
Fachbereichsarbeit aus Darstellender Geometrie

Richard Löscher, 8A

Der Steinerkreis - Ein faszinierendes Werkzeug der Projektiven Geometrie

Betreuer/in: Mag. David Stuhlpfarrer

„Ich erkläre hiermit eidesstattlich, dass ich die Arbeit selbstständig und ausschließlich unter Verwendung der angeführten Hilfsmittel verfasst habe.“

Abgegeben am: _____

Unterschrift: _____

BRG Petersgasse
Petersgasse 110
8010 Graz

FACHBEREICH SARBEIT

Der Steinerkreis – Ein faszinierendes Werkzeug der Projektiven Geometrie

Richard Löscher

Graz, am 15. März 2014
Klasse: 8A
Schuljahr: 2013/14
Betreuer: Mag. David Stuhlpfarrer

Abstract

Thema dieser Arbeit ist der sogenannte Steinerkreis. Er ist ein Werkzeug der Projektiven Geometrie, das es ermöglicht, Probleme rein konstruktiv zu lösen.

Das Ziel ist es, allgemein einen kurzen Einblick in die Projektive Geometrie zu geben und speziell den Steinerkreis und dessen Anwendung näher zu beschreiben.

Zu Beginn werden der historische Hintergrund der Geometrie, sowie deren "Erfinder" beschrieben. Weiters werden die Voraussetzungen für die Verwendung des Steinerkreises angeführt, die verschiedene Axiome umfassen. So wird zu Beginn der Aufbau der projektiven Ebene beschrieben und nach und nach werden Sätze eingeführt, um diese einzuschränken und so zur projektiv abgeschlossenen Anschauungsebene zu gelangen, in der mit dem Steinerkreis gearbeitet werden kann. Darüber hinaus wird auch die Erzeugung eines solchen Kreises beschrieben und erklärt.

Abschließend werden vier Anwendungsbeispiele behandelt und analysiert, sodass die Anwendung des Steinerkreises in der Projektiven Geometrie veranschaulicht wird.

The topic of this field work is the so called "Steinerkreis". It is a tool used in projective geometry in order to solve problems only by constructing them.

The aim is to provide an outline of the projective geometry in general and to describe the usage of the "Steinerkreis" specifically.

At the beginning the author briefly describes the historical background of geometry and their inventors, as well as, the requirements for the usage of the "Steinerkreis", which include various axioms. Furthermore, the setup of the projective plane is presented and gradually theorems are getting introduced to limit the plane to the augmented affine plane, in which we are able to work with the "Steinerkreis". Additionally, also the constructing process of this circle is explained.

Concluding, four application examples are discussed and analysed to demonstrate the utilization of the "Steinerkreis" in projective geometry.

Inhaltsverzeichnis

Abstract	3
Vorwort	5
1 Historisches zur Projektiven Geometrie	6
2 Einführung in die Projektive Geometrie	13
2.1 Das Axiom von Desargues	15
2.2 Das Axiom von Pappos	17
3 Projektivitäten	18
3.1 Projektive Perspektivitäten	18
4 Kegelschnitte	23
4.1 Peripheriewinkelsatz	25
5 Pascals Theorem	27
6 Anwendung des Steinerkreises auf Projektivitäten	29
6.1 Aufgabe 1	29
6.2 Aufgabe 2	32
6.3 Aufgabe 3	34
6.4 Aufgabe 4	38
7 Fazit	40
Anhang	45

Vorwort

Ausschlaggebend für meine Entscheidung eine Fachbereichsarbeit zu schreiben war die Teilnahme am VWA-Kurs. In diesem Kurs lernte ich nicht nur das richtige Erstellen einer solchen Arbeit, sondern er nahm mir auch die Angst davor.

Die FBA über ein Thema der Darstellenden Geometrie zu schreiben, war mir ein großes Anliegen. Dahingehend habe ich auch an meiner Schule die Möglichkeit wahrgenommen, zum DG-Zweig zu wechseln. Darüber hinaus arbeitete ich in den Sommerferien 2013 auch als Praktikant an der TU Graz am DG-Institut, wo ich sehr viel Neues lernte. Die Themenwahl fiel schon etwas schwieriger aus, da es sehr viele Gebiete gibt, die in meinem Interessenbereich liegen. Nach reiflicher Überlegung und der Diskussion mit Herrn Mag. Stuhlpfarrer kam ich dann zu dem Entschluss, den Steinerkreis zu beschreiben. Der Steinerkreis fasziniert mich einerseits, weil er dabei hilft, scheinbar schwierige Aufgaben der Projektiven Geometrie mit einfachen Mitteln zu lösen, andererseits, da er sehr anschauliche Beispiele liefert.

Mein Ziel ist es, sowohl die Projektive Geometrie als auch die Anwendung des Steinerkreises in dieser FBA so zu erklären, dass sie für jeden mit nur geringem Vorwissen verständlich werden. Außerdem ist es mir ein Anliegen, einen Einblick in ein Thema zu geben, das nicht jedem bekannt ist und es nicht nur trocken zu erklären, sondern vielleicht, durch diverse Anwendungsbeispiele und anschaulichen Skizzen, sogar etwas schmackhaft zu machen.

An dieser Stelle möchte ich mich auch für die tatkräftige Unterstützung von Herrn Mag. David Stuhlpfarrer bedanken, den ich immer fragen konnte und der mir sogar seine Studienunterlagen bereitgestellt hat. Herzlicher Dank gebührt auch Herrn Ao.Univ.-Prof. Mag.rer.nat. Dr.techn. Anton Gfrerrer, der sowohl im Praktikum als auch danach immer wieder Zeit aufbrachte, um mich bei der Literatursuche und dem Arbeiten mit $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ zu unterstützen.

1 Historisches zur Projektiven Geometrie

Beginnen wir ganz am Anfang der Geometrie, um die späteren Vorgänge nachvollziehen zu können. Ausgehend von Euklid, der als Erster Grundregeln, sogenannte Axiome oder Postulate, für die Anwendung der Geometrie festlegte, wurde selbige erstmals strukturiert. Er definiert in seinem vor 2300 Jahren erschienenen Werk „Elemente“, das 13 Bände enthält und die Arbeiten anderer Mathematiker, wie zum Beispiel Pythagoras oder Thales, zusammenfasst, Begriffe wie Punkt, Gerade und Parallele und stellt fünf Postulate auf.¹

Sie besagen, dass:

1. man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann.
2. man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann.
3. man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann.
4. alle rechten Winkel einander gleich sind.
5. wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei rechte werden, dann treffen sich die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei rechte sind.²

Die ersten vier Punkte sind leicht einzusehen. Der letzte und fünfte Punkt aber ist ohne passende Skizze (siehe Abbildung 1) nur schwer zu verstehen. Des Weiteren ist er der Grund für die Weiterentwicklung der Geometrie.

Wegen mangelnder Eleganz war das Parallelenpostulat Euklids lange umstritten. Zuerst wurde versucht es neu und besser zu formulieren (Proclus (410-485), Clavius (1537-1612), Clairaut (1713-1765), Simson (1687-1768) und Playfair (1748-1819)), doch das führte zu keiner befriedigenden Lösung. Proclus stellte zum Beispiel eine Forderung auf, die äquivalent zum fünften Postulat ist und auch in der heutigen Schulgeometrie Verwendung findet.³

¹Vgl. [3] Christmann, N. (21.10.2007): "Was ist (war) Geometrie?", Uni Kaiserslautern, URL:<http://www.mathematik.uni-kl.de/~nchrist/PG2008/para0WasistwarGeometrie.pdf>, (5.1.2014)

²[1] Lind, D. (11.4.2007): "Nichteuklidische Geometrie", Uni Wuppertal, URL:
http://www2.math.uni-wuppertal.de/~lind/NE_Skript.pdf, S. 3 (13.12.2013)

³Vgl. [2] Kasten, H. (13.11.2013): "Einführung in die Geometrie", Universität Heidelberg, URL:
<http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~kasten/files/Skripte/ws1112geom.pdf>, (31.12.2013)

So postuliert er:

Gegeben eine Gerade und ein nicht auf dieser Geraden liegender Punkt, dann gibt es genau eine Parallele zu dieser Geraden durch den gegebenen Punkt.⁴

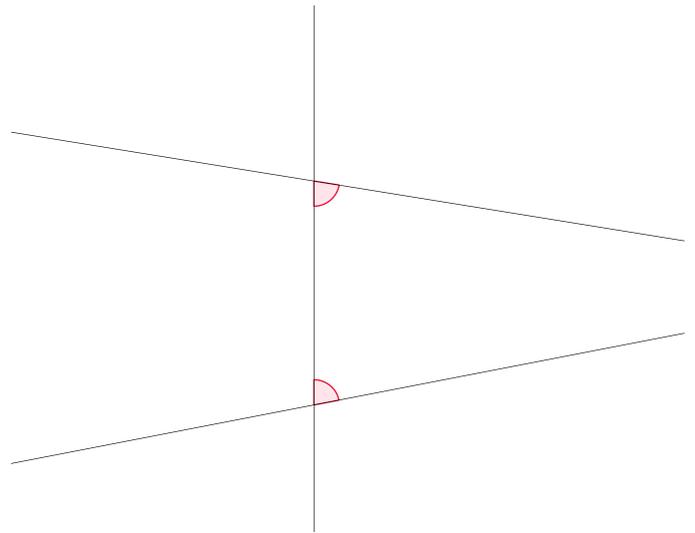


Abbildung 1: Parallelenpostulat von Euklid

Später vertraten einige Mathematiker, Saccheri (1667-1733), Lambert (1728-1777) und Legendre (1752-1833), die Auffassung, man könne das fünfte Postulat aus den ersten vier herleiten. Sie bezeichneten das Postulat als falsch und versuchten einen Widerspruch zu eruieren, doch auch damit lösten sie das Problem nicht. Trotzdem wurden einige Beweise für Dreiecke erbracht. So bewies Adrien-Marie Legendre zum Beispiel, dass die Innenwinkelsumme eines Dreiecks immer die zweier rechter Winkel ist, also 180° .

Erst knapp 2000 Jahre nach der Entstehung der euklidischen Geometrie schafften es Gauß, Bolyai und Lobatschewski, eine Lösung für dieses Problem zu finden.

Johann Carl Friedrich Gauß war der erste Mathematiker, der einen konkreten Ansatz hatte. Er beschäftigte sich damit schon, als er fünfzehn Jahre alt war. Bis er 36 wurde, machte jedoch sogar er nur wenig Fortschritte. Erst 1817 (40-jährig) hatte Gauß die Idee, das fünfte Postulat unabhängig von den anderen zu betrachten, und er stellte sich eine Geometrie vor, in der es zu einer Geraden und einem sich nicht auf dieser befindlichen Punkt mehr als eine Parallele gibt. Er behielt seine Schriften aber für sich und ließ sie unveröffentlicht, denn damals schickte es sich nicht, sich mit diesem Problem auseinanderzusetzen.

Farkas Bolyai, ein ungarischer Mathematiker, beschäftigte sich ebenfalls mit dem fünften Postulat Euklids. Auch er scheiterte wie viele andere vor ihm und gab so seinem Sohn, Janos Bolyai, den Rat,

Farkas Bolyai, ein ungarischer Mathematiker, beschäftigte sich ebenfalls mit dem fünften Postulat Euklids. Auch er scheiterte wie viele andere vor ihm und gab so seinem Sohn, Janos Bolyai, den Rat,

⁴[1] Lind, D. (2007): "Nichteuklidische Geometrie", S. 3

sich nicht damit zu befassen. Doch dieser hörte nicht auf seinen Vater zu Gunsten der Weiterentwicklung der Geometrie. Denn er schaffte es, gleich wie Gauß, eine Lösung zu finden, indem er das fünfte Postulat als unabhängig von den anderen betrachtete. Der Unterschied zu Gauß war, dass er seine "Fremde neue Welt", wie er die neue, nichteuklidische Geometrie nannte, 1825 veröffentlichte. Wenige Jahre darauf, 1829, publizierte auch ein russischer Mathematiker, Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski, eine Arbeit über die "neue Geometrie".

Alle diese Arbeiten fanden jedoch sehr wenig Anklang in der Mathematiker-Gemeinde, da diese noch nicht reif für solch revolutionäre Ideen war.⁵

Lobatschewski erklärt die Funktionsweise der nichteuklidischen Geometrie so:

Alle Geraden, die in einer Ebenen von einem Punkt ausgehen, können bezüglich einer (nicht durch diesen Punkt gehenden Geraden) in zwei Klassen eingeteilt werden – in schneidende und nichtschneidende. Die Grenzgeraden dieser Klassen sollen Parallelen zur gegebenen Geraden genannt werden.⁶

Um die in Worte gefasste Erklärung besser nachvollziehen zu können, folgende Skizze:

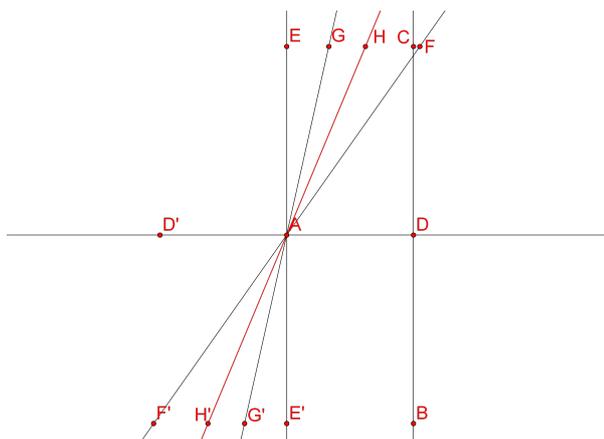


Abbildung 2: Lobatschewskis Modell der nichteuklidischen Geometrie

⁵Vgl. [1] Lind, D. (2007): "Nichteuklidische Geometrie"

⁶[1] Lind, D. (2007): "Nichteuklidische Geometrie", S. 6

- AD ist eine Senkrechte von A auf BC .
- AE ist senkrecht zu AD .
- Innerhalb des Winkels EAD treffen einige Geraden (wie AF) auf die Gerade BC .
- Angenommen AE ist nicht die einzige Gerade die BC nicht schneidet.
- Sei AG eine weitere solche.
- AF ist eine schneidende und AG eine nichtschneidende.
- Es muss eine Grenze zwischen *schneidenden* und *nichtscheidenden* geben und wir nehmen an, dass AH diese Grenze ist.⁷

Dies entspricht dem Ersetzen des fünften Postulats von Euklid durch Folgendes:

*"Zu einer gegebenen Geraden und einem nicht darauf liegenden Punkt gibt es zwei Parallelen durch diesen Punkt."*⁸

Bei weiterer Betrachtung trigonometrischer Eigenschaften dieser Geometrie zeigt sich, dass die euklidischen Beziehungen ein Grenzfall dieser sind und zwar genau dann, wenn die Dreiecksseitenlängen gegen null gehen.

Darauf folgten viele Mathematiker, die diese Geometrie immer weiter entwickelten und verbesserten. Einer der Ersten war Georg Friedrich Bernhard Riemann. Er war ein Schüler von Gauß und schrieb unter dessen Aufsicht seine Dissertation. In seiner ersten Vorlesung erwähnte er unter anderem die sphärische Geometrie. Hierbei wird als „Zeichenebene“ keine normale Ebene angenommen, sondern eine Kugeloberfläche.

⁷[1] Lind, D. (2007): "Nichteuklidische Geometrie", S. 6

⁸[1] Lind, D. (2007): "Nichteuklidische Geometrie", S. 6

Felix Klein untersuchte 1871 die bestehenden Geometrien und kam zum Schluss, dass sie sich in drei Gruppen gliedern lassen:

- Beim Bolyai-Lobatschewskischen Typ besitzt jede Gerade AB zwei „unendlich ferne“ Punkte U und V .
- Beim Riemannschen sphärischen Geometrietyp besitzen Geraden keine (bzw. zwei imaginäre) unendlich ferne Punkte.
- Die euklidische Geometrie ist ein Grenzfall, bei dem die unendlich fernen Punkte zusammenfallen.⁹

Klein entwickelte selbst ein Modell zur nichteuklidischen Geometrie.

Da Kleins Modell jedoch Mängel in der Winkelmessung aufwies, verbesserte Henri Poincaré jenes und entwickelte somit die ebene hyperbolische Geometrie. In der hyperbolischen Geometrie gibt es zu jeder Geraden g unendlich viele Parallelen, die durch einen Punkt P gehen, der nicht auf g liegt.

Poincaresche Halbebene (siehe Abbildung 3): Die blaue Gerade g ist sowohl zur grünen h als auch zur roten i parallel. h und i gehen durch den Punkt P , wobei gilt $P \notin g$.

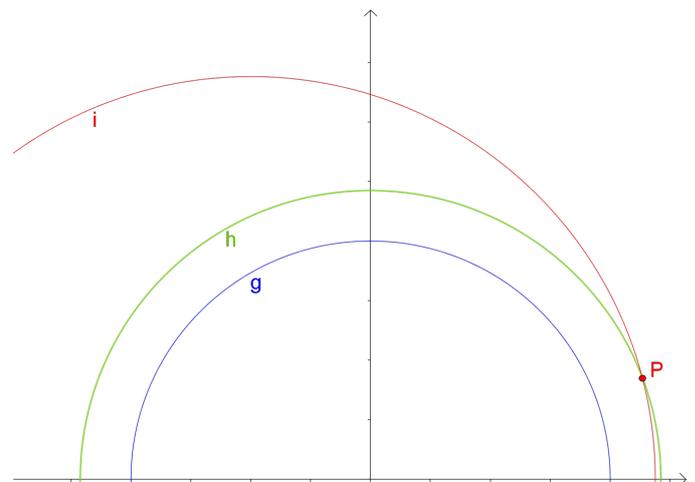


Abbildung 3: Poincaresche Halbebene

Je nach Radius des Kreises ergeben sich unendlich viele weitere Parallelen.¹⁰

⁹[1] Lind, D. (2007): "Nichteuklidische Geometrie", S. 7

¹⁰Vgl. [1] Lind, D. (2007): "Nichteuklidische Geometrie", S. 8

Einerseits, um die verschiedenen Geometrien auf einen Nenner zu bringen und übersichtlich zu machen, andererseits, da die Kunst großen Einfluss auf die Entwicklung einer Zeichenart hatte, mit der man etwas perspektivisch darstellen konnte, entwickelte man die Projektive Geometrie.

David Hilbert war ein Vorreiter der projektiven Geometrie. Er entwickelte mit Hilfe von eigenen Axiomen aus der euklidischen Geometrie eine, die der projektiven sehr nahe ist. Mit wenigen Axiomen und ohne Definitionen der Elemente. So konnte in seiner Geometrie alles eine Gerade sein, ob es nun ein Kreis wie bei Poincare ist oder eine Kurve. Hilbert gliederte seine Axiome in fünf Gruppen:

1. Inzidenzaxiome (geben Aufschluss über das Schneiden von Geraden)
2. Axiome der Zwischenrelation (geben Aufschluss über die Anordnung von Punkten auf Geraden)
3. Axiome der Bewegung (geben Aufschluss über die Kongruenz von Geraden und wie man sie zur Kongruenz bringt)
4. Parallelenaxiom (wird von der euklidischen Geometrie übernommen: Zu jeder Geraden g und einem nicht auf dieser liegenden Punkt P gibt es eine Gerade h , die mit P inzidiert und zu g parallel ist)
5. Stetigkeitsaxiom (wird benötigt, um die Vollständigkeit der Anschauungsebene zu garantieren. Es gibt Aufschluss über die Stetigkeit (Lückenlosigkeit) der Geraden.)¹¹

Mit diesen wenigen Axiomen schaffte es Hilbert, eine abgeschlossene Anschauungsebene zu erzeugen. Wichtig in seinem Werk "Grundlagen der Geometrie" sind die *Widerspruchsfreiheit* und die *Unabhängigkeit* als Forderung an die Modelle. Die Widerspruchsfreiheit besagt, dass eine Aussage und ihr Negat nicht zugleich ableitbar sind. Die Unabhängigkeit sagt, dass es durch das Weglassen eines Axioms zu einer Ausweitung des Modellvorrats kommt. Später wurde diese Geometrie weiter untersucht. Axiome wurden weggelassen und man versuchte trotzdem eine abgeschlossene Anschauungsebene zu bekommen.¹²

¹¹[3] Christmann, N. (2007): "Was ist (war) Geometrie?", S. 26-29

¹²Vgl. [3] Christmann, N. (2007): "Was ist (war) Geometrie?"

Die Projektive Geometrie ist nun eine Verallgemeinerung. Sie wurde zur Ausnahmebeseitigung eingeführt. Während es bei der affinen Geometrie beim Schneiden von Unterräumen Fallunterscheidungen gibt (z.B.: zwei Geraden können sich schneiden oder parallel sein), schließt man diese in der projektiven aus. Durch Einführen uneigentlicher Punkte, sogenannter *Fernpunkte*, entfällt die Unterscheidung, da sich nun alle Geraden zumindest im Unendlichen schneiden. Des Weiteren basiert die Projektive Geometrie nur auf drei Axiomen, die im nächsten Kapitel näher besprochen werden. Als Begründer gelten Jean Victor Poncelet und Joseph Gergonne. Sie griffen auf Vorarbeiten anderer Mathematiker, wie Desargues, Monge, Carnot, Brianchon und Staudt zurück. Da fast alle diese aus dem 19. Jahrhundert stammen, wurde auch die Projektive Geometrie hauptsächlich in dieser Zeit entwickelt.¹³

¹³Vgl. [3] Christmann, N. (2007): "Was ist (war) Geometrie?"

2 Einführung in die Projektive Geometrie

Wie oben schon erwähnt, basiert die Projektive Geometrie auf drei Axiomen.

Bevor man aber mit den Axiomen arbeiten kann, ist es notwendig, gewisse Mengen zu definieren.

Es gibt die Menge $\Pi := \{P, Q, \dots\}$, die man Menge aller Punkte nennen kann. Dann gibt es die Menge $\Gamma := \{g, h, \dots\}$, die man Menge aller Geraden nennen kann. Weiters sei eine binäre Relation I zwischen Punkten und Geraden definiert. Sie ist eine Teilmenge der Menge $\Pi \times \Gamma$ und heißt "Inzidenz". Sie wird zum Beispiel so beschrieben: $P I g$ lies: der Punkt P inzidiert mit der Geraden g . Wenn diese Relation nicht besteht, schreibt man folgendermaßen $P \not I g$. Nun kann man die Axiome definieren:¹⁴

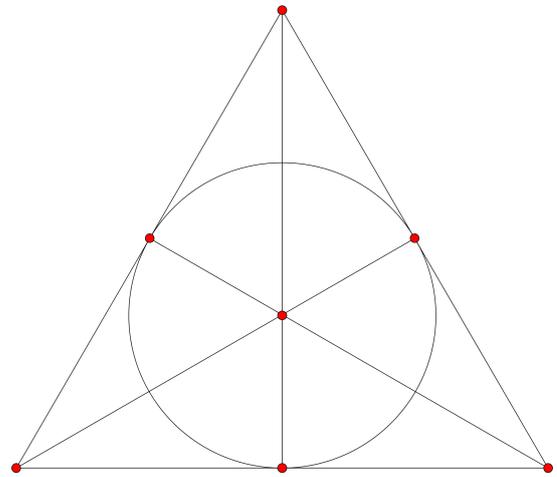


Abbildung 4: Minimalmodell

- EP1: Sind P und Q zwei verschiedene Punkte, dann gibt es genau eine Gerade g , die mit P und Q inzidiert.
[Man sagt] dann: g ist die "Verbindungsgerade von P und Q " und [schreibt] $g = PQ$.
- EP2: Sind g und h zwei verschiedene Geraden, dann gibt es genau einen Punkt S mit $S I g$ und mit $S I h$.
[Man sagt] dann: S ist der "Schnittpunkt" der beiden Geraden $g; h$ und [schreibt] $S = g \cap h$.
- R2: Es gibt 4 Punkte $P_1; P_2; P_3; P_4$, von denen je drei nicht mit einer gemeinsamen Geraden inzidieren (Reichhaltigkeitsaxiom).¹⁵

¹⁴Vgl. [4] Gferrer, A.; Lang, J. (2012): "Projektive Geometrie", 2. Auflage, TU Graz, Skriptum

¹⁵[4] Gferrer, A.; Lang, J. (2012): "Projektive Geometrie", S. 3

Mit diesen drei Axiomen ist die "projektiv abgeschlossene Anschauungsebene", unter Hinzunahme der Fernelemente (Fernpunkte, Ferngerade), definiert. Da die Anzahl der Axiome sehr niedrig ist, gibt es eine große Vielfalt an verschiedenen Modellen, die man mit Hilfe dieser Anschauungsebene darstellen kann. Das einfachste Modell dieser Ebene, das sogenannte *Minimalmodell* (siehe Abbildung 4), besteht aus sieben Geraden und sieben Punkten. Es erfüllt alle Axiome und hat die geringste Anzahl an Elementen, die dafür notwendig sind. Die Darstellungsweise dieses Systems zeigt, dass eine Gerade auch andere Formen als in der euklidischen Geometrie annehmen kann (in diesem Fall einen Kreis).

Wie oben erwähnt, lässt die geringe Anzahl an Axiomen großen Spielraum zu. Um aber gewisse Werkzeuge, wie den Steinerkreis, anwenden zu können, braucht es ein paar Einschränkungen mehr. Um genau zu sein, zwei. Auf diese zwei wird nun eingegangen.

2.1 Das Axiom von Desargues

Das von Gerard Desargues aufgestellte Axiom lautet:

Gegeben seien ein Punkt Z und zwei Dreiecke A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 so, dass jeweils die folgenden Punkte kollinear sind:

- Z, A_1, A_2
- Z, B_1, B_2
- Z, C_1, C_2 ¹⁶

Zwei solche Dreiecke heißen Z -Perspektiv.¹⁷

Die folgende Abbildung zeigt solche Z -perspektiven Dreiecke:

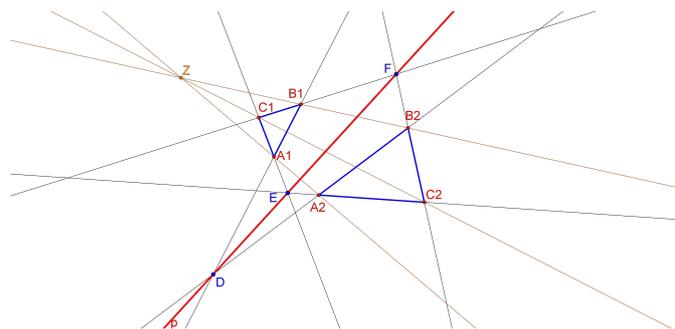


Abbildung 5: Z -perspektive Dreiecke

Wenn man die Seiten der Dreiecke (blau) bis zum Schnitt (schwarz) verlängert, ergeben sich drei Punkte, die alle auf einer Geraden p liegen. Diese Gerade ist in Abbildung 5 rot gekennzeichnet.

¹⁶[4] Gferrer, A.; Lang, J. (2012): "Projektive Geometrie", S. 9

¹⁷Vgl. [4] Gferrer, A.; Lang, J. (2012): "Projektive Geometrie"

Wenn das Axiom von Desargues (De) gilt, kann man davon ausgehen, dass man sich in einer Ebene befindet, in welcher alle Geraden immer in gleicher Relation zueinander stehen. Ein Gegenbeispiel einer solchen Ebene ist das "Moulton-Modell". Es erfüllt die ersten drei Axiome, das von Desargues jedoch nicht. In dieser Ebene machen alle Geraden mit positiver Steigung a an der y -Achse einen "Knick". Das heißt, die Steigung wird um den Faktor $\frac{1}{2}$ verringert, sobald sie die Ordinate passieren. Alle Geraden mit negativer Steigung b bleiben beim Passieren aber unverändert (siehe Abbildung 6).¹⁸

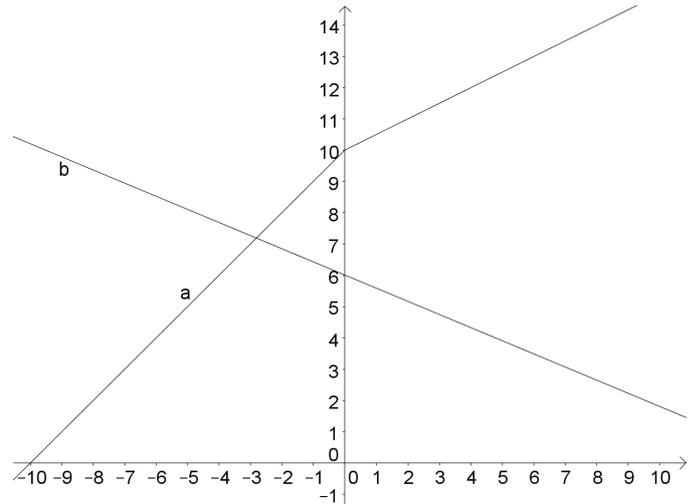


Abbildung 6: Moulton-Ebene

¹⁸Vgl. [5] "Moulton-Ebene" (3.9.2013): Wikipedia, URL: de.wikipedia.org/wiki/Moulton-Ebene, (8.1.2014)

2.2 Das Axiom von Pappos

Dieses Axiom ist eine Erweiterung der bereits erwähnten anderen. Es ist darüber hinaus das letzte, das benötigt wird, um die Anwendung des Steinerkreises zu bewerkstelligen.

Der Satz von Pappos wurde vor dem Axiom von Desargues aufgestellt und ist nicht so allgemein gültig. Daher gibt es Ebenen, die desarguessch aber nicht pappossch sind (Hamilton'sche Quaternionen). Dieses Kapitel ist aber zu weitläufig, um es in dieser Arbeit genauer anzuführen.

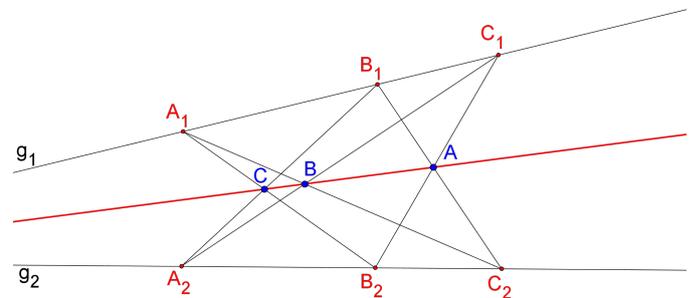


Abbildung 7: Das Axiom von Pappos

Der Satz von Pappos (siehe Abbildung 7) besagt Folgendes:

Zu drei kollinearen Punkten $A_1, B_1, C_1 | g_1$ und drei weiteren kollinearen Punkten $A_2, B_2, C_2 | g_2$ gilt stets:

*Die Punkte $A = B_1C_2 \cap C_1B_2$, $B = C_1A_2 \cap A_1C_2$ und $C = A_1B_2 \cap B_1A_2$ sind kollinear.*¹⁹

Diese Aussage gilt in der projektiv abgeschlossenen Anschauungsebene. Sie ist aber unabhängig von den anderen drei Axiomen und kann deshalb nur hinzugefügt werden. Eine Ebene, in der dieses Axiom gilt, heißt "Pappos-Ebene".

Das Wichtigste am Satz von Pappos ist, dass es, wenn er gilt, höchstens zwei Fixstrahlen in einer Projektivität gibt. In diesem Fall ist es wichtig für die Bestimmung dieser Strahlen mit Hilfe des Steinerkreises. Was eine Projektivität ist und wie der Steinerkreis funktioniert, wird in den weiteren Kapiteln erörtert.²⁰

¹⁹[4] Gfrerrer, A.; Lang, J. (2012): "Projektive Geometrie", S. 14

²⁰Vgl. [4] Gfrerrer, A.; Lang, J. (2012): "Projektive Geometrie"

3 Projektivitäten

Als Projektivität bezeichnet man eine Abbildung zwischen zwei Grundgebilden 1. Stufe (Strahlbüschel, Punktreihe), wenn sie Produkt von endlich vielen Perspektivitäten ist.²¹

Um nun nachvollziehen zu können, was eine Projektivität ist, werden zuerst die Perspektivitäten erläutert.

3.1 Projektive Perspektivitäten

Eine Perspektivität in der projektiven Ebene besitzt folgende Eigenschaften:

- Es gibt ein Zentrum Z (ein Punkt der projektiven Ebene).
- Alle Geraden, die durch das Zentrum gehen, sind Fixgeraden der Perspektivität.
- Sie ist bijektiv.²²

Aus diesen Eigenschaften ergeben sich verschiedene Formen von Perspektivitäten.

Die Abbildung π einer Punktreihe $a(X)$ auf ein Geradenbüschel $A(x)$ heißt Perspektivität, wenn gilt (siehe Abbildung 8):

$$\pi(x) \mid X \text{ (lies } \pi \text{ von } x \text{ indiziert mit } X)$$

Dazu gibt es auch die duale Abbildung, die mit π^{-1} bezeichnet wird und die das Geradenbüschel $A(x)$ auf die Punktreihe $a(X)$ abbildet (siehe Abbildung 8).²³

Wenn dies der Fall ist, sagt man:

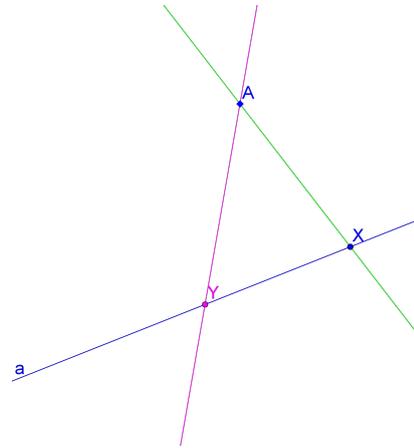


Abbildung 8: Perspektivität: Geradenbüschel auf Punktreihe

²¹Vgl. [6] Stuhlpfarrer, D. (1997/1998): Studienunterlagen zu Vorlesungen zur Projektiven Geometrie, S. 22

²²Vgl. [8] "Projektive Perspektivitäten" (19.11.2013): Wikipedia, URL:

http://de.wikipedia.org/wiki/Projektive_Perspektivität, (4.2.2014), [6]Stuhlpfarrer, D. (1997/1998): S. 22

²³Vgl. [6] Stuhlpfarrer, D. (1997/1998): S. 21

“Die Punktreihe $a(X)$ und das Strahlbüschel $A(x)$ liegen zueinander perspektiv.” ²⁴

Ebenso können zwei Punktreihen $g_1; g_2$ zueinander perspektiv liegen, wenn sie zum selben Strahlbüschel Z (Zentrum) perspektiv liegen (siehe Abbildung 9).

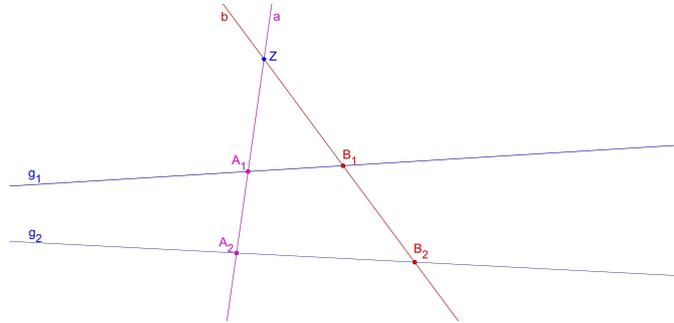


Abbildung 9: Perspektivität zwischen Punktreihen

Dual dazu können auch zwei Geradenbüschel $G_1; G_2$ perspektiv sein, wenn sie zur selben Punktreihe a perspektiv liegen (siehe Abbildung 10).

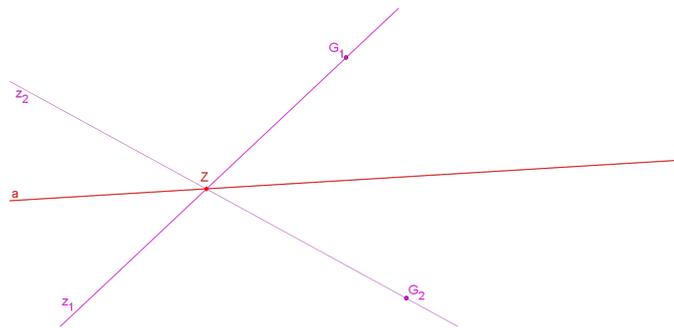


Abbildung 10: Perspektivität zwischen Geradenbüscheln

Wie im ersten Satz dieses Kapitels schon erwähnt, ist eine Projektivität nun eine Aneinanderreihung von Perspektivitäten. So kann man zum Beispiel eine Punktreihe g_1 auf eine andere g_2 durch das Zentrum S_1 abbilden und diese dann weiter auf ein Strahlbüschel S_2 (siehe Abbildung 11).

²⁴[6] Stuhlpfarrer, D. (1997/1998): S. 21

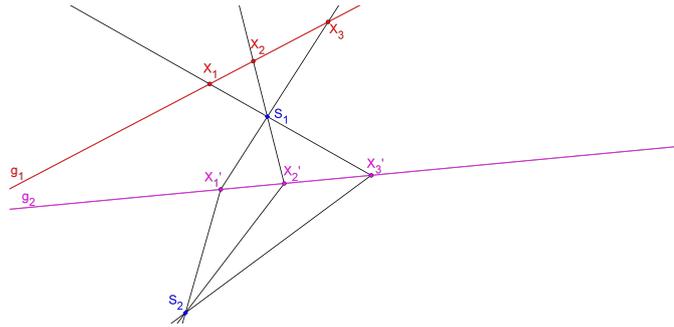


Abbildung 11: Projektivität

Besondere Projektivitäten sind die sogenannten **Autoprojektivitäten** (siehe Abbildung 12), die ein Grundgebilde erster Stufe auf sich selbst abbilden. Der Steinerkreis ist ein Werkzeug der Projektiven Geometrie, der dabei hilft, Autoprojektivitäten zu vervollständigen.

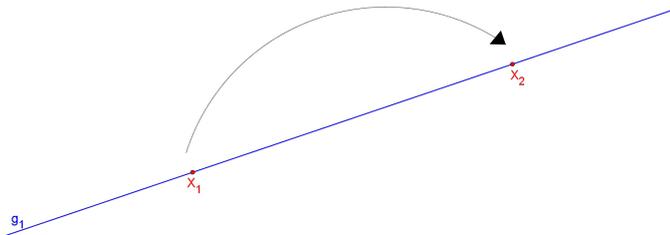


Abbildung 12: Autoprojektivität einer Punktreihe $g(X)$

Eine Sonderform einer Autoprojektivität ist eine sogenannte **Involutionen**. Involutionen sind selbst inverse Autoprojektivitäten, das heißt, wenn man eine Involution zweimal hintereinander anwendet, so erhält man die identische Abbildung. Ein Beispiel dafür ist die Spiegelung an einem Punkt. Zur Behandlung von Involutionen in der projektiv abgeschlossenen Anschauungsebene zeigt sich der Begriff des *harmonischen Punktequadrupels* als sehr nützlich. Ein Punktequadrupel A, B, C, D heißt genau dann harmonisch (man schreibt $AB \text{ H } CD$), wenn ein Viereck $\{1, 2, 3, 4\}$ existiert, sodass A und B Diagonalepunkte sind, die sich durch den Schnittpunkt der Verlängerung der Seiten mit g ergeben, und C und D auf je einer Gegenseite des Vierecks durch den dritten Diagonalepunkt liegen (sich also aus der Verlängerung der Diagonalen mit dem Schnittpunkt auf g ergeben). Dabei sind A, B, C, D kollinear und $A, B, C, D \perp g$ (siehe Abbildung 13).

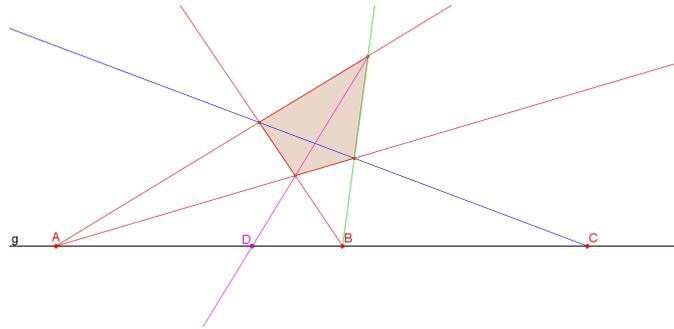


Abbildung 13: Harmonisches Punktequadrupel

Gegeben sind die Punkte A, B, C . Es werden zwei Strahlen konstruiert, die mit A inzidieren (rot). Weiters wird ein Strahl (rot), der mit B inzidiert, konstruiert. Durch einen Schnittpunkt mit einem Strahl von A und dem von B wird nun ein weiterer (blau) konstruiert, der durch den Schnittpunkt und C verläuft. Dieser Strahl (blau) hat nun auch einen weiteren Schnittpunkt mit dem anderen Strahl durch A . Durch B und diesen Schnittpunkt wird wiederum ein Strahl (grün) konstruiert. Wenn man nun bei dem durch dieses Verfahren erzeugten Viereck die letzte noch ausständige Diagonale (lila) einzeichnet und mit g schneidet, erhält man den gesuchten Punkt D .

Mit diesem Vorwissen kann man nun auch die Involution erklären:

- (a) Eine Autoprojektivität α ist genau dann eine *Involution*, wenn zwei Punkte $A \neq B \in g$ existieren mit $\alpha(A) = B$ und $\alpha(B) = A$.
- (b) Wenn α eine hyperbolische Involution mit Fixpunkten $F \neq G$ ist, dann gilt $\forall X \in g: FG \cap X\alpha(X)$.
- (c) Eine Involution ist entweder hyperbolisch oder elliptisch und sie ist durch 2 Punkte $A \neq B$ und deren Bilder $A' \neq B'$ eindeutig bestimmt, sofern $B \neq A'$ und $A \neq B'$.²⁵

Die plakativste Involution σ ist jene, bei der es einen Fixpunkt G_u gibt, der auf der Geraden g liegt und gleichzeitig deren Fernpunkt ist. Wenn das der Fall ist, so gibt es noch einen eigentlichen Punkt 0 , der mit g inzidiert und für den $\sigma(0) = 0$ gilt. Alle anderen Punkte werden nun um diesen Punkt 0 gespiegelt, da $X\sigma(X) \cap 0G_u$ ist (siehe Abbildung 14).²⁶

²⁵[6] Stuhlpfarrer, D. (1997/1998): S. 70

²⁶Vgl. [7] Baur, A. (1961): "Einführung in die Projektive Geometrie", Teil 1, Hrsg. Ernst Klett Verlag, Stuttgart

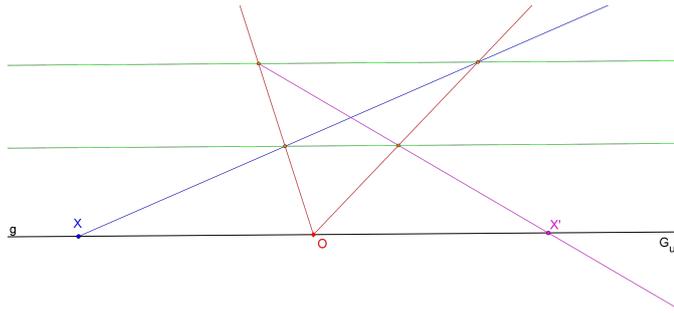


Abbildung 14: Involution σ als Spiegelung

Um den Punkt X um O auf X' zu spiegeln, muss man wie folgt vorgehen:

Zuerst wählt man einen beliebigen Punkt X auf g . Dann zieht man durch den Fernpunkt G_u in beliebigen Abstand zwei nicht gleiche Geraden (sie sind parallel, da wir uns in der projektiv abgeschlossenen Anschauungsebene befinden [grün]). Darauf zieht man wiederum durch den Punkt X eine beliebige Gerade (blau), die die beiden von G_u in jeweils einem Punkt schneidet. Durch die zwei entstandenen Schnittpunkte erzeugt man nun zwei Geraden, die mit den Schnittpunkten $X \cap G_u$ und O kollinear sind. Dabei entstehen wieder zwei Schnittpunkte mit den Geraden von G_u . Zieht man durch diese beiden eine Gerade, ist der Schnittpunkt mit g und der Geraden (pink) der gesuchte Punkt X' .

Es gibt ebenfalls noch einen zweiten Fall der Involution, bei dem G_u kein Fixpunkt von σ ist. Er wird in dieser Arbeit jedoch nicht näher behandelt.

4 Kegelschnitte

Ein Kegelschnitt ist in der projektiv abgeschlossenen Anschauungsebene folgendermaßen definiert:

Seien $S_1(x_1)$ und $S_2(x_2)$ zwei Strahlbüschel, $\tau : S_1(x_1) \rightarrow S_2(x_2)$ eine Projektivität.

Dann [versteht man] unter dem Kegelschnitt (S_1, S_2, τ) die Menge von Schnittpunkten von entsprechenden Strahlen.

$$K(S_1, S_2, \tau) := \{x = x_1 \cap x_2 \mid x_i \in S_i, x_2 = \tau(x_1)\}^{27}$$

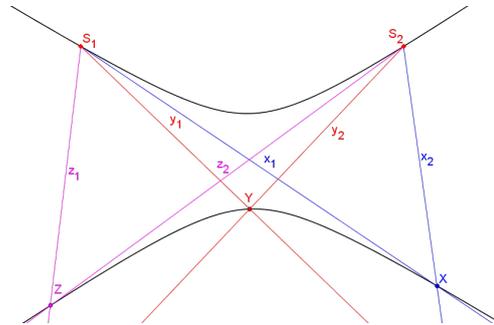


Abbildung 15: Hyperbel in der projektiv abgeschlossenen Anschauungsebene

Diese Definition wurde 1832 von Jakob Steiner, dem "Erfinder" des Steinerkreises gegeben.²⁸

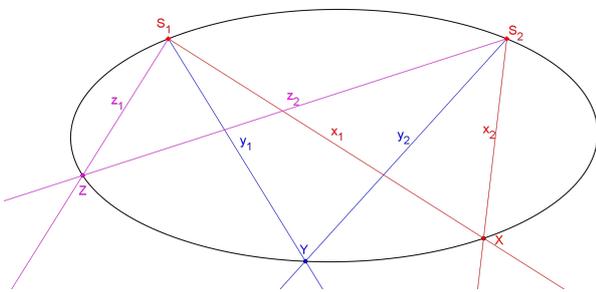


Abbildung 16: Ellipse in der projektiv abgeschlossenen Anschauungsebene

Ein Kegelschnitt ist durch die beiden Punkte $S_1; S_2$, die *Grundpunkte* davon sind, und die Projektivität τ eindeutig bestimmt.

Es ist nun egal, ob man eine Ellipse, eine Hyperbel oder eine Parabel in der projektiven Anschauungsebene konstruieren will, man benötigt nur zwei Strahlbüschel, die projektiv sind (nicht das gleiche Zentrum haben), und schneidet in der Projektivität einander entsprechende Strahlen miteinander, sodass sich zu S_1 und S_2 noch drei weitere Punkte X, Y, Z ergeben.

Mit fünf Punkten ist ein Kegelschnitt bestimmt, soweit drei dieser Punkte nicht kollinear sind (siehe Abbildung 15/16).²⁹

²⁷[6] Stuhlpfarrer, D. (1997/1998): S. 103

²⁸Vgl. [9] Brauner, H. (1976): "Geometrie projektiver Räume I", Hrsg. Wissenschaftsverlag Bibliographisches Institut, Zürich

²⁹Vgl. [6] Stuhlpfarrer, D. (1997/1998): S. 103

Man kann außerdem zwischen drei Arten von Geraden unterscheiden:

1. Jene, die den Kegelschnitt nicht schneiden und somit Passanten sind.
2. Jene, die den Kegelschnitt genau in einem Punkt (Berührungspunkt) schneiden und somit Tangenten des KS sind.
3. Jene, die den Kegelschnitt in zwei Punkten schneiden und somit Sehnen sind.

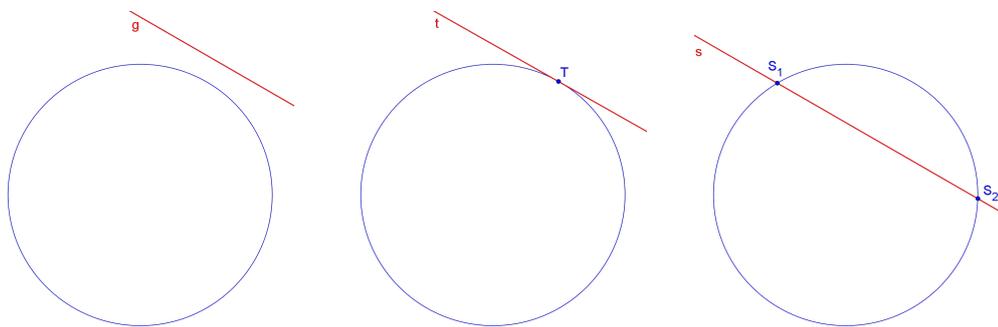


Abbildung 17: Nichtschneidende Gerade, Tangente und Sehne eines Kegelschnitts

Auch der Kreis ist gleich definiert, da er ein Spezialfall einer Ellipse ist. Um in der projektiven Ebene aber einen Kreis zu erzeugen, bedarf es noch des Peripheriewinkelsatzes.

4.1 Peripheriewinkelsatz

Der Peripheriewinkelsatz besagt, dass:

*Alle Peripheriewinkel in der gleichen Halbebene über dem gleichen Kreisbogen gleich groß sind.*³⁰

Wenn man den Zentri-Peripherie-Winkelsatz zu Hilfe nimmt, kann man diesen Satz auch beweisen. Die beiden Winkel β und β_1 sind Peripheriewinkel zu α . Beide sind halb so groß wie α und daher untereinander gleich groß (siehe Abbildung 18).³¹

Für die Konstruktion eines Kreises durch den Peripheriewinkelsatz muss man den Satz umkehren. Konkret heißt das Folgendes:

Gegeben ist die Strecke \overline{AB} . Um nun weitere Punkte C und D so zu erzeugen, dass alle Punkte auf einem Kreis liegen, wählt man sie so, dass $\angle ACB = \angle ADB$.

Bewiesen werden kann auch das sehr einfach. Man nimmt an, dass A , B und C auf dem Kreis liegen, D aber nicht. Wenn das der Fall ist, liegt zumindest auf der Strecke \overline{AD} ein Punkt P , der sich auf dem Kreis befindet. Da aber alle Peripheriewinkel gleich groß sein müssen, muss auch der Winkel $\angle APB$ gleich sein wie $\angle ACB$ und $\angle ADB$. Das heißt wiederum, dass $\triangle ADB$ und $\triangle APB$ kongruent sind, da sie in einer Seite \overline{AB} und drei Winkeln übereinstimmen. Außerdem haben sie zwei gleiche Punkte, nämlich A und B . Damit ist der Beweis auch schon fertig, denn wenn sie deckungsgleich und in zwei Punkten gleich sind, sind es dieselben Dreiecke und $D = P$ und liegt somit auf dem Kreis.

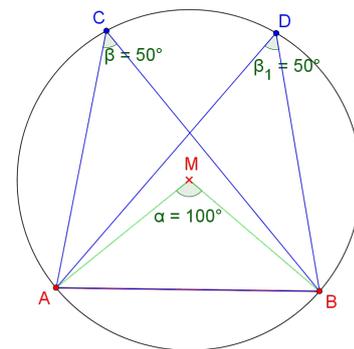


Abbildung 18: Zentri- und Peripheriewinkel in einem Kreis

³⁰Vgl. [10] "Peripheriewinkelsatz" (9.2.2014): Mathepedia, URL: <http://www.mathepedia.de/Peripheriwinkelsatz.aspx>, (23.1.2014)

³¹Vgl. [10] "Peripheriewinkelsatz" (2013): Mathepedia

Mit dem gleichen Prinzip wird der Kreis auch in der Projektiven Geometrie erzeugt. Statt den Punkten A und B sind die beiden Zentren der Strahlbüschel S_1 und S_2 gegeben. Jeweils zwei Strahlen $x_1; x_1'$ eines Strahlbüschels S_2 schließen einen Winkel α, β, γ ein. Dieser Winkel muss dann auch von einem Strahl x_2 des anderen Strahlbüschels S_1 und dem Strahl x_1 eingeschlossen werden. Somit sind x_2 und x_1' parallel und x_1 und x_2 schneiden sich in X . Erzeugt man mit dem gleichen Verfahren weitere zwei Punkte Y und Z , hat man den Kreis definiert (siehe Abbildung 19).³²

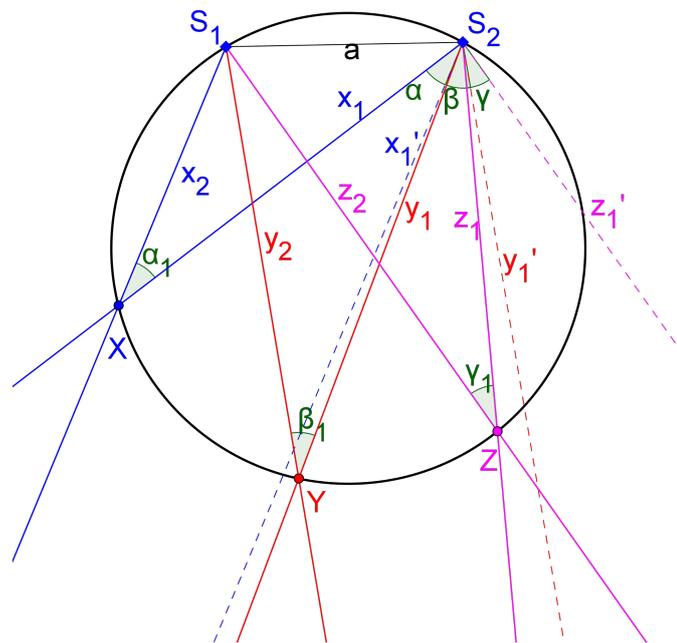


Abbildung 19: Kreis in der projektiv abgeschlossenen Anschauungsebene

³²Vgl. [10] "Peripheriewinkelsatz" (2013): Mathepedia

5 Pascals Theorem

Der Satz von Pascal besagt Folgendes:

Seien $1, 2, 3, 4, 5$ Punkte eines Kegelschnitts k , $S_1 = 1, S_2 = 3$ die Grundpunkte, dann liegt ein weiterer Punkt 6 genau dann auf k , wenn die Punkte $A := S_1 2 \cap 4 5$, $B := 2 S_2 \cap 5 6$, $C := S_2 4 \cap 6 S_1$ kollinear sind.³³

Eine weitere Definition ist:

Gegeben sei ein Kreis k . [Man betrachtet] sechs Punkte $1 [P_1], 2 [P_2], 3 [P_3], 4 [P_4], 5 [P_5], 6 [P_6] \in k$. Dann gilt: $Z = 1 2 \cap 4 5, X_1 = 2 3 \cap 5 6, X_2 = 3 4 \cap 6 1$ sind kollinear [siehe Abbildung 20].³⁴

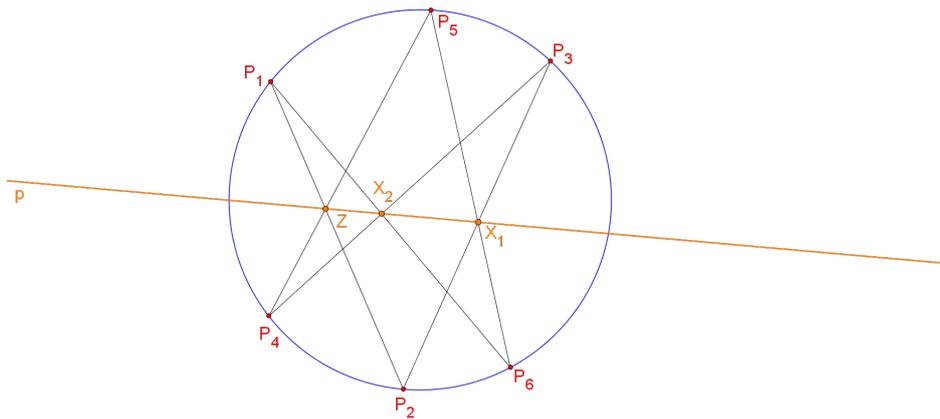


Abbildung 20: Satz von Pascal

Der Satz von Pascal besagt, dass, wenn drei Punktepaare an einem Kegelschnitt beliebig gewählt werden, alle folgenden Paare vorherbestimmt sind. Er ist ebenfalls bei der Vervollständigung von Autoprojektivitäten in der projektiv abgeschlossenen Anschauungsebene von großer Bedeutung. Der Satz von Pascal kann in jedem beliebigen Kegelschnitt Anwendung finden. Am einfachsten ist jedoch die Anwendung im Kreis, da dieser leicht erzeugt werden kann.

³³[6] Stuhlpfarrer, D. (1997/1998): S. 107

³⁴[4] Gferrer, A.; Lang, J. (2012): "Projektive Geometrie", S. 32

Durch Schneiden der Punktepaare, die auf dem Kreis liegen, erhält man die sogenannte *Projektivitätsachse* p . Sie kann den Kreis in keinem, einem oder zwei Punkten schneiden. Das spielt ebenfalls bei der Vervollständigung von Autoprojektivitäten mit Hilfe des Steinerkreises eine Rolle, da je nach Anzahl der Schnittpunkte die Anzahl der Fixstrahlen determiniert ist. Nach dem Axiom von Pappos kann es höchstens zwei Fixstrahlen geben (2 Schnittpunkte mit dem Kreis [Sehne]). Die beiden anderen Möglichkeiten ergeben sich entweder durch die Tangente (ein Fixstrahl, da nur ein Schnittpunkt) oder durch eine nichtschneidende Gerade (kein Fixstrahl).

Die drei Möglichkeiten werden im nächsten Kapitel anhand eines Anwendungsbeispiels näher erläutert.

6 Anwendung des Steinerkreises auf Projektivitäten

Folgend sind vier Anwendungen des Steinerkreises angeführt. Bei allen Beispielen geht es darum Autoprojektivitäten zu vervollständigen.

6.1 Aufgabe 1

Gegeben sei eine Punktreihe $g(X)$ und ein Punkt $P \in g(X)$. Für eine Autoprojektivität $\tau : g(X) \rightarrow g(X_1)$ suche man Paare (X, X_1) entsprechender Punkte, die symmetrisch zu P liegen.³⁵

Lösung

Gegeben sind die Gerade g und der Punkt $P \in g$. Um nun die Autoprojektivität zu vervollständigen, ist es nötig, noch weitere drei Punktpaare $A_1, A_2; B_1, B_2$ und C_1, C_2 vorzugeben. Diese Punktpaare können (laut Pascal) frei gewählt werden, alle folgenden sind vorherbestimmt. Damit man Fixpunkte dieser Projektivität τ findet, die zu P symmetrisch liegen, muss man die Punkte A_2, B_2, C_2 noch an P spiegeln, das heißt die Projektivität σ vorschalten ($\sigma \circ \tau$), die um P spiegelt. Im weiteren Sinne bedeutet das, man sucht Punktpaare L_1, L'_1 und L_2, L'_2 , die symmetrisch um P liegen.

Sobald man die Punktpaare definiert und gespiegelt hat, erzeugt man einen Kreis (Steinerkreis), auf dem ein Zentrum S liegt. Durch diesen Punkt S und jeweils einem Punkt $A_1, A'_2, B_1, B'_2, C_1, C'_2$ zieht man einen Strahl. Dieser Strahl schneidet den Kreis noch in einem weiteren Punkt als S . Nun kann man die Schnittpunkte der Strahlen kreuzweise verbinden und die Verbindungsgeraden schneiden $A_1B'_2 \cap A'_2B_1, B_1C'_2 \cap B'_2C_1, A_1C'_2 \cap A'_2C_1$. Durch die Schnittpunkte verläuft wiederum eine Gerade p , die Projektivitätsachse. Dort, wo diese den Steinerkreis schneidet, sind die Fixpunkte der Projektivität $\sigma \circ \tau$. Projiziert man diese nun wieder durch S auf die Gerade g , hat man die Lösungen (siehe Abbildung 21).

³⁵[11] Gferrer, A.; Lang, J. (2011): "1. Studienarbeit aus Projektiver Geometrie 1 WS 2011/2012", TU Graz, Skriptum

Probe

Bei der Probe nimmt man ebenfalls die gegebenen Punktepaare der Projektivität. Anders als beim Finden der Lösungen muss man aber nur die Projektivität τ nehmen und nicht σ vorschalten. Das heißt nun wiederum einen Steinerkreis erzeugen, auf dem ein Zentrum S liegt und die Punktepaare A_1, A_2 ; B_1, B_2 und C_1, C_2 mit Strahlen durch S verbinden. Die Schnittpunkte der Strahlen wieder kreuzweise verbinden und schneiden $A_1B_2 \cap A_2B_1$, $B_1C_2 \cap B_2C_1$ und $A_1C_2 \cap A_2C_1$. Diese Punkte liegen ebenfalls kollinear auf der Projektivitätsachse p . Jetzt muss man noch die Lösungen L_1, L_2 mit Strahlen durch S auf den Kreis projizieren. Danach geht es darum Punktepaare L_1, L'_1 und L_2, L'_2 zu bestimmen. Das geht mit Hilfe des Satzes von Pascal. Man verbindet L_1 mit einem anderen Punkt A_2, B_2 oder C_2 (in diesem Fall C_2). Die dabei entstehende Gerade schneidet man mit p . Durch diesen Schnittpunkt und C_1 zieht man wiederum eine Gerade. Dort, wo der zweite Schnittpunkt dieser Geraden mit dem Kreis liegt (nicht C_1), sollte nun der symmetrische Punkt L'_1 liegen. Zieht man wieder einen Strahl durch L'_1 und S , projiziert man L'_1 auf die Gerade g . Nun sollten L_1 und L'_1 symmetrisch um P liegen (siehe Anhang: Abbildung 26).

Die Probe zu L_2, L'_2 verläuft analog.

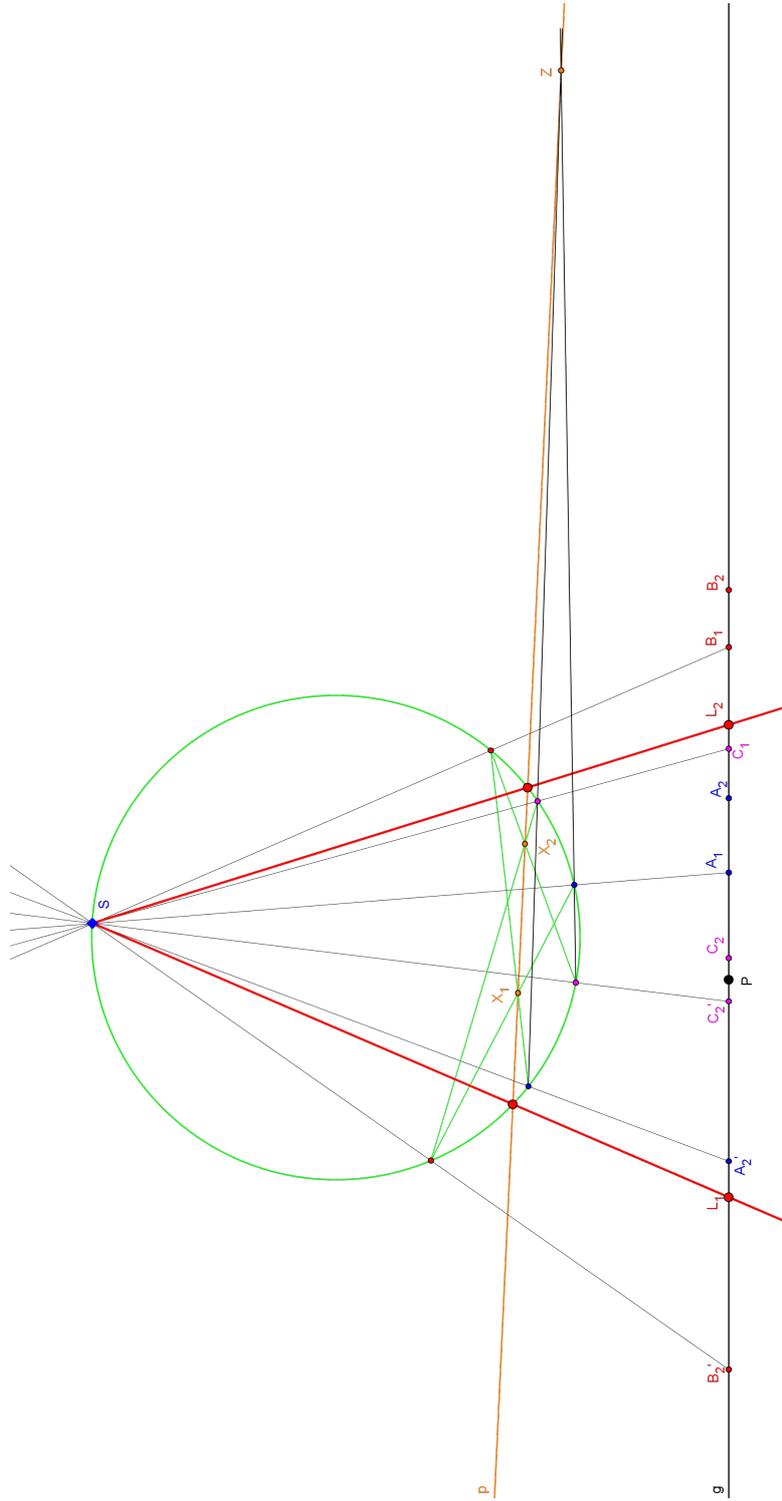


Abbildung 21: Aufgabe 1: Symmetrische Punkte finden

6.2 Aufgabe 2

Gegeben sei ein Strahlbüschel $S(x)$ und eine Gerade $g \in S(x)$. Für eine Autoprojektivität $\tau : S(x) \rightarrow S(x_1)$ suche man Paare (x, x_1) entsprechender Strahlen, die symmetrisch zu g liegen.³⁶

Lösung

Aufgabe 2 ist dual zu Aufgabe 1. Das heißt die Inzidenz bleibt dieselbe, aber die Begriffe Punkt und Gerade werden vertauscht. In diesem Fall wird aus der Punktreihe (Gerade) aus Aufgabe 1 ein Strahlbüschel und aus dem Punkt P die Gerade g , um die die Strahlen (nicht Punkte) symmetrisch liegen sollen.

Das Praktische am Dualitätsprinzip ist, wenn eine Aussage in der Ebene π gilt, sie auch in der dualen Ebene π^* gilt. Diese Eigenschaft kann man sich bei dieser Aufgabe zunutze machen. Wie man bereits aus Aufgabe 1 weiß, braucht man drei Punktepaare, die die Projektivität bestimmen. Da diese Aufgabe dual ist, braucht man drei Strahlenpaare $a_1, a_2; b_1, b_2$ und c_1, c_2 durch S . Man spiegelt wiederum jeden zweiten Strahl um g ($\sigma \circ \tau$). Danach bestimmt man die Projektivitätsachse p mit Hilfe des Steinerkreises, indem man einen Kreis mit beliebigem Radius durch S legt, sodass alle Strahlen diesen schneiden. Dann verbindet man die Schnittpunkte der Strahlen kreuzweise $a_1 b'_2 \cap a'_2 b_1; b_1 c'_2 \cap b'_2 c_1; a_1 c'_2 \cap a'_2 c_1$. Dort, wo die Projektivitätsachse den Kreis schneidet müssen auch die Lösungsstrahlen den Kreis schneiden. Also verbindet man die Schnittpunkte von p mit dem Kreis jeweils mit S und erhält die Lösungen (siehe Abbildung 22).

Probe

Auch die Probe verläuft dual zu Aufgabe 1. Man lässt die Spiegelung σ weg und konstruiert die Projektivitätsachse zur Projektivität τ . Um das zu bewerkstelligen, verbindet man die Schnittpunkte der Strahlen mit dem Kreis durch S kreuzweise $a_1 b_2 \cap a_2 b_1; b_1 c_2 \cap b_2 c_1; a_1 c_2 \cap a_2 c_1$. Dann verbindet man den Schnittpunkt eines Lösungsstrahls l_1 mit dem zweiten eines anderen a_2, b_2, c_2 (in diesem Fall b_2). Nachdem dies gemacht wurde, zieht man einen weiteren Strahl durch b_1 und den Schnittpunkt der Verbindungsgerade $l_1 b_2$ mit der Projektivitätsachse p . Dort, wo dieser Strahl den Kreis das zweite Mal schneidet (nicht in b_1), ist auch der Schnittpunkt des symmetrischen Strahls l'_1 , sofern die Lösung richtig konstruiert wurde. Zieht man wiederum einen Strahl durch diesen Schnittpunkt und S , bekommt man l'_1 , der an g gespiegelt l_1 ergibt. Die Probe zu l_2 verläuft analog (siehe Anhang: Abbildung 27).

³⁶[11] Gferrer, A.; Lang, J. (2011): "1. Studienarbeit aus Projektiver Geometrie WS 2011/2012"

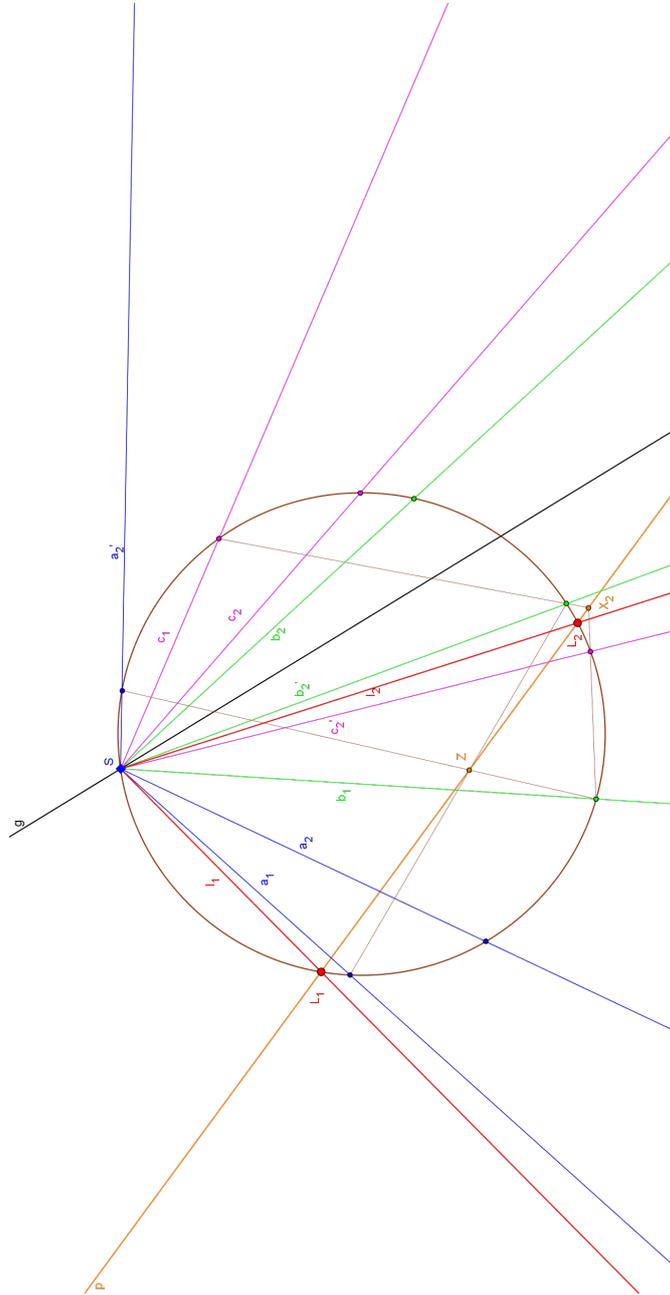


Abbildung 22: Aufgabe 2: Symmetrische Strahlen finden

6.3 Aufgabe 3

Gegeben ist ein Dreieck ABC und ein Punkt P . Gesucht sind Geraden g , die P enthalten und ABC in zwei flächengleiche Teile zerlegen.³⁷

Lösung

Diese Aufgabe ist im Vergleich zu den vorangegangenen etwas komplexer. Gegeben ist das Dreieck $\triangle ABC$ und der Punkt P . Um nun die Lösungen zu eruiieren, muss man wiederum eine Autoprojektivität aufstellen und selbige vervollständigen. Wie schon bekannt, ist eine Projektivität durch drei Punkte- oder Strahlenpaare determiniert. Diese gilt es jetzt zu konstruieren. Anders als in den vorigen Aufgaben kann man sie jedoch nicht ganz frei wählen. Der erste Punkt eines Paares ist auf der Strecke \overline{AB} ohne jegliche Einschränkungen auswählbar. Hat man diesen Punkt X_1, Y_1 oder Z_1 , muss man X, Y und Z wie folgt konstruieren. Man zieht durch jeweils einen dieser Punkte und P eine Gerade. Dort, wo die Gerade die Strecke \overline{BC} schneidet, befindet sich der Punkt X_1, Y_1 oder Z_1 . Nun zeichnet man die Verbindungsstrecken $\overline{X_1A}, \overline{Y_1A}$ und $\overline{Z_1A}$ ein und verschiebt sie parallel durch C , sodass sie in einem Punkt X'_1, Y'_1 und Z'_1 die Verlängerung der Strecke \overline{AB} schneiden. Zu guter Letzt halbiert man die Strecken $\overline{BX'_1}, \overline{BY'_1}$ und $\overline{BZ'_1}$ und erhält die Punkte X, Y und Z . Somit hat man die Punktepaare $X_1, X; Y_1, Y$ und Z_1, Z konstruiert. Nun kann man wieder einen beliebigen Kreis, wählen auf dem das Zentrum S liegt. Durch dieses Zentrum projiziert man mit Strahlen die Punktepaare auf den Kreis und verbindet kreuzweise, um die Projektivitätsachse zu bestimmen ($X_1Y \cap XY_1; Y_1Z \cap YZ_1; X_1Z \cap XZ_1$). Die Schnittpunkte der Projektivitätsachse p mit dem Kreis sind wieder die gesuchten Lösungen. Wenn man sie durch S auf \overline{AB} projiziert und durch diese Punkte und P Geraden zieht, sind dies die Lösungsgeraden (siehe Abbildung 23).

Probe

Die Probe verläuft bei diesem Beispiel gleich wie das Konstruieren der Punktepaare. Man zieht eine Gerade durch L_{1_1} und P . Dort, wo diese Gerade die Strecke \overline{BC} schneidet, befindet sich der Punkt L_1 . Man verbindet wiederum die Punkte L_1 und A und verschiebt parallel, sodass man einen Schnittpunkt L'_1 auf der Verlängerung von \overline{AB} erhält. Halbiert man nun die Strecke $\overline{BL'_1}$, fällt der Halbierungspunkt mit L_{1_1} zusammen (siehe Abbildung 23 [gelb]).

Analog dazu kann man auch für L_{2_2} vorgehen, wobei dieser Punkt keine Lösung des Problems ist.

³⁷[12] Gferrer, A.; Lang, J. (2011): "2. Studienarbeit aus Projektiver Geometrie 1 WS 2011/2012", TU Graz, Skriptum

Warum $L1_1$ eine Lösung ist, $L2_2$ aber nicht, obwohl die Probe stimmt, und warum man die Punktepaare auf diese Weise konstruiert, wird im Beweis erklärt.

Beweis

Wie in der Probe schon beschrieben wird, müssen die zwei Punkte des Punktepaars der Lösung zusammenfallen, damit die Fläche halbiert wird. Warum man genau dann eine Halbierung erhält, wenn dies der Fall ist, kann folgendermaßen bewiesen werden.

Sei g die Lösungsgerade zu diesem Problem, dann gilt:

Die Fläche des Dreiecks $\triangle L1_1BL1$ ist gleich groß wie die Fläche des Vierecks $\square AL1_1L1C$.

In weiterer Folge ist dann auch Fläche des Dreiecks $\triangle L'_1AL1$ und des Dreiecks $\triangle AL1C$ gleich groß, da sie die gleiche Höhe (g wird durch C parallel verschoben) und eine Seite $\overline{AL1}$ gemeinsam haben.

Daraus folgt, dass auch die Dreiecke $\triangle L'_1L1_1L1$ und $\triangle L1_1BL1$ die gleiche Fläche haben.

Da $\triangle L'_1L1_1L1$ und $\triangle L1_1BL1$ die gleiche Höhe haben, müssen sie eine Seite haben, die gleich lang ist. In diesem Fall $\overline{L1_1B} = \overline{L'_1L1_1}$.

$L2_2$ ist deshalb keine Lösung, da die Argumentation nicht stimmt. Zieht man eine Verbindungsgerade durch $L2_2$ und P , schneidet diese nicht die Strecke \overline{BC} , sondern nur eine Verlängerung dieser. Somit ist das Viereck $\square AL2_2L2C$, das entstehen sollte, kein Viereck (siehe Abbildung 24). Darüber hinaus ist auch die Fläche des vermeintlichen Vierecks nicht gleich groß wie die des Dreiecks $\triangle L1_1BL1$. Deshalb sind die beiden Flächen, in die das Dreieck $\triangle ABC$ durch die Gerade g geteilt wird, nicht gleich groß (siehe Abbildung 24).

Des Weiteren gilt:

$$AB(L1_1) \bar{\bar{}} BC(L1) \bar{\bar{}} A(x_1) \bar{\bar{}} C(x_2) \bar{\bar{}} AB(L'_1) \bar{\bar{}} AB(L1_1)^{38}$$

Lies: Der Punkt $L1_1$ auf AB ist perspektiv über A zum Punkt $L1$ auf BC ist perspektiv über die Ferngerade x_1 durch A ist perspektiv über die Ferngerade zu x_2 durch C ist projektiv zum Punkt $L1_1$ auf AB .

Das heißt, die Punkte $L1_1$ und $L1$ sind perspektiv, da sie kollinear auf einer Geraden durch den Punkt P liegen. $L1$ und x_1 liegen perspektiv, da $L1$ durch x_1 abgebildet wird. x_1 und x_2 liegen perspektiv zueinander, da sie parallel sind, also die eine auf die andere durch Strahlen aus einem Fernpunkt abgebildet wird. L'_1 und x_2 liegen ebenfalls perspektiv, weil L'_1 durch x_2 abgebildet wird. Der Punkt $L1_1$ ergibt sich dann aus einer Streckung aus dem Punkt B um den Faktor $\frac{1}{2}$ und ist deshalb projektiv zu L'_1 .

³⁸[6] Stuhlpfarrer, D.: 1997/1998, S. 99

6.4 Aufgabe 4

Gegeben sind zwei Dreiecke ABC und PQR . Gesucht ist ein Dreieck, dessen Seiten der Reihe nach durch P, Q, R gehen und dessen Eckpunkte der Reihe nach auf den Seiten des Dreiecks ABC liegen.³⁹

Lösung

Die zwei Ausgangsdreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle PQR$ sind gegeben. Um nun eine Autoprojektivität zu erzeugen, die, wenn man sie vervollständigt, die Lösungen hervorbringt, braucht man wieder drei Punktpaare, die diese vorgeben. Konkret heißt das, man probiert einfach dreimal anhand von willkürlich gewählten Anfangspunkten A_1, B_1 und C_1 auf \overline{AB} Dreiecke so einzuschreiben, dass sie den Vorgaben entsprechen. Also deren Seiten der Reihe nach durch P, Q, R gehen und deren Eckpunkte der Reihe nach auf den Seiten des Dreiecks $\triangle ABC$ liegen. Fällt der Anfangspunkt mit dem Endpunkt zusammen, hat man ein Dreieck gefunden, das den Anforderungen entspricht und man hat somit die Aufgabe gelöst. Fallen Anfangs- und Endpunkt nicht zusammen, so erhält man den zweiten Punkt A_2, B_2 oder C_2 , der ebenfalls auf der Strecke \overline{AB} liegt. Danach zeichnet man wieder einen Kreis mit einem Zentrum S und projiziert die Punkte $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ durch Strahlen durch S auf den Kreis. Dann verbindet man kreuzweise, um die Projektivitätsachse p zu finden ($A_1B_2 \cap A_2B_1$; $B_1C_2 \cap B_2C_1$; $A_1C_2 \cap A_2C_1$). Die Projektivitätsachse schneidet den Kreis wieder in zwei Punkten. Projiziert man diese wieder durch S auf \overline{AB} , hat man die Lösungen gefunden (siehe Abbildung 25). Bemerkung: Die Projektivitätsachse p kann auch eine Tangente an den Kreis sein oder diesen überhaupt nicht schneiden. Ist sie eine Tangente, gibt es nur eine Lösung, also nur ein Dreieck, das die Bedingungen erfüllt. Schneidet sie gar nicht, gibt es keine adäquate Lösung des Problems.

Probe

Die Probe verläuft bei diesem Beispiel sehr einfach. Man beginnt im ersten Lösungspunkt ein Dreieck so einzuzichnen, dass es den Ansprüchen gerecht ist. So verbindet man den Punkt L_1 mit Q mit einer Geraden. Durch den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Strecke \overline{BC} und den Punkt R zieht man eine neue Gerade. Durch deren Schnittpunkt mit \overline{AC} und Q zieht man wieder eine Gerade. Diese sollte \overline{AB} im Punkt L_1 schneiden, sodass sich ein Dreieck ergibt (siehe Abbildung 25 [rot]). Die Probe zu L_2 verläuft analog.

³⁹[12] Gfrerrer, A.; Lang, J. (2011): "2. Studienarbeit aus Projektiver Geometrie 1 WS 2011/2012"

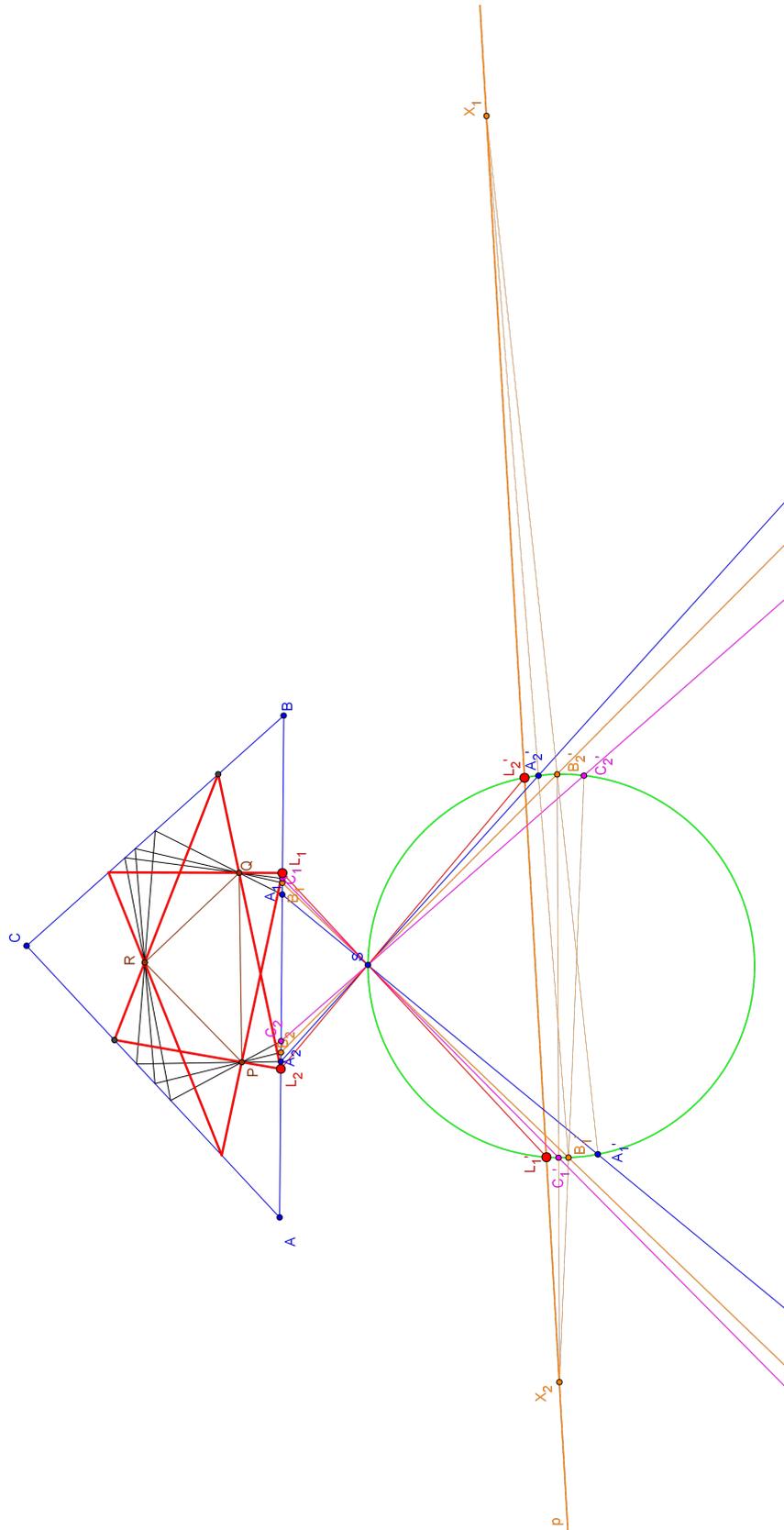


Abbildung 25: Aufgabe 4: Einschreiben eines Dreiecks

7 Fazit

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse und die daraus resultierenden Erkenntnisse dargelegt.

Allgemeine Erkenntnisse/Darlegung der Ergebnisse

In dieser FBA wird ein kurzer Einblick in die Projektive Geometrie gegeben. Diese wurde nach langer Zeit von verschiedenen Mathematikern und Künstlern entwickelt, um alle Geometrien auf einen Nenner zu bringen. Sie bietet eine nahezu grenzenlose Vielfalt von Modellen an, da Begriffe wie Gerade oder Punkt nicht definiert sind.

Ein weiterer Grund für den riesigen Modellvorrat ist die Anzahl der Axiome, die diese Geometrie definieren. Sie beschränkt sich auf drei. Die Axiome sind sehr einfach formuliert und beinhalten nur das Nötigste, um bereits auf sinnvolle Art Geometrie betreiben zu können.

Natürlich ist der große Spielraum nicht immer nur von Vorteil. Damit die Geometrie auf den Benutzer angepasst werden kann, gibt es weitere Axiome und Sätze, wie zum Beispiel den Satz von Pascal oder das Axiom von Pappos, die dabei helfen, sie zu reduzieren und für den jeweiligen Verwendungszweck zu optimieren.

Der Steinerkreis ist nun ein Werkzeug der Projektiven Geometrie, mit dem es möglich ist, gewisse Aufgabenstellungen rein konstruktiv zu bewältigen. Er wurde von Jakob Steiner (geb. 1796-gest. 1863), einem Geometer, entwickelt. Steiner war es auch, der die Kegelschnitte, mit Hilfe von Strahlbüscheln, in der projektiven Ebene definierte. Das Besondere am Steinerkreis ist, dass er es ermöglicht, ohne analytisch an ein Problem heran gehen zu müssen, dieses lösen zu können, auch wenn man das oft nicht auf den ersten Blick erkennen kann.

Die Anwendungsbeispiele, die in dieser Arbeit beschrieben werden, sind nur ein kleiner Teil dessen, was die Projektive Geometrie bietet. Sie wird nicht nur für scheinbar unlösbare Aufgaben der Geometrie verwendet, sondern auch in anderen Belangen, wie zum Beispiel dem Erstellen von Weltkarten, kommt sie zum Einsatz. In diesem Fall wird die Oberfläche des kugelförmigen Planeten auf eine ebene Fläche abgebildet.

Persönliche Erkenntnisse

Persönlich habe ich aus dieser Arbeit sehr viel gelernt. Der Einblick in eine neue, andere Welt der Geometrie, wie man sie in der Schule normalerweise nicht zu Gesicht bekommt, und das Ausarbeiten einiger Anwendungsbeispiele haben mir gezeigt, wie interessant, aber auch wie komplex Geometrie sein kann. Ohne sich in das Thema einzulesen und ohne Informationen zu erfragen, ist es auf jeden Fall schwer sich damit problemlos zu befassen. Auch diese Arbeit erfordert ein fundiertes Grundwissen.

Trotz einiger Komplikationen beim Ausarbeiten, die nicht minder durch die erstmalige Verwendung des Programms \LaTeX meinerseits, auftraten, finde ich die Projektive Geometrie sogar noch faszinierender als zu Beginn.

Literatur

- [1] Lind, D. (11.4.2007): "Nichteuklidische Geometrie", Bergische Universität Wuppertal, URL: http://www2.math.uni-wuppertal.de/~lind/NE_Skript.pdf, (13.12.2013)
- [2] Kasten, H. (13.11.2013): "Einführung in die Geometrie", Universität Heidelberg, URL: <http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~kasten/files/Skripte/ws1112geom.pdf>, (31.12.2013)
- [3] Christmann, N. (21.10.2007): "Was ist (war) Geometrie?", Universität Kaiserslautern, URL: <http://www.mathematik.uni-kl.de/~nchrist/PG2008/para0WasistwarGeometrie.pdf>, (5.1.2014)
- [4] Gferrer, A.; Lang, J. (2012): "Projektive Geometrie", 2. Auflage, TU Graz, Skriptum
- [5] "Moulton-Ebene" (3.9.2013): Wikipedia, URL: de.wikipedia.org/wiki/Moulton-Ebene, (8.1.2014)
- [6] Stuhlpfarrer, D. (1997/1998): Studienunterlagen zu Vorlesungen zur Projektiven Geometrie
- [7] Baur, A. (1961): "Einführung in die Projektive Geometrie", Teil 1, Hrsg. Ernst Klett Verlag, Stuttgart
- [8] "Projektive Perspektivitäten" (19.11.2013): Wikipedia, URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Projektive_Perspektivität, (4.2.2014)
- [9] Brauner, H. (1976): "Geometrie projektiver Räume I", Hrsg. Wissenschaftsverlag Bibliographisches Institut, Zürich
- [10] "Peripheriewinkelsatz" (9.2.2014): Mathepedia, URL: <http://www.mathepedia.de/Peripheriwinkelsatz.aspx>, (23.1.2014)
- [11] Gferrer, A.; Lang, J. (2011): "1. Studienarbeit aus Projektiver Geometrie 1 WS 2011/2012", TU Graz, Skriptum
- [12] Gferrer, A.; Lang, J. (2011): "2. Studienarbeit aus Projektiver Geometrie 1 WS 2011/2012", TU Graz, Skriptum

Abbildungsverzeichnis

1	Parallelenpostulat von Euklid	7
2	Lobatschewskis Modell der nichteuklidischen Geometrie	8
3	Poincaresche Halbebene	10
4	Minimalmodell	13
5	Z-perspektive Dreiecke	15
6	Moulton-Ebene	16
7	Das Axiom von Pappos	17
8	Perspektivität: Geradenbüschel auf Punktreihe	18
9	Perspektivität zwischen Punktreihen	19
10	Perspektivität zwischen Geradenbüscheln	19
11	Projektivität	20
12	Autoprojektivität einer Punktreihe $g(X)$	20
13	Harmonisches Punktequadrupel	21
14	Involution σ als Spiegelung	22
15	Hyperbel in der projektiv abgeschlossenen Anschauungsebene	23
16	Ellipse in der projektiv abgeschlossenen Anschauungsebene	23
17	Nichtschneidende Gerade, Tangente und Sehne eines Kegelschnitts	24
18	Zentri- und Peripheriewinkel in einem Kreis	25
19	Kreis in der projektiv abgeschlossenen Anschauungsebene	26
20	Satz von Pascal	27
21	Aufgabe 1: Symmetrische Punkte finden	31
22	Aufgabe 2: Symmetrische Strahlen finden	33

23	Aufgabe 3: Dreiecksfläche halbieren	36
24	Beweis zu Aufgabe 3	37
25	Aufgabe 4: Einschreiben eines Dreiecks	39
26	Probe zu Aufgabe 1	46
27	Probe zu Aufgabe 2	47

Anhang

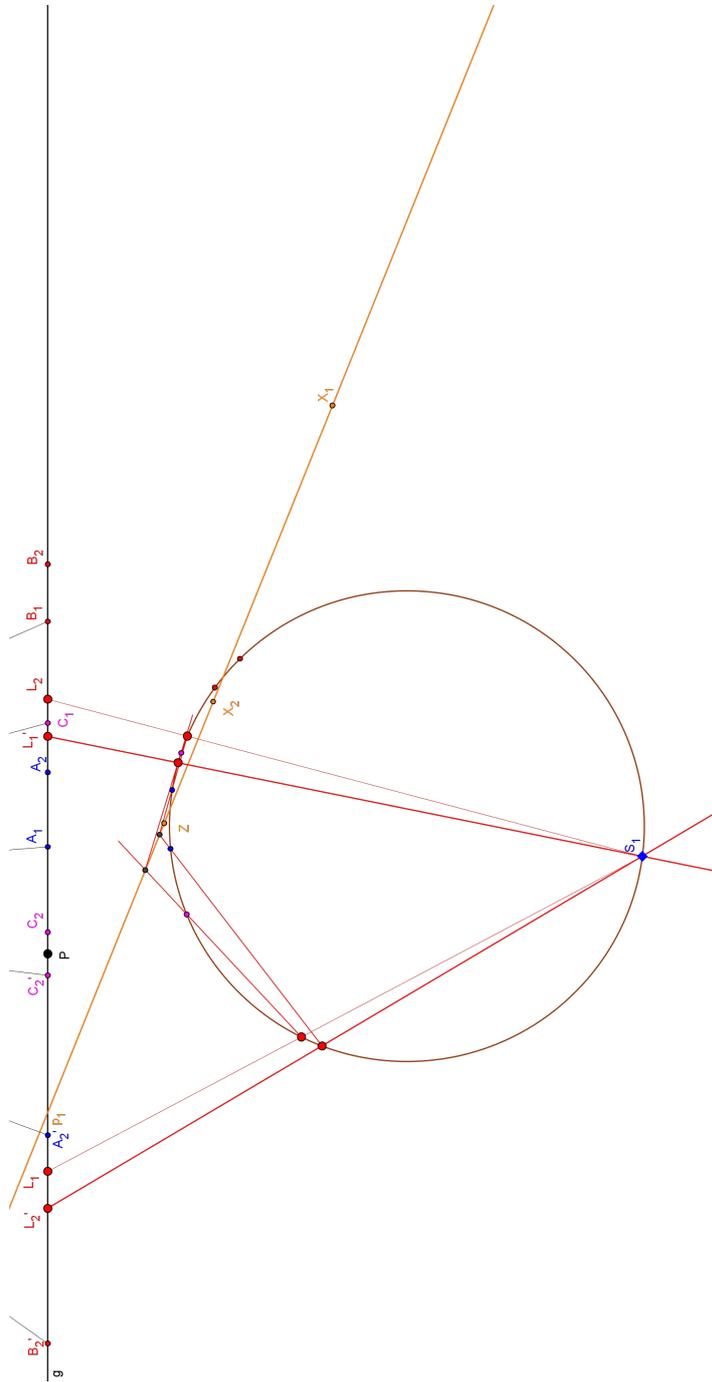


Abbildung 26: Probe zu Aufgabe 1

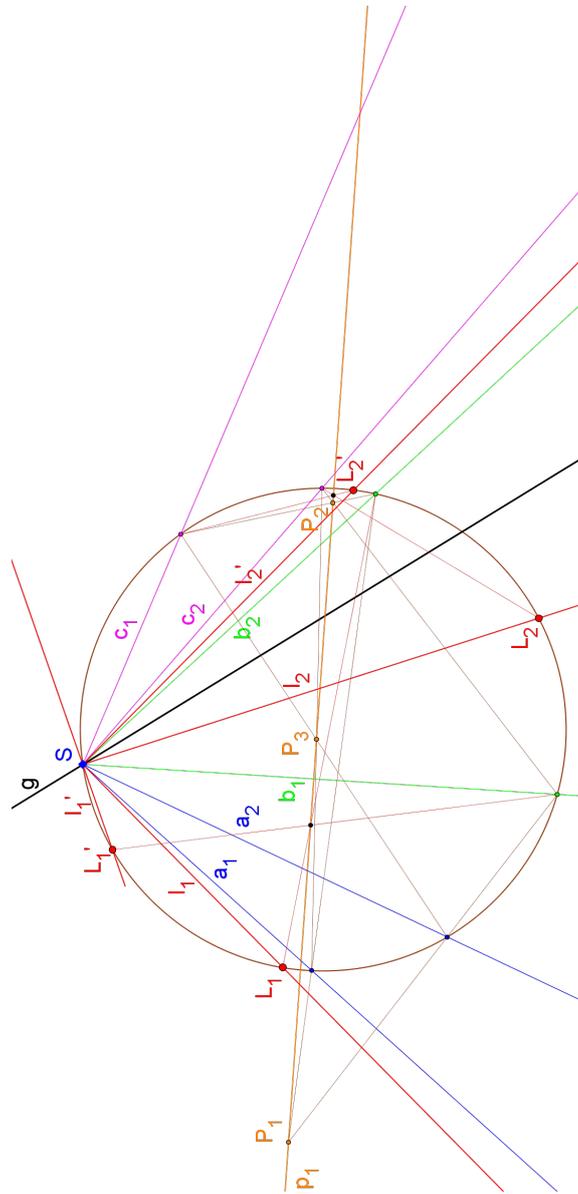


Abbildung 27: Probe zu Aufgabe 2

Arbeitsprotokoll

Datum	Ereignis	Ort
25.06.2013	Besprechung des Aufbaus der Arbeit mit Ao.Univ.-Prof. Mag.rer.nat. Dr.techn. Gfrerrer	TU Graz
09.09.2013	Besprechung der Disposition, Literatursuche mit Ao.Univ.-Prof. Mag.rer.nat. Dr.techn. Gfrerrer	TU Graz
10.09.2013	Besprechung der Disposition und des Aufbaus mit Mag. Stuhlpfarrer	BRG Petersgasse
19.09.2013	Genehmigung durch den Landesschulrat	BRG Petersgasse
30.12.2013-08.01.2014	Ausarbeitung der FBA	Zu Hause
09.01.2014	Literatursuche mit Ao.Univ.-Prof. Mag.rer.nat. Dr.techn. Gfrerrer	TU Graz
11.01.2014-02.02.2014	Ausarbeitung der FBA	Zu Hause
11.02.2014	Besprechung der Aufgaben mit Mag. Stuhlpfarrer	BRG Petersgasse
13.02.2014	Besprechung der Aufgaben mit Mag. Stuhlpfarrer	BRG Petersgasse
14.02.2014	Besprechung der Aufgaben mit Mag. Stuhlpfarrer	BRG Petersgasse
10.02.2014-2.02.2014	Ausarbeitung der FBA	Zu Hause
26.02.2014	Letzte Besprechung der Verbesserung mit Mag. Stuhlpfarrer	BRG Petersgasse
24.02.2014-26.02.2014	Verbesserung der FBA	Zu Hause

601226/13/14/2

Der Steinerkreis – Ein faszinierendes Werkzeug der projektiven Geometrie

Allgemein

Autor Löscher Richard Franz
Schule BRG Graz, Petersgasse
Gegenstand Darstellende Geometrie
Betreuer Stuhlpfarrer David Mag.
LSI Schwarz Birgit Mag.
Stichwort Steinerkreis

Disposition

Angestrebte Ziele der Arbeit und persönlicher Bezug zum Thema

In meiner Arbeit möchte ich einen kleinen Einblick in die projektive Geometrie geben und anhand des Steinerkreises Problemlösungen in der projektiven Ebene behandeln.

Ich habe dieses Thema gewählt, da ich in den Ferien ein Praktikum an der Technischen Universität in Graz, am Institut für Geometrie, absolvieren durfte. Dort habe ich einige Sachen über die projektive Geometrie gelernt, die ich sehr interessant fand. Nach einer Diskussion mit meinem betreuenden Lehrer, Professor Mag. David Stuhlpfarrer, kam ich auf den Steinerkreis, der trotz seiner faszinierenden Eigenschaften nur sehr wenigen Leuten bekannt ist. Daher möchte ich in meiner Arbeit einen Einblick in die Funktion dieses Werkzeuges der projektiven Geometrie geben.

Inhaltliche Grobgliederung

- o Historisches zur projektiven Geometrie
- o Einführung in die ebene projektive Geometrie
- o Projektivitäten
- o Kegelschnitte in der projektiven Ebene (speziell: Kreis)
- o Pascals Theorem (speziell: Kreis)
- o Anwendungen auf Projektivitäten (Steinerkreis)

Voraussichtliche Schwerpunkte der Arbeit

Einführung in die projektive Geometrie und Anwendung des Steinerkreises in der projektiven Geometrie, speziell anhand konkreter Beispiele in der projektiv abgeschlossenen Anschauungsebene

Voraussichtlich verwendete Methoden und zur Verfügung stehende Unterlagen und Hilfsmittel

Skizzen (Cinderella 2.6)

Literatur:

Einführung in die projektive Geometrie, Teil 1 (Arnold Baur, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1961)

Einführung in die projektive Geometrie, Teil 2 (Arnold Baur, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1963)

Theorie der Kegelschnitte (Schröder, Leipzig, 1867)

Reelle projektive Geometrie der Ebene (Coxeter, R. Oldenbourg, München, 1955)
Projektive Geometrie (Coxeter, University of Toronto, 1974)
Projektive Geometrie (Prüfer, Akademische Verlagsgesellschaft Geest, Leipzig, 1935)
An outline of projective geometry (Garner, North Holland, 1981)

Internetquellen:

<http://www.geometrie.net/mathematik/ausblick/geschichte.htm>,

<http://math.berkeley.edu/~robin/Pascal/theorem.html>, Julia Chew

<http://www->

[m10.ma.tum.de/foswiki/pub/Lehre/DynamischeGeometrieSeminar/proj_geom_hom_koord.pdf](http://www-m10.ma.tum.de/foswiki/pub/Lehre/DynamischeGeometrieSeminar/proj_geom_hom_koord.pdf)
f, Christian Liedl, Johannes Rausch

mündliche Quelle: Ao. Univ.-Prof. Mag. rer. nat. Dr. techn. Anton Gferrer, Institut für Geometrie, TU Graz

Sonstige Vereinbarungen

Genehmigung

Status Genehmigt 19.09.2013 10:31:46

Anmerkung Interessantes und anspruchsvolles Thema. Die Grobgliederung weist eine sehr klare und sinnvolle Struktur auf, sämtliche Vorgaben für die Angaben der Quellen (Internet und Standardwerke) sind erfüllt.