nach einer vollen Umdrehung in die entgegengesetzte Richtung.

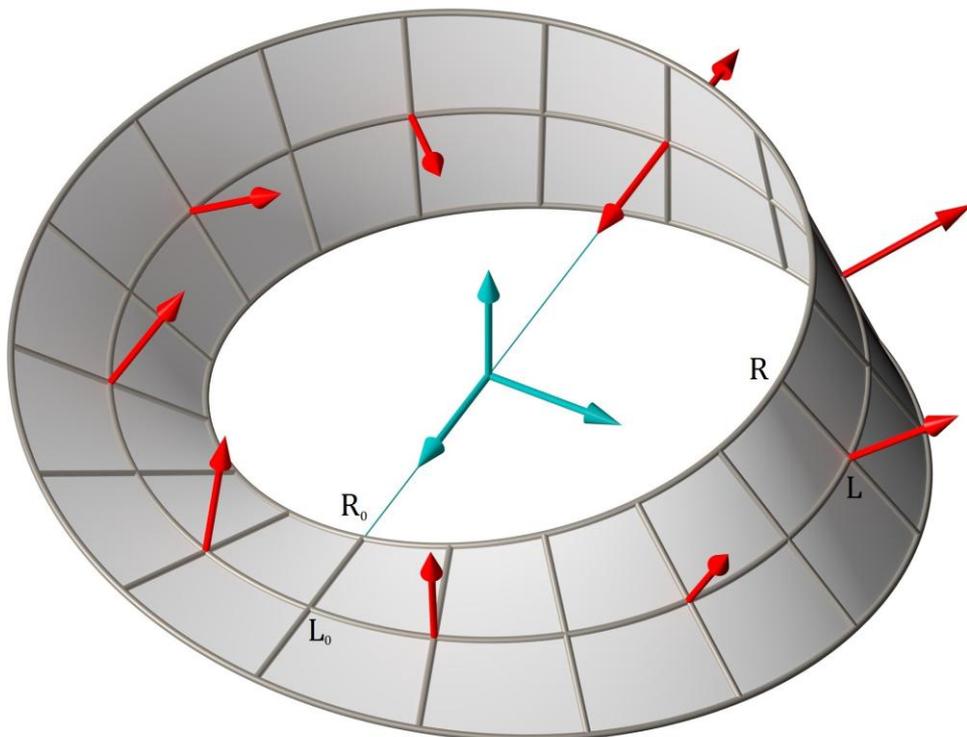


Abbildung 53 – Möbius-Band (Normalvektoren) [8]

Flächen haben in der Regel eine Außenseite und eine Innenseite. Anschaulich kann man das so definieren: Blickt man entgegen dem Pfeil des Normalvektors auf die Fläche, so sieht man die Außenseite. Die Abbildung 53 lässt erkennen, dass man bei einem geschlossenen Möbius-Band nicht zwischen Außenseite und Innenseite unterscheiden kann. Das Möbius-Band hat also nur eine Seite.

Das eben beschriebene Möbius-Band lässt sich nicht abwickeln. Man kann aber auch aus Papierstreifen Möbius-Bänder herstellen, indem man den Streifen zu einer Schleife schließt, wobei eines der Enden um 180° gedreht wird; dieses Möbius-Band lässt sich natürlich abwickeln.

Wenn man für das Möbius-Band

$$P = [(a - v \cdot \cos t) \cdot \cos 2t, (a - v \cdot \cos t) \cdot \sin 2t, v \cdot \sin t]$$

die Striktionslinie berechnet (wieder mit MAPLE), so erhält man:

$$Z = \left[\frac{a \cdot \cos 2t}{4 \cdot \cos^2 t + 1}, \frac{a \cdot \sin 2t}{4 \cdot \cos^2 t + 1}, \frac{2a \cdot \sin 2t}{4 \cdot \cos^2 t + 1} \right]$$

Es lässt sich nachrechnen, dass die Striktionslinie eine Ellipse ist, deren Nebenachse auf der x-Achse liegt. Die Achsen haben die Längen $2a$ und $\frac{6a}{5}$.

Die Abbildung 54 zeigt den zwischen dem Leitkreis (rot) und der Striktionslinie (blau) liegenden Teil des Möbius-Bandes.

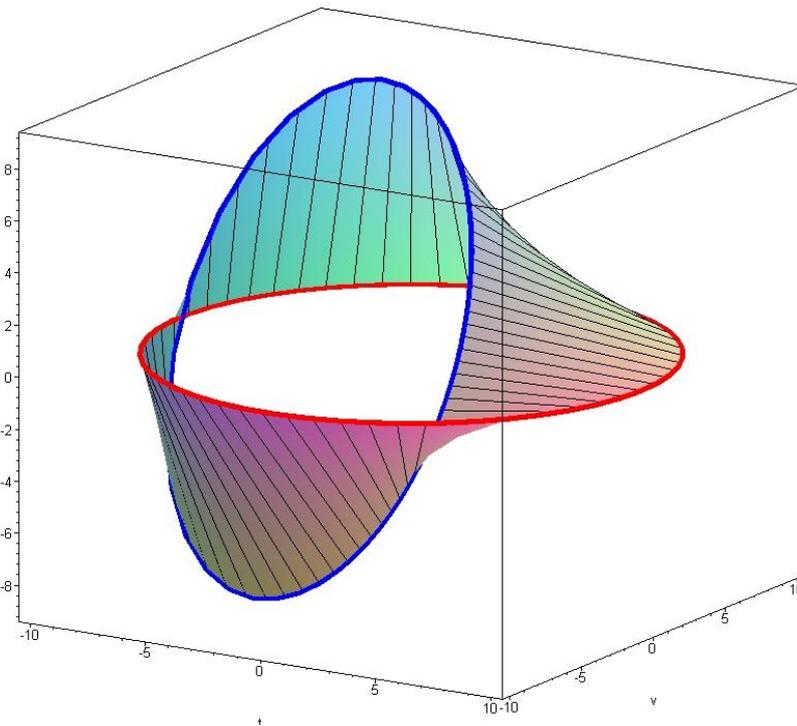


Abbildung 54 – Möbius-Band (Bereich zwischen Leitkreis und Striktionslinie)

4.5. Schraubtorse

Die Tangentenfläche einer Schraublinie wird als **Schraubtorse** bezeichnet. Wie jede Tangentenfläche besteht auch die Schraubtorse aus zwei Teilen, die entlang der Schraublinie zusammenhängen und dort einen scharfkantigen Grat bilden (vgl. Abbildung 31). In Abbildung 55 ist ein Abschnitt des unteren Teils einer Schraubtorse zu sehen.

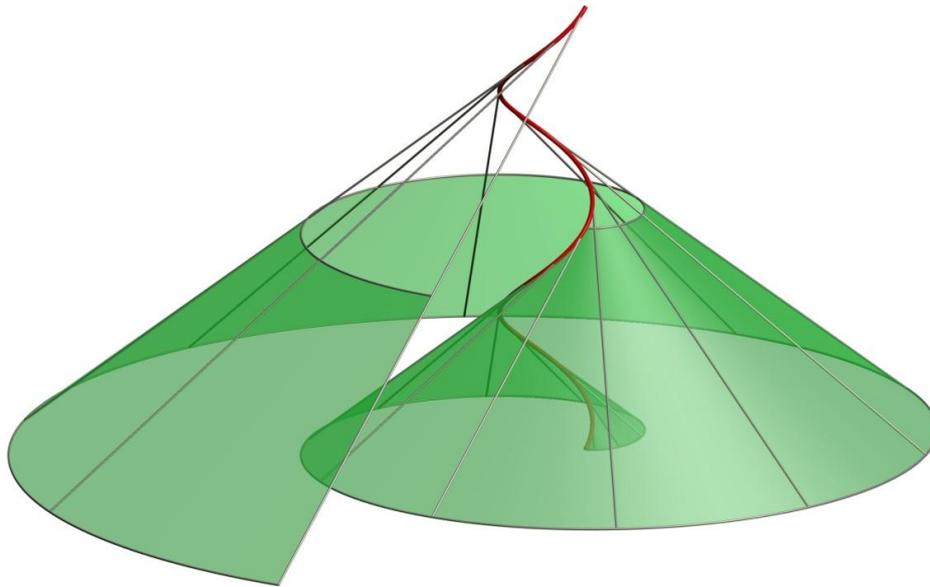


Abbildung 55 – Schraubtorse

4.5.1. Parameterdarstellung

Wie bereits in Beispiel 1 hergeleitet, lautet die Parameterdarstellung einer Schraublinie mit dem Radius r und dem Parameter p :

$$L = [r \cdot \cos t, r \cdot \sin t, p \cdot t]$$

Die Tangentenvektoren der Schraublinie und somit die Erzeugendenvektoren berechnen sich daher wie folgt:

$$\dot{L} = (-r \cdot \sin t, r \cdot \cos t, p)$$

Damit lässt sich die Parameterdarstellung der Schraubtorse anschreiben:

$$P = L + v \cdot \dot{L}$$

$$P = [r \cdot \cos t - v \cdot r \cdot \sin t, r \cdot \sin t + v \cdot r \cdot \cos t, p \cdot t + v \cdot p]$$

Parameterwerte für $v \geq 0$ beschreiben den oberen Teil der Schraubtorse, Parameterwerte für $v \leq 0$ den unteren (vgl. Abbildung 55).

4.5.2. Höhengschichtlinien

Aus einer Höhengschichtlinie können alle weiteren Höhengschichtlinien durch Schrauben erzeugt werden. Für die Herleitung der Form genügt es daher, die Höhengschichtlinie in der xy -Ebene zu berechnen, also in der Höhe $z = 0$:

$$p \cdot t + v \cdot p = 0$$

$$v = -t$$

Ersetzt man nun v in der Parameterdarstellung für die Schraubtorse durch $-t$, so erhält man die Parameterdarstellung der Schnittkurve der Schraubtorse mit der xy -Ebene. Nach einer einfachen Umformung erhält man:

$$S = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t, 0) + t \cdot (r \cdot \sin t, -r \cdot \cos t, 0)$$

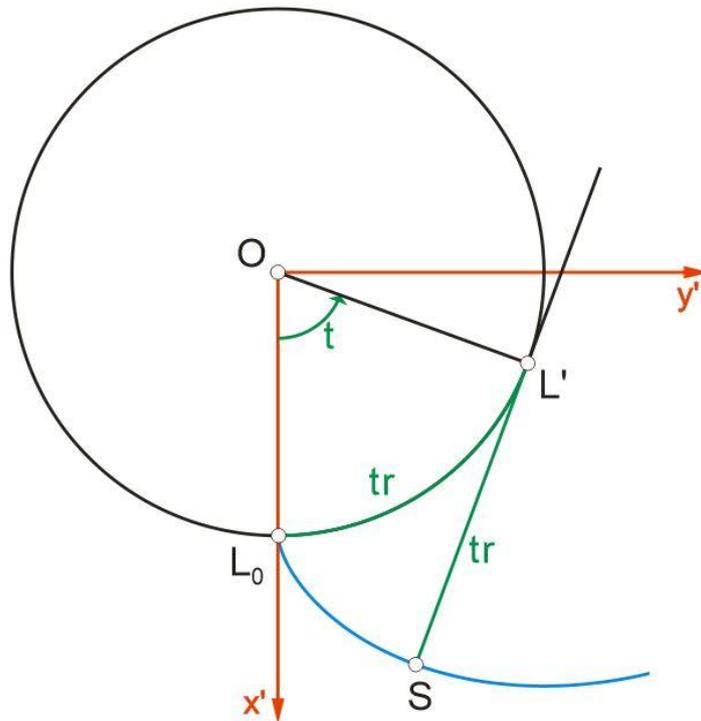


Abbildung 56 – Höhengschichtlinien einer Schraubtorse

Diese Darstellung von S kann man als Parameterdarstellung einer Geraden interpretieren: Der Punkt $(r \cdot \cos t, r \cdot \sin t, 0)$ ist der Punkt L' auf dem Grundriss der Schraublinie, der ein Kreis ist. Der Richtungsvektor $(r \cdot \sin t, -r \cdot \cos t, 0)$ liegt tangential zu diesem Kreis im Punkt L' . Der Vektor $L'S = t \cdot (r \cdot \sin t, -r \cdot \cos t, 0)$ hat die Länge $t \cdot r$. Auch der Kreisbogen von $L'_0 = (r, 0, 0)$ bis $L' = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t, 0)$ hat diese Länge.

Bei der Höhenschichtlinie handelt es sich also um die Bahnkurve eines Punktes einer Kreistangente, die entsteht, wenn die Kreistangente auf dem Kreis „rollt“. Man spricht von einer **Kreisevolvente**.

Den Tangentenvektor der Höhenschichtlinie in S erhält man durch Differenzieren:

$$\dot{S} = (-r \cdot \sin t, r \cdot \cos t, 0) + (r \cdot \sin t, -r \cdot \cos t, 0) + t \cdot (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t, 0)$$

$$\dot{S} = t \cdot (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t, 0)$$

Wie man mit Hilfe des skalaren Produktes sofort erkennt, ist der Tangentenvektor \dot{S} sowohl zu $L'S = t \cdot (r \cdot \sin t, -r \cdot \cos t, 0)$ als auch zu $LS = t \cdot (r \cdot \sin t, -r \cdot \cos t, -p)$ normal.

Die Höhenschichtlinie schneidet also die Tangenten der Schraublinie rechtwinkelig.

4.6. Oloid

Gegeben sind zwei Kreise in aufeinander orthogonal stehenden Ebenen, wobei die Mittelpunkte der beiden Kreise auf der Schnittgeraden der beiden Ebenen liegen. Beide Kreise haben den gleichen Radius r . Der Abstand der Mittelpunkte der beiden Kreise ist ebenfalls r .

Die Verbindungstorse dieser zwei Kreise wird **Oloid** genannt.

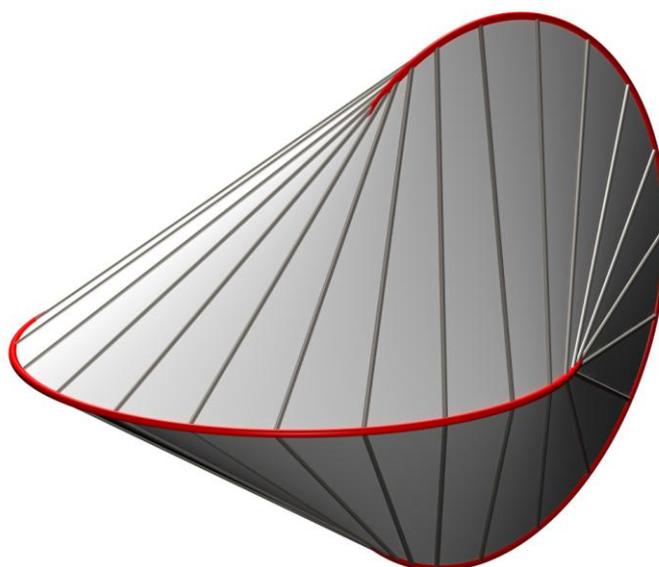


Abbildung 57 – Oloid

4.6.1. Parameterdarstellung

Für die folgende Herleitung der Parameterdarstellung (Abbildung 57) haben die beiden Kreise *o. B. d. A.* den Radius $r = 1$.

Der in der xy -Ebene liegende Kreis ist der Leitkreis des Oloids.

$$L = [1 + \cos t, \sin t, 0]$$

Um eine torsale Regelfläche zu erhalten, muss der in der xz -Ebene liegende Kreis so parametrisiert werden, dass die Tangentialebenen in L und R jeweils gleich sind. Würde man den zweiten Kreis einfach mit

$$R = [\cos t, 0, \sin t]$$

parametrisieren und LR als Erzeugendenvektor nehmen, so wäre die entstehende Regelfläche nicht torsal.

Es wird also die Tangente in L mit der x -Achse geschnitten. Vom Schnittpunkt S aus wird eine Tangente an den lotrechten Kreis gelegt, die ihn im Punkt R berührt.

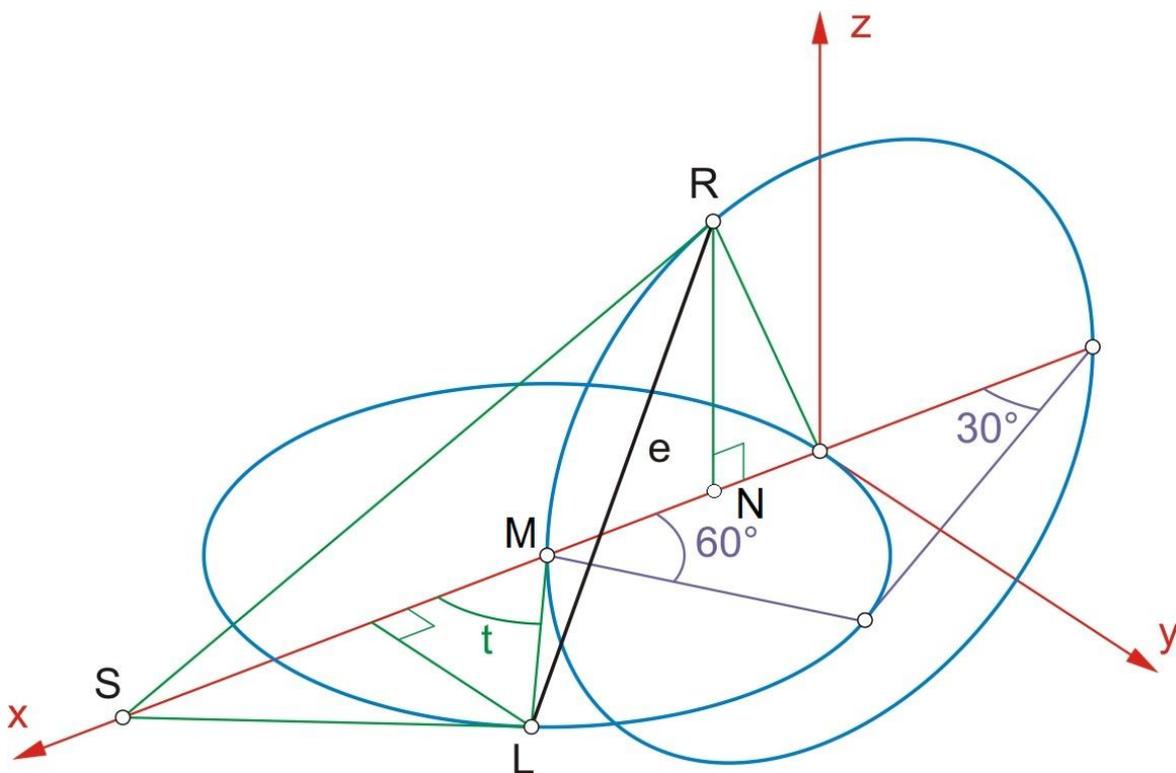


Abbildung 58 – Erzeugung Oloid

Die Erzeugende $e = LR$ hat nun die Eigenschaft, dass die Tangentialebenen in L und R gleich sind. Sie ist daher eine torsale Erzeugende.

Wegen des Kathetensatzes im rechtwinkligen Dreieck SLM gilt:

$$\overline{MS} \cdot \cos t = 1^2$$

$$\overline{MS} = \frac{1}{\cos t}$$

Der Schnittpunkt S hat daher die Koordinaten $S = (1 + \frac{1}{\cos t}, 0, 0)$.

Im Dreieck ORS kann mit dem Kathetensatz die x-Koordinate von R berechnet werden:

$$\overline{OS} \cdot x_R = 1^2$$

$$x_R = \frac{1}{1 + \frac{1}{\cos t}} = \frac{\cos t}{1 + \cos t}$$

Die z-Koordinate von R kann dann mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet werden:

$$z_R^2 = 1 - x_R^2$$

$$z_R^2 = 1 - \frac{\cos^2 t}{(1 + \cos t)^2} = \frac{1 + 2 \cdot \cos t}{(1 + \cos t)^2}$$

$$z_R = \pm \frac{\sqrt{1 + 2 \cdot \cos t}}{1 + \cos t}$$

Mit diesen Koordinatenfunktionen kann der lotrechte Kreis nun geeignet parametrisiert werden:

$$R = \left[\frac{\cos t}{1 + \cos t}, 0, \pm \frac{\sqrt{1 + 2 \cdot \cos t}}{1 + \cos t} \right]$$

Für den Erzeugendenvektor LR erhält man:

$$LR = \left(-\frac{1 + \cos t + \cos^2 t}{1 + \cos t}, -\sin t, \pm \frac{\sqrt{1 + 2 \cdot \cos t}}{1 + \cos t} \right)$$

Die Parameterdarstellung des Oloids lautet daher:

$$P = \left[1 + \cos t - v \cdot \frac{1 + \cos t + \cos^2 t}{1 + \cos t}, \sin t - v \cdot \sin t, \pm v \cdot \frac{\sqrt{1 + 2 \cdot \cos t}}{1 + \cos t} \right]$$

4.6.2. Erzeugende

Länge der Erzeugenden

Rechnet man den Betrag des Erzeugendenvektors LR aus, so erkennt man nach einiger Rechnung, dass dieser für alle LR konstant gleich $\sqrt{3}$ ist:

$$|LR| = \sqrt{3}$$

Alle Erzeugenden sind also gleich lang.

Spezielle Erzeugende

Auf jeder Hälfte des Oloids liegen spezielle Erzeugende. Wir betrachten nur die obere Hälfte.

- 1) Erzeugende bei $t = 0$

Diese Erzeugende liegt in der xz -Ebene und verbindet die Punkte $L = (2,0,0)$ und $R = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Sie ist eine nichtzylindrische Erzeugende und hat R als Zentralpunkt (Kuspidalpunkt).

- 2) Erzeugende bei $t = \pm 90^\circ$

Die beiden Erzeugenden verbinden die Punkte $L = (1, \pm 1, 0)$ mit $R = (0,0,1)$. Sie sind zylindrisch torsale Erzeugende, haben also keinen Zentralpunkt.

- 3) Erzeugende bei $t = \pm 120^\circ$

Die beiden Erzeugenden liegen in der xy -Ebene und verbinden die Punkte $L = \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ mit $R = (-1,0,0)$. Sie sind nichtzylindrische Erzeugende und haben L als Kuspidalpunkt.

Intervalle für Parameterwerte

Für $t = \pm 120^\circ$ liegen die Erzeugenden in der xy -Ebene. Für t zwischen -120° und $+120^\circ$ kann die in Abbildung 57 zu sehende Konstruktion von R durchgeführt werden. Für Winkel außerhalb dieses Intervalls (also $120^\circ < t < 180^\circ$ bzw. $-180^\circ < t < -120^\circ$) kann R nicht konstruiert werden, da S innerhalb des lotrechten Kreises liegt.

Für den Parameter t gilt also:

$$-120^\circ \leq t \leq 120^\circ$$

Der Parameter ν kann beliebig variiert werden. Den in Abbildung 56 dargestellten Teil des Oloids erhält man für $-120^\circ \leq t \leq 120^\circ$ und $0 \leq \nu \leq 1$.

IV. Nachwort

Verfassen der Arbeit

Den Entschluss, eine Fachbereichsarbeit in Mathematik zu schreiben, fasste ich bereits in der 6. Klasse. Als uns in Vorbereitung auf die Zentralmatura berichtet wurde, dass wir im Rahmen der Reifeprüfung eine Vorwissenschaftliche Arbeit verfassen müssten, war für mich von Anfang an klar, dass ich diese Arbeit in einem zur Mathematik gehörenden Fachgebiet schreiben möchte.

Da mir das Verfassen von Arbeiten und die damit einhergehende intensive Beschäftigung mit dem gewählten Thema immer Freude bereitete, wollte ich dann, nachdem die Zentralmatura doch noch einmal um ein Jahr verschoben worden war, mein Vorhaben dennoch beibehalten.

Sowohl im Erarbeiten des erforderlichen Fachwissens als auch im eigentlichen Verfassen der Arbeit unterschied sich diese grundlegend von den bisher erstellten Arbeiten, da ich erstmals zu einem theoretischen und abstrakten Thema schrieb. Beides stellte sich als Herausforderung dar, beides weckte zunehmend mein Interesse und bereitete mir mehr und mehr Freude.

Wenn ich nun meine Arbeit durchblättere, dann begegnen mir viele Erfahrungen, viele neue Erkenntnisse, vor allem aber auch viel Begeisterung für das Thema im Speziellen und Mathematik im Allgemeinen.

Danksagungen

Meine Freundin Sonja schreibt auch in ihrem Neigungsfach – Musik – eine Fachbereichsarbeit. Als „Leidensgenossin“ konnte sie die Herausforderung nachvollziehen und unterstützte mich immer wieder mit Rat und Tat.

Während meiner ganzen Schulzeit haben mich meine Eltern immer unterstützt und nun auch in der Zeit während des Schreibens an dieser Fachbereichsarbeit sind sie mir immer zur Seite gestanden.

Für die Geduld in der Einarbeitungsphase und die Unterstützung während des gesamten Verlaufs meiner Arbeit möchte ich mich bei meinem Betreuer Dr. Gerhard Pillwein bedanken.

V. Quellenverzeichnis

Literaturverzeichnis

- [1] Bitterberg, Tilmann: Differentialgeometrie II. Skriptum – HfT Stuttgart: 2001

- [2] Brauner, Heinrich: Lehrbuch der Konstruktiven Geometrie – Wien/New York: Springer, 1986

- [3] Bürger, Manuela: Offsetflächen und CAS-Visualisierungen. Diplomarbeit TU Wien

- [4] Gfrerrer, Anton: Kurven und Flächen – eine Einführung. Skriptum TU Graz

- [5] List, Christine: Konstruktive Behandlung von Regelflächen mit CAD-Software anhand ausgewählter Beispiele für den Schulunterricht. Diplomarbeit TU Wien

- [6] Manhart, Friedrich: Differentialgeometrie. Skriptum TU Wien

- [7] Pillwein, Gerhard; Asperl, Andreas; Müllner, Robert; Wischounig, Michael: Raumgeometrie. Konstruieren und Visualisieren. – Wien: Österreichischer Bundesverlag, 2006

- [8] Pillwein, Gerhard: Arbeitsblätter für den Unterricht und für die Lehrer/innenfortbildung. GRG3 Kundmangasse, Wien

- [9] Pottmann, Helmut; Asperl, Andreas; Hofer, Michael; Kilian, Axel: Architectural Geometry. – Exton: Bentley Institute Press, 2007

Verzeichnis der Internetquellen

- [10] <http://www.duden.de/rechtschreibung/Striktion>, 04.01.2014

- [11] <http://www.rmg.co.uk/explore/astronomy-and-time/astronomy-facts/history/christopher-wren-architect-and-astronomer>, 14.01.2014

- [12] <http://www.britannica.com/EBchecked/topic/386818/August-Ferdinand-Mobius>, 15.01.2014

- [13] <http://de.cyclopaedia.net/wiki/Paul-de-Casteljau>, 18.01.2014

- [14] <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Taylor.html>, 18.01.2014

- [15] <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Lagrange.html>, 18.01.2014

- [16] <http://www.engology.com/eng5bezier.htm>, 02.02.2014

VI. Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1 – Parameterdarstellung	7
Abbildung 2 – Herleitung Schraublinie	8
Abbildung 3 – Schraublinie (drei Gänge) [8]	8
Abbildung 4 – Bezierkurve [7]	9
Abbildung 5 – Bezierkurve [7]	11
Abbildung 6 – Tangente	12
Abbildung 7 – Herleitung Bogenlänge	14
Abbildung 8 – Schmiegebene	16
Abbildung 9 – Dreibein	19
Abbildung 10 – Dreibein - Grundriss	20
Abbildung 11 – Dreibein – Aufriss	20
Abbildung 12 – Dreibein - Kreuzriss	21
Abbildung 13 – Parameterdarstellung [4, bearbeitet]	22
Abbildung 14 – Beispiel 5 (Affensattel)	23
Abbildung 15 – Parameterlinien und Flächenkuren [4, bearbeitet]	24
Abbildung 16 – Erzeugung Torusfläche [7]	24
Abbildung 17 – Beispiel 6 (Torus mit Parameterlinien und Flächenkurve)	25
Abbildung 18 – Tangentialebene [4, bearbeitet]	26
Abbildung 19 – Wendelfläche	28
Abbildung 20 – Regelfläche (Parameterdarstellung)	29
Abbildung 21 – Beispiel 8	30
Abbildung 22 – Ebene der Normalvektoren \mathbf{n}_P	31
Abbildung 23 – Normalvektor \mathbf{n}_Z auf e .	34
Abbildung 24 – Beispiel 9 (Regelfläche zwischen Parabel und Strecke)	36
Abbildung 25 – Beispiel 9 (Screenshot Berechnung der Striktionslinie)	37
Abbildung 26 – Beispiel 9 (Regelfläche mit Striktionslinie)	37
Abbildung 27 – Winkel der Normalvektoren \mathbf{n}_P und \mathbf{n}_{P^*} mit \mathbf{n}_Z	38
Abbildung 28 – Torsale Regelfläche [8]	40
Abbildung 29 – Zylinderfläche	41
Abbildung 30 – Kegelfläche	42
Abbildung 31 – Tangentenfläche	43
Abbildung 32 – Tangentenfläche $v \geq 0$	44
Abbildung 33 – Tangentenfläche $v \leq 0$	44
Abbildung 34 – Einschaliges Drehhyperboloid [7]	47
Abbildung 35 – Einschaliges Drehhyperboloid (Erzeugung)	48
Abbildung 36 – Drehhyperboloid (Asymptotenkegel) [8]	50
Abbildung 37 – Drehhyperboloid (Spiegelung der Erzeugenden) [7]	51
Abbildung 38 – Drehhyperboloid mit Striktionslinie (Kehlkreis)	52
Abbildung 39 – Hyperboloid mit Striktionslinie	52
Abbildung 40 – HP-Fläche (Erzeugung) [8]	53
Abbildung 41 – HP-Fläche (Parameterlinien) [8]	54
Abbildung 42 – HP-Fläche (Beispiel 9)	55
Abbildung 43 – Hyperbolisches Paraboloid [7]	56
Abbildung 44 – Hyperbolisches Paraboloid („waagrechte“ bzw. „senkrechte“ Schnitte) [7], [8]	56
Abbildung 45 – Hyperbolisches Paraboloid mit HP-Fläche [8]	57
Abbildung 46 – Wendelfläche (Erzeugung)	58
Abbildung 47 – Wendelfläche (Schnittkurve mit Drehzylinderfläche)	59
Abbildung 48 – Schraubwendelfläche	60

<i>Abbildung 49 – Plücker-Konoid</i>	61
<i>Abbildung 50 – Plücker-Konoid (Beweis Schnittkurve)</i>	62
<i>Abbildung 51 – Erzeugung Möbius-Band</i>	63
<i>Abbildung 52 – Möbius-Band</i>	64
<i>Abbildung 53 – Möbius-Band (Normalvektoren) [8]</i>	65
<i>Abbildung 54 – Möbius-Band (Bereich zwischen Leitkreis und Striktionslinie)</i>	66
<i>Abbildung 55 – Schraubtorse</i>	67
<i>Abbildung 56 – Höhenschichtlinien einer Schraubtorse</i>	68
<i>Abbildung 57 – Oloid</i>	69
<i>Abbildung 58 – Erzeugung Oloid</i>	70

VII. Erklärung

Ich erkläre, dass ich diese Fachbereichsarbeit selbst verfasst und ausschließlich die angegebene Literatur verwendet habe.

Wien, am

.....

Anna Niggas