

Mathematische Modelle zur Preisbewertung von Finanzoptionen

Vorwissenschaftliche Arbeit

vorgelegt von

Kristof Wiedermann

Klasse 8Cn

Betreuer: MMag. Dr. Christoph Ableitinger

Bundesoberstufenrealgymnasium Mistelbach
Brennerweg 8, 2130 Mistelbach a. d. Zaya

Zistersdorf, 16. Januar 2017

Abstract

In dieser Arbeit werden drei Bewertungsmodelle für Optionen, das Black-Scholes-Merton-Modell, das Cox-Ross-Rubinstein-Modell und das Jump-Diffusions-Modell nach Merton, hergeleitet und miteinander verglichen.

Dazu werden zunächst mathematische Grundlagen, deren Kenntnis für die Herleitung der Modelle unabdinglich ist, und die finanzwirtschaftlichen Hintergründe einer Option angeführt. Im Anschluss an die Vorstellung der drei Modelle werden diese sowohl an einem konkreten Beispiel, der Bewertung von Kaufoptionen mit der GE-Aktie als Underlying, als auch allgemein verglichen.

Während beim konkreten Vergleich die Genauigkeit in Bezug auf die Marktpreise der entsprechenden gehandelten Optionen betrachtet wird, werden bei der allgemeinen Gegenüberstellung Eigenschaften, wie die Annahme über den Prozess des Aktienkurses oder das Vermögen, Volatility Smiles abzubilden, betrachtet.

Es wird festgestellt, dass sich das Cox-Ross-Rubinstein-Modell am Beispiel der Kaufoptionen auf die GE-Aktie am genauesten relativ zu den Marktpreisen verhält. Allgemein gilt jedoch, dass die Annahme des Cox-Ross-Rubinstein-Modells, dass sich Aktienkurse nur am Ende einer Zeitperiode ändern können, keiner realistischen Abbildung des Wertpapierhandels entspricht. Weiters wird herausgearbeitet, dass das Merton-Modell allgemein höhere Preise als das Black-Scholes-Merton-Modell angibt. Außerdem wird festgestellt, dass das Merton-Modell im Gegensatz zum Black-Scholes-Merton-Modell Volatility Smiles abbilden kann.

Für Kalkulationen oder das Erstellen von Grafiken werden die Programme „Microsoft Excel 2013“ und „MATLAB R2016b“ verwendet.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Grundlagen.....	7
2.1	Begriff der Option in der Finanzwirtschaft.....	7
2.1.1	Disparität hinsichtlich des Ausübungsrechts.....	7
2.1.2	Disparität hinsichtlich des Optionstyps.....	8
2.1.3	Disparität hinsichtlich der Optionsposition.....	8
2.2	Stochastische Prozesse	12
2.2.1	Standard-Wiener-Prozess.....	13
2.2.2	Allgemeiner Wiener-Prozess	16
2.3	Das Lemma von Itô.....	18
2.3.1	Quadratische Variation.....	18
2.3.2	Weitere Variationen am Beispiel des Standard-Wiener-Prozesses	20
2.3.3	Herleitung von Itôs Lemma für einen Itô-Prozess.....	21
3	Das Black-Scholes-Merton-Modell.....	24
3.1	Herleitung der Black-Scholes-Merton-Differentialgleichung	24
3.2	Lösung der Black-Scholes-Merton-Differentialgleichung	25
3.3	Interpretation der Bewertungsformel.....	29
3.4	Graphische Darstellung der BSM-Bewertungsformel anhand eines Beispiels.....	32
4	Das Cox-Ross-Rubinstein-Modell	33
4.1	Herleitung der Bewertungsformel nach Cox, Ross und Rubinstein.....	33
4.1.1	Das Einperioden-Binomialmodell.....	33
4.1.2	Das Mehr-Perioden-Binomialmodell nach Cox, Ross und Rubinstein	36
4.1.3	Spezifizierung der Parameter u und d	39

4.2 Graphische Darstellung der CRR-Bewertungsformel anhand eines Beispielles.....	41
5 Das Jump-Diffusions Modell nach Merton	43
5.1 Herleitung der Erweiterung der Black-Scholes-Merton-Differentialgleichung nach Merton	43
5.2 Lösung der Merton-Differentialgleichung.....	46
5.3 Graphische Darstellung der Merton-Bewertungsformel anhand eines Beispielles.....	48
6 Vergleich der drei Bewertungsmodelle	50
6.1 Vergleich anhand eines konkreten, realitätsbezogenen Beispielles	50
6.2 Allgemeiner Vergleich	53
7 Schlussfolgerungen	58
8 Literaturverzeichnis	59
9 Abbildungsverzeichnis	60

1 Einleitung

Bei Optionen handelt es sich um Derivate, deren Markt ein stark wachsender ist. Auf die Frage, wie man diese Finanzprodukte korrekt und fair mithilfe eines mathematischen Modells bewerten kann, lieferten erstmals Black und Scholes unter der Mitarbeit von Merton im Jahre 1973 eine bahnbrechende Antwort. Die Wichtigkeit der Entwicklung dieses Modells wurde durch die Verleihung des Nobelpreises für Wirtschaftswissenschaften 1997 an die drei genannten Finanzmathematiker zum Ausdruck gebracht.

In dieser Arbeit wird zunächst der finanzwirtschaftliche Begriff der Option erläutert. Im Anschluss daran werden wichtige mathematische Resultate, die für die Herleitung der Bewertungsformel unabdinglich sind, erklärt. Beispiele hierfür sind die Definition von stochastischen Prozessen oder das Lemma von Itô.

Darauf aufbauend wird das Black-Scholes-Merton-Modell hergeleitet und erläutert. Im Anschluss daran werden zwei alternative Modelle zur Optionsbewertung, das Cox-Ross-Rubinstein-Modell und das Merton-Modell, vorgestellt und erklärt. Am Ende jedes dieser drei Kapitel ist ein Diagramm, das die durch das entsprechende Modell ermittelten Optionspreise in Abhängigkeit von Aktienkurs und Restlaufzeit angibt, vorzufinden.

Sowohl das Merton-Modell als auch das Cox-Ross-Rubinstein-Modell werden im letzten Kapitel des Hauptteiles mit dem Black-Scholes-Merton-Modell verglichen. Dieser Vergleich erfolgt zunächst anhand eines konkreten Beispiels, der Bewertung von Call-Optionen auf die GE-Aktie, wobei auf die Ermittlung der für das Merton-Modell spezifischen Parameter genauer eingegangen wird.

Im Anschluss daran wird das Cox-Ross-Rubinstein-Modell mit dem Black-Scholes-Merton-Modell allgemein verglichen und auf die Realitätsnähe in Bezug auf die modellspezifischen Annahmen über die Kursentwicklung der zugehörigen Aktie eingegangen.

Außerdem wird eine Verwendung der Modelle für die Bepreisung von Optionen amerikanischer Natur diskutiert.

Beim Vergleich des Black-Scholes-Merton-Modells mit dem Merton-Modell wird der allgemeine Zusammenhang zwischen den Volatilitäten der beiden Modelle erläutert und mittels Grafiken auf die Fähigkeit, Volatility Smiles abzubilden, eingegangen.

Diese Arbeit konzentriert sich ausschließlich auf die Bewertung von Aktienoptionen, nicht jedoch auf die von Währungsoptionen, Indexoptionen und Futures-Optionen.

2 Grundlagen

2.1 Begriff der Option in der Finanzwirtschaft

Bei einer Option handelt es sich um ein derivatives Wertpapier, welches aufgrund seiner Standardisierung sowohl an der Börse als auch außerbörslich (OTC) gehandelt werden kann. Dieses Finanzprodukt kann hinsichtlich des Underlyings (=Basiswert) stark divergieren. Es wird zum Beispiel zwischen Optionen auf Währungen, Rohstoffe, Aktien und Indizes differenziert, wobei im Zuge dieser vorwissenschaftlichen Arbeit ausschließlich auf Aktienoptionen eingegangen wird. Im Allgemeinen wird unter einer Option ein Instrument verstanden, welches dem Käufer das Recht, nicht aber die Obligation, einräumt, den Basiswert zu einem zuvor bestimmten Preis, dem sogenannten Strike-Preis, zu erwerben.

Nun gilt es, das Handelsvolumen des Marktes für Optionen zu beleuchten. Dieses befindet sich insofern in einem starken Wachstum, als der Handel mit diesen nicht linearen Derivaten, also Derivaten, deren Preisfunktion keiner Geraden entspricht, eine Chance auf hohe Gewinne verspricht. Außerdem lässt sich dieser Anstieg dadurch begründen, dass seit dem Beginn der Neunzigerjahre des 20. Jahrhunderts der Bedarf an einer Möglichkeit zur Absicherung, die durch die Eigenschaften von Optionen gegeben ist, zugenommen hat. Weiters erhoffen sich die Marktteilnehmer durch den Erwerb dieser Wertpapiere, das Phänomen der Arbitrage, der risikolosen Gewinngenerierung aufgrund von Preisunterschieden an verschiedenen Börsen für dasselbe Produkt, ausnutzen zu können. (vgl. Becker/Peppmeier 2013, S. 270)

2.1.1 Disparität hinsichtlich des Ausübungsrechts

Ein weiterer essentieller Terminus, der im Hinblick auf Optionen geklärt werden muss, ist das Verfalldatum ebendieser Wertpapiere. Der exakte Verfalltermin einer klassischen Aktienoption ist immer auf den dritten Samstag des spezifischen Monats, in welchem die Option auslaufen soll, um 22:59 CT datiert. Da allerdings der letzte Handelstag vor diesem Termin ein Freitag ist, wird dieser als die letzte Möglichkeit für den Anleger angesehen, die Option auszuüben. Folglich ist die verbleibende Zeit bis zum exakten

Verfallstermin als eine Periode zugunsten des Brokers, in welcher dieser die Unterlagen an die Börse übermitteln kann, einzustufen. Um den Investoren eine größere Diversität an Optionen zu bieten, wurden sogenannte Weeklys, deren Verfalltag immer an den Freitagen, an denen nicht der Verfalltermin einer klassischen Option liegt, eingeführt. Diese werden jeweils acht Tage vor dem Verfalldatum emittiert. (vgl. Hull 2015, S. 282ff) Nach dem Verfalltag ist die Ausübung der Option im Allgemeinen nicht mehr möglich und sie gilt daher als verfallen. Im Hinblick auf die Ausübung während der Laufzeit kann zwischen drei Arten von bedingten Termingeschäften differenziert werden:

- Europäisch: Unter einer Option europäischer Natur versteht man ein nicht lineares Derivat, welches nur am Verfalldatum ausgeübt werden kann.
- Amerikanisch: Eine amerikanische Option darf hingegen während der gesamten Laufzeit ausgeübt werden.
- Bermuda-Option: Wie der geographische Kontext suggeriert, handelt es sich bei einer Bermuda-Option um ein Zwischenstadium der beiden anderen Optionstypen. Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass es bei diesem Derivat innerhalb der Laufzeit mehrere Möglichkeiten zur Ausübung gibt.

2.1.2 Disparität hinsichtlich des Optionstyps

Es wird grundsätzlich zwischen Kauf- und Verkaufsoptionen, die in der Fachsprache Call beziehungsweise Put genannt werden, unterschieden. Durch den Erwerb einer Kaufoption hat der Anleger das Recht, nicht jedoch die Obligation, den Basiswert zu dem durch den Optionskontrakt festgelegten Strike-Preis, der auch Basispreis genannt wird, zu kaufen. Bei einem Put handelt es sich im Gegensatz dazu um ein Recht, das Underlying um den Basispreis zu verkaufen.

2.1.3 Disparität hinsichtlich der Optionsposition

Jede Option kann erworben beziehungsweise veräußert werden. In der Finanzwirtschaft haben sich daraufhin die Begriffe „Long“ für die Käuferposition und „Short“ für die Position des Verkäufers durchgesetzt. Anders als im normalen Alltag gibt es an der

Börse folglich auch die Möglichkeit, Optionsscheine, ohne sie jemals besessen zu haben, zu verkaufen. In einem solchen Fall spricht man von einem Leerverkauf. Nach der Tötigung dieses Schrittes erÖffnen sich für den Investor in der Short-Position zwei Möglichkeiten zur Glattstellung der offenen Kontrakte. Er könnte zum einen eine Long-Position in einem äquivalenten Ausmaß eingehen. Ein anderes Szenario wäre das Abwarten auf die Ausübung eines Long-Spekulanten, was nur in einem für die Option günstigen Fall eintreten würde. Liegt dieser nicht vor, so ist die Option am Ende ihrer Laufzeit wertlos, was impliziert, dass der Inhaber der Short-Position die gesamten Erlöse aus dem Verkauf behalten kann. Sollte die Option hingegen einen inneren Wert besitzen, so ist der Inhaber der Short-Position dazu verpflichtet, das Produkt zum Strike-Preis, der folglich unvorteilhafter als der Marktpreis ist, zu liefern, beziehungsweise anzunehmen. Dieser Mechanismus kann auch als Ausgleichszahlung angesehen werden, da der Optionsgeber die Differenz zum Marktpreis leisten muss.

Für den Halter einer Long-Position ergeben sich ebenfalls zwei Möglichkeiten der Glattstellung. Dieser kann die Wertpapiere entweder verkaufen oder im Falle einer europäischen Option auf deren Verfalltag warten, um diese gegen den Inhaber der dazu entsprechenden Short-Position auszuüben.

Es existieren an der Börse folglich vier verschiedene Optionspositionen. Von jedem einzelnen Typ werden in der folgenden Sektion die jeweilige Funktion der Auszahlung am Ende der Laufzeit einer europäischen Option und das entsprechende Auszahlungsprofil angegeben, wobei der Parameter K den Basispreis und S_T den Aktienkurs am Verfalldatum angibt.

Long Call

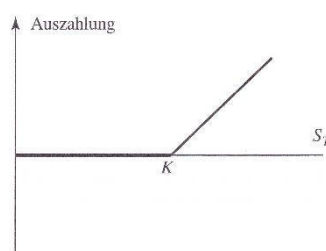


Abbildung 1: Auszahlung aus einer Long-Position in einer europäischen Call-Option

$$\max (S_T - K, 0) \quad [2.1]$$

Der Term [2.1] veranschaulicht die Auszahlung, die aus einer Long-Position in einer europäischen Call-Option resultiert, wobei $\max ()$ für die Maximumsfunktion steht. Wie Abbildung 1 zeigt, wird die Möglichkeit einer Nachzahlung des Optionsbesitzers ausgeschlossen. Außerdem geht aus der Grafik hervor, dass die maximale Auszahlung unbeschränkt ist, da das Underlying theoretisch gegen unendlich streben kann. Weiters suggeriert der Graph, dass die Option nur unter der Bedingung $S_T > K$ ausgeübt wird. Außerdem ist zu beachten, dass diese Grafik nur die Auszahlung angibt. Bei der Berechnung des wirtschaftlichen Erfolges muss noch zusätzlich die Prämie, die zu Beginn des Optionsgeschäftes an den Stillhalter gezahlt worden ist, abgezogen werden.

Short Call

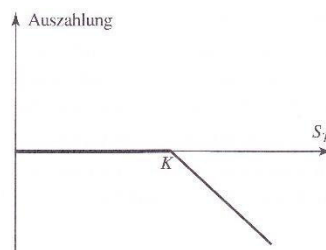


Abbildung 2: Auszahlung aus einer Short-Position in einer europäischen Call-Option

$$- \max (S_T - K, 0) = \min (K - S_T, 0) \quad [2.2]$$

Gleichung [2.2] gibt, ebenso wie die mit dieser im Zusammenhang stehende Abbildung 2, die Auszahlung an einen Investor, der eine Short-Position in einer europäischen Kaufoption hält, an. Bei dem zweiten Term handelt es sich um eine umgewandelte Form des Ausgangsterms, die aus einem fundamentalen Zusammenhang zwischen der Maximums- und der Minimumsfunktion resultiert.

Die Tatsache, dass die maximale Auszahlung null beträgt, lässt sich durch das fehlende Recht auf eine Ausübung begründen. Der Besitzer der Short-Position muss sogar im Falle $S_T > K$ den Geldbetrag $S_T - K$ an den Pendant mit der Long-Position übertragen. Weiters zeigt Abbildung 2, dass der Verlust gegen unendlich streben kann. Der

negativen oder neutralen Auszahlung steht allerdings die vom Optionsnehmer geleistete Prämie gegenüber.

Long Put

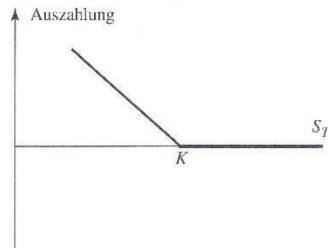


Abbildung 3: Auszahlung aus einer Long-Position in einer europäischen Put-Option

$$\max (K - S_T, 0) \quad [2.3]$$

Term [2.3] und Abbildung 3 beschreiben jeweils die Auszahlung an den Besitzer einer europäischen Put-Option. Auch hier gilt die Annahme, dass eine Nachzahlung vonseiten des Optionsnehmers auszuschließen ist. Der gravierendste Unterschied zur Long Call-Position besteht in der Endlichkeit des maximalen Gewinnes. Diese Eigenschaft lässt sich aus der Bedingung, dass der Kurs einer Aktie nicht negativ sein kann, schließen. Die Ermittlung des wirtschaftlichen Erfolges verläuft hinsichtlich der Berücksichtigung der Prämie analog zur Long Call-Position.

Short Put

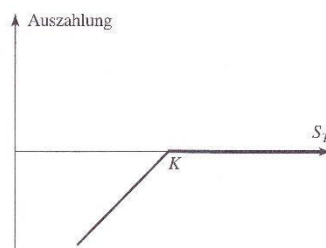


Abbildung 4: Auszahlung aus einer Short-Position in einer europäischen Put-Option

$$- \max (K - S_T, 0) = \min (S_T - K, 0) \quad [2.4]$$

Gleichung [2.4], die durch Abbildung 4 graphisch veranschaulicht wird, gibt die Auszahlung an einen Marktteilnehmer, der eine Short-Position in Verkaufsoptionen besitzt, an. Weiters ist anzumerken, dass der zweite Term von Gleichung [2.4] mit analoger Vorgehensweise zu [2.2] hergeleitet wird.

Auch in dieser Position ist der maximale Verlust durch einen nichtnegativen Aktienkurs S_T begrenzt. In weiterer Folge ist die Umkehrung der Bedingung für eine Auszahlung vonseiten des Optionsgebers anzuführen. Nun erhält der Optionsnehmer im Falle von $S_T < K$ eine Vergütung in Höhe von $K - S_T$. Auch hier bezieht der Optionsgeber seine Einnahmen aus der vom Vertragspartner geleisteten Prämie.

2.2 Stochastische Prozesse

Definition: Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, (Z, \mathcal{Z}) ein Raum, der eine σ -Algebra beinhaltet, und T eine Indexmenge, die in Anwendungen häufig die betrachteten Zeitpunkte darstellt. Ein stochastischer Prozess X kann dann als eine Familie von Zufallsvariablen $X_t: \Omega \rightarrow Z, t \in T$ aufgefasst werden. Das entspricht einer Abbildung $X: \Omega \times T \rightarrow Z, (\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$, sodass $X_t: \omega \mapsto X_t(\omega)$ für alle $t \in T$ eine \mathcal{F} - \mathcal{Z} -messbare Abbildung ist.

(vgl. Webel/Wied 2016, S. 17ff)

Es sei erwähnt, dass es sich bei Ω um den Ergebnisraum eines Zufallsversuches handelt, wobei für ein Ergebnis ω logischerweise die Aussage $\omega \in \Omega$ gilt. Der Buchstabe \mathcal{F} steht für das Ereignissystem, welches als eine σ -Algebra über die Menge Ω zu verstehen ist.

Die σ -Algebra beinhaltet nur jene Teilmengen der Grundmenge, denen auch eine Wahrscheinlichkeit P zugeordnet werden kann. Ähnliches gilt bei dem Zustandsraum Z , der alle von dem Prozess annehmbaren Werte abbildet. Die dazugehörige σ -Algebra wird mit dem Buchstaben \mathcal{Z} abgekürzt.

Die Zufallsvariable X_t zum Zeitpunkt t wird als eine Funktion mit der Definitionsmenge Ω und der Zielmenge Z aufgefasst. Die Familie dieser Zufallsvariablen, der daraus resultierende stochastische Prozess X , wird dann als eine Zuordnung erneut mit der Zielmenge Z angesehen, wobei hier das kartesische Produkt von Ω und T als

Definitionsmenge fungiert. Im nächsten Schritt impliziert die eindeutige Zuordnungsvorschrift $(\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$, dass jedem Tupel (ω, t) eine von ω abhängige Zufallsvariable X_t zugeordnet wird. Aus diesem Zusammenhang folgt die letzte in der Definition angegebene Zuordnung, $X_t: \omega \mapsto X_t(\omega)$. Die letzte Information der Definition, X_t sei eine \mathcal{F} - \mathcal{Z} -messbare Abbildung, lässt sich aus der mengentheoretischen Beschreibung einer Funktion ableiten, wonach jede Funktion f eine Teilmenge des kartesischen Produktes der Definitions- und der Zielmenge ist. Um in diesem Fall von einer messbaren Funktion sprechen zu können, muss für den zweiten Messraum, in diesem Fall $(\mathcal{Z}, \mathcal{Z})$, die Aussage $\forall A \in \mathcal{Z}: X_t^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ gelten, wobei der Ausdruck $X_t^{-1}(A)$ für das Urbild der Menge A steht. Unter dem Urbild einer Menge A versteht man in diesem Fall eine Teilmenge der Definitionsmenge, die durch die Funktion X_t auf Elemente in A abgebildet wird.

2.2.1 Standard-Wiener-Prozess

Definition: Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Angenommen es existiert eine für alle $t \geq 0$ definierte stetige Funktion $W(t)$, die die Bedingung $W(0) = 0$ erfüllt und von $\omega \in \Omega$ abhängt. Unter $W(t), t \geq 0$, wird genau dann ein (Standard-)Wiener-Prozess verstanden, wenn für alle Zeitpunkte $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$ die Zuwächse

$$W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_m) - W(t_{m-1})$$

unabhängig und mit den Parametern

$$E[W(t_{i+1}) - W(t_i)] = 0 \quad [2.5], \text{ und}$$

$$\text{Var}[W(t_{i+1}) - W(t_i)] = t_{i+1} - t_i \quad [2.6]$$

normalverteilt sind. (vgl. Shreve 2004, S. 94)

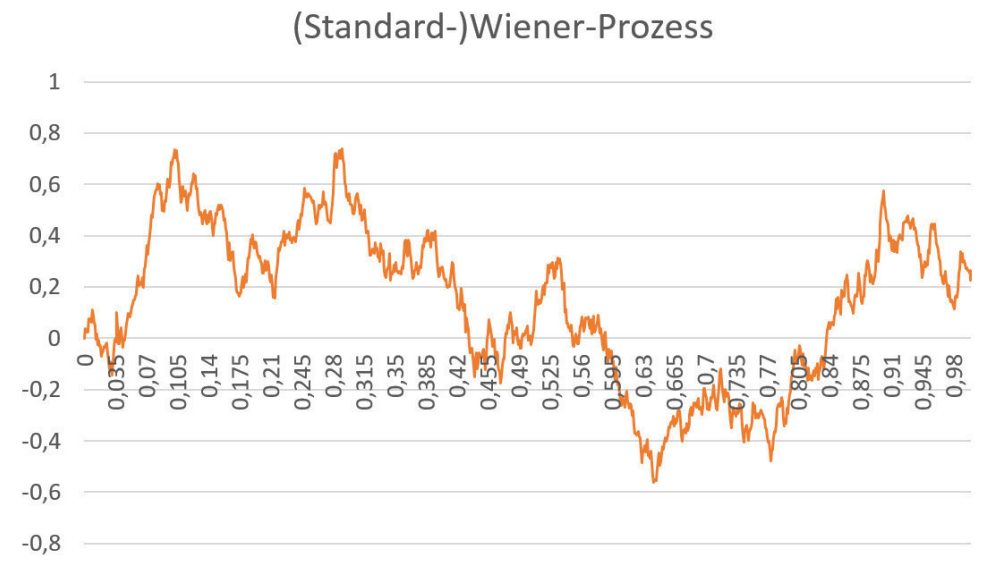


Abbildung 5: Simulation eines Wiener-Prozesses mit $\mu = 0$ und $\sigma = \sqrt{t}$ im Intervall $[0, 1]$

Diese Grafik wurde mithilfe des Programmes „Microsoft Excel 2013“ erstellt, und zeigt eine von unendlich vielen möglichen Darstellungen eines Wiener-Prozesses. Da dieses Programm das Auswählen von infinitesimalen Abständen nicht ermöglicht, handelt es sich beim obigen Graphen, bei dem als Schrittgröße 10^{-3} ausgewählt worden ist, um eine Approximation. Einzelne Zufallsvariablen W_{t_i} , $i \in \mathbb{N}$, existieren demnach nur $\forall t_i \in [0, 1] \mid i * 10^{-3} \leq 1 \wedge i * 10^{-3} = t_i$. Um die gewünschten Zufallsvariablen zu erhalten, wurde der Zellbefehl „=STANDNORMINV(ZUFALLSZAHL())*sqrt(10⁻³)“ tausendmal angewandt. Der Term sqrt(10⁻³) ist damit zu begründen, dass die Varianz mit kleiner werdendem Δt direkt proportional abnimmt, wie [2.6] zeigt. Da die Standardabweichung, das subjektiv betrachtete „anschaulichere“ Maß, der Quadratwurzel der Varianz entspricht, erhält man diese durch das Einsetzen in den Term $\sqrt{\Delta t}$. Gemäß der Definition des Wiener-Prozesses ist bei einer (in dem folgenden Fall infinitesimalen) zeitlichen Änderung des Prozesses die Standardabweichung zu beachten.

$$dW_t = \epsilon \sqrt{dt} \quad [2.7]$$

Der Gleichung [2.7] sei angefügt, dass ϵ der Standardnormalverteilung unterliegt. Aus ebenderselben Gleichung geht weiters hervor, dass es sich bei der diskretisierten Simulation lediglich um eine Annäherung handelt. Gleichung [2.7] gilt nämlich ausschließlich für unendlich kleine Zeitänderungen. Abschließend sei festgehalten, dass,

um den Wert des Prozesses zum Zeitpunkt t_m zu erhalten, folgende Rechenoperation durchgeführt worden ist: $\sum_{i=0}^m W_{t_i}$, $m \leq 1000$.

Wie Gleichung [1.5] zeigt, ist bei einem (Standard-)Wiener-Prozess der Erwartungswert mit der Zahl Null festgelegt. Das ist insofern spannend, als man in dieser Eigenschaft einen Zusammenhang mit der Standardnormalverteilung $\phi(0, 1)$ erkennen kann. Um dies zu beweisen, wird zunächst die allgemeine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Normalverteilung $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ angeführt.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad [2.8]$$

Setzt man $\mu = 0$ und $\sigma^2 = t$ in die Funktionsgleichung [2.8] ein, so erhält man die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion eines (Standard-)Wiener-Prozesses in einer Zeitspanne, die von t_m bis t_n reicht, wobei $n > m$ gilt. Der Buchstabe t gibt dann in der Formel die Differenz der beiden Zeitpunkte, also $t_n - t_m$, an.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \quad [2.9]$$

Gleichung [2.9] zeigt eine von dem Parameter t ausgehende Veränderung der Flächenverteilung unterhalb des Graphen f . Mit steigendem t nimmt die Dichte in den meisten Intervallen, die jenseits der Wendestellen $x_{W_1} = -1$ und $x_{W_2} = 1$ liegen, zu, während sie im Intervall $[-1, 1]$, dem auch der Erwartungswert μ angehört, abnimmt. Dieses Ergebnis kann auch durch eine logische Überlegung erzielt werden, da bei größer werdender Standardabweichung stärker vom Mittelwert abweichende Zahlen wahrscheinlicher werden. Außerdem kann man bei der Betrachtung dieser geometrisch verlaufenden Funktion Gleichung [2.5] verifizieren. Setzt man die erste Ableitung von $f(x)$ gleich null, so erhält man $x = 0$ als reelle Maximumstelle. Unter der Prämisse einer geometrischen Verteilung entspricht dieses Maximum dem Erwartungswert.

Wiener-Prozess als Martingal

Definition: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, T eine beliebige, geordnete Indexmenge und $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ eine Filtrierung. Man spricht bei einem integrierbaren, an \mathbb{F} adaptierten stochastischen Prozess $X = (X_t)_{t \in T}$

genau dann von einem Martingal bezüglich \mathbb{F} , wenn für alle $s > t$ gilt
 $E(X_s|\mathcal{F}_t) = X_t$.

Die obige Definition impliziert, dass ein Martingal als eine Verallgemeinerung eines „fairen Spieles“ angesehen werden kann. Im Falle eines Standard-Wiener-Prozesses kann man also festhalten, dass die Wahrscheinlichkeiten für einen Anstieg beziehungsweise einen Abfall verglichen mit dem Wert eines Wiener-Prozesses zu einem Zeitpunkt t im Intervall $]t, \infty[$ gleich groß sind.

Weiters sei erwähnt, dass es sich bei \mathbb{F} um eine Familie von Unter- σ -Algebren von A , der σ -Algebra über die Ergebnismenge Ω , handelt. Eine Filtrierung kann also als eine Modellierung der zum Zeitpunkt t vorhandenen Informationen über den vorausgehenden Verlauf des stochastischen Prozesses angesehen werden.

In dem folgenden Abschnitt wird unter der Annahme $0 \leq t \leq s$ bewiesen, dass es sich bei einem Wiener-Prozess mit $\mu = 0$ und $\sigma^2 = t$ tatsächlich um ein Martingal handelt.

$$\begin{aligned} E[W(s)|\mathcal{F}(t)] &= E[W(s) - W(t) + W(t)|\mathcal{F}(t)] \\ &= E[W(s) - W(t)] + W(t) \\ &= W(t) \end{aligned} \quad (\text{vgl. Shreve 2004, S. 98})$$

2.2.2 Allgemeiner Wiener-Prozess

Unter einem allgemeinen Wiener-Prozess versteht man einen Standard-Wiener-Prozess, dessen Standardabweichung durch den Vorfaktor b und dessen Erwartungswert durch den Term at beeinflusst wird, wobei a und b Konstanten sind.

Allgemeiner Wiener-Prozess

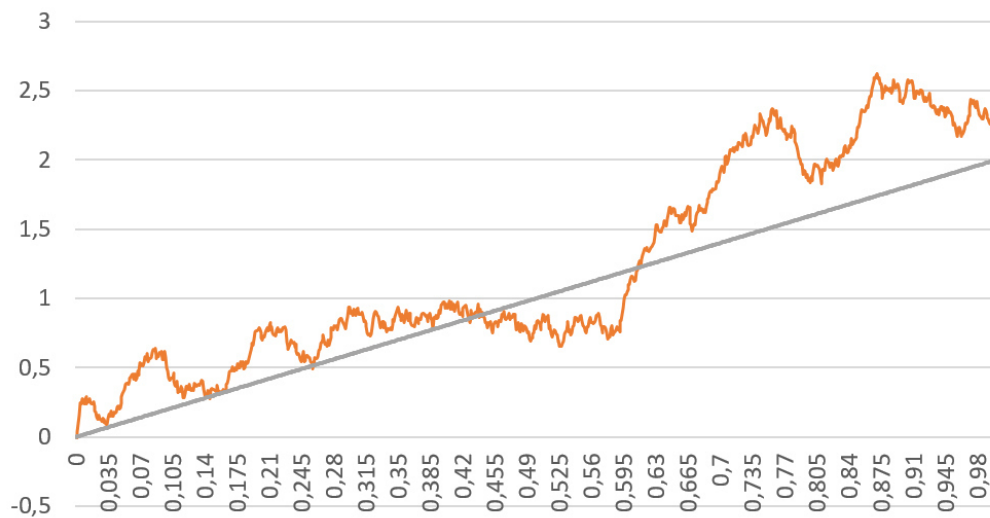


Abbildung 6: Allgemeiner Wiener-Prozess (orange) mit $a = 2$ und $b = 1$

Für dieses mit dem Programm „Microsoft Excel 2013“ generierte Diagramm wurden dieselben Zellbefehle wie bei Abbildung 5 verwendet, wobei gemäß des Terms $a\Delta t$ zu jeder Zufallsvariable W_{t_i} die rationale Zahl 0,002 addiert wurde, sodass $\sum_{i=1}^{1000} a(t_i - t_{i-1}) = 2 = E[X(t = 1)]$. Abbildung 6 zeigt, wie erwartet, dass sich der stochastische Prozess am Graphen der linearen Funktion $f(t) = at$ „orientiert“.

$$dX = a dt + b dz \quad [2.10]$$

Der Vorfaktor a in Gleichung [2.10] wird auch als Driftrate bezeichnet und kann als die durchschnittliche Änderung von dX pro Zeiteinheit interpretiert werden. Aufgrund der Tatsache, dass a eine Konstante ist, kann der Term at als eine lineare Funktion, die von $t = 0$ ausgehend den Erwartungswert des Wiener Prozesses zum Zeitpunkt t angibt, verstanden werden.

Der Term $b dz$ beschreibt die Unsicherheit von dX , wobei die Konstante b die Variabilität des Standard-Wiener-Prozesses $dz = \epsilon \sqrt{dt}$ beeinflusst. Die Zufallsvariable ϵ ist in diesem Fall normalverteilt mit $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$.

(vgl. Weber 2013, S. 211)

Itô-Prozess

Unter einem Itô-Prozess versteht man einen allgemeinen Wiener-Prozess, dessen Parameter a und b als Funktionen der Zeit t und der zugrunde liegenden Variablen X aufgefasst werden können.

$$dX = a(X, t)dt + b(X, t)dz \quad [2.11]$$

Diese in Gleichung [2.11] gezeigte Abhängigkeit der Parameter von X und t ist eine wichtige Eigenschaft, die zum Beispiel bei der Modellierung von stochastischen Prozessen für die zukünftige Entwicklung von Aktienkursen von größter Wichtigkeit ist.

In Bezug auf die Modellierung des Aktienkurses S müssen zwei weitere Parameter eingeführt werden: μ und σ . Der griechische Buchstabe μ steht für die jährlich erwartete Rendite. Diese Größe wird als Konstante angesehen und kann als Quotient aus der erwarteten absoluten Änderung des Aktienkurses und dem Aktienkurs selbst verstanden werden. Die Standardabweichung der Rendite, σ , wird in diesem Kontext Volatilität genannt. Für diese gilt allerdings nicht $\sigma = b$, da, um den Parameter b zu bestimmen, auch der Aktienkurs zu berücksichtigen ist. Aufgrund dieser Zusammenhänge ergibt sich folgende stochastische Differentialgleichung für den Aktienkurs S (vgl. Hull 2015, S. 388f):

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad [2.12]$$

Gleichung [2.12] verdeutlicht, dass $a = \mu S$ und $b = \sigma S$ gilt. Da jedoch S einem stochastischen Prozess unterliegt, können die Vorfaktoren a und b nicht als konstant angesehen werden, weshalb die Hypothese, S folge einem allgemeinen Wiener-Prozess, zu falsifizieren ist.

Der Itô-Prozess, der Gleichung [2.12] beschreibt, lautet in der in [2.11] angewandten Schreibweise

$$dS = a(S, t)dt + b(S, t)dz.$$

2.3 Das Lemma von Itô

2.3.1 Quadratische Variation

Definition: Sei f eine für $0 \leq t \leq T$ definierte Funktion, $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ eine

Folge von Zeitpunkten, die im Intervall $[0, T]$ liegen, und $\|\Pi\| = \max_{j=0, \dots, n-1} (t_{j+1} - t_j)$. So ist die quadratische Variation von f zum Zeitpunkt T

$$[f, f](T) = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} [f(t_{j+1}) - f(t_j)]^2,$$

wobei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ gilt. (vgl. Shreve 2004, S. 99ff)

Zusammenfassend wird festgehalten, dass es sich bei der quadratischen Variation um die Summe aller quadrierten Wertänderungen in infinitesimalen Zeitintervallen, die im Intervall $[0, T]$ liegen, handelt.

Nun wird die quadratische Variation, in diesem Fall $Q_{\Pi \rightarrow 0}$, eines Standard-Wiener-Prozesses berechnet. Dieses Resultat ist für die im nächsten Kapitel angeführte Herleitung von Itô's Lemma für einen Itô-Prozess von größter Wichtigkeit.

$$Q_{\Pi} = \sum_{j=0}^{n-1} [W(t_{j+1}) - W(t_j)]^2$$

Zunächst wird der Erwartungswert für die quadratische Variation des zuvor genannten stochastischen Prozesses ermittelt.

$$E \left[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 \right] = \text{Var}[W(t_{j+1}) - W(t_j)] = t_{j+1} - t_j \quad [2.13]$$

Aus dem Erwartungswert pro Summand folgt durch Aufsummieren der Erwartungswert für das Intervall $[0, T]$.

$$EQ_{\Pi} = \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) = T$$

Nun wird die Formel der Varianz von Q_{Π} hergeleitet.

$$\text{Var} \left[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 \right] = E \left[\left((W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 - (t_{j+1} - t_j) \right)^2 \right]$$

Anschließend wird ausquadriert und vereinfacht und man erhält

$$\text{Var} \left[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 \right] = 2(t_{j+1} - t_j)^2. \quad [2.14]$$

Mit dieser Erkenntnis wird nun analog zu der in [2.13] verfahren, um Aussage [2.14] auf das Intervall $[0, T]$ auszuweiten.

$$\text{Var}(Q_\Pi) = \sum_{j=0}^{n-1} 2(t_{j+1} - t_j)^2 \leq \sum_{j=0}^{n-1} 2\|\Pi\|(t_{j+1} - t_j) = 2\|\Pi\|T$$

Aus dem letzten Term folgt, dass im Falle einer Konvergenz von $\|\Pi\|$ gegen null, auch $\text{Var}(Q_\Pi)$ gegen null konvergiert. Aufgrund der Tatsache, dass

$$\lim_{\Pi \rightarrow 0} Q_\Pi = [W, W](T) = T \quad [2.15]$$

gilt, ist die quadratische Variation über einen Zeitraum $[0, T]$ als konstant einzustufen. Folglich handelt es sich hierbei um keine Zufallsgröße (vgl. Lawler 1995, S. 170f).

Die Ungleichung am Ende der Herleitung resultiert aus der Überlegung, dass das Produkt $2\|\Pi\|(t_{j+1} - t_j)$ aufgrund der Eigenschaft von $\|\Pi\|$, die größte Schrittgröße hinsichtlich der Zeit zu sein, nicht kleiner als der Term $2(t_{j+1} - t_j)^2$ sein kann. Folglich gilt, unter der Prämisse, dass eine negative Varianz ausgeschlossen ist, dass auch die linke Seite der Ungleichung im Falle von $\|\Pi\| \rightarrow 0$ gegen null konvergiert.

2.3.2 Weitere Variationen am Beispiel des Standard-Wiener-Prozesses

In diesem Abschnitt werden die Kreuzvariation von $W(t)$ und t und die quadratische Variation von t berechnet. Zunächst wird durch eine Ungleichung gezeigt, dass die Kreuzvariation von $W(t)$ und t

$$\lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} (W(t_{j+1}) - W(t_j))(t_{j+1} - t_j)$$

die Zahl Null als Grenzwert besitzt.

$$|(W(t_{j+1}) - W(t_j))(t_{j+1} - t_j)| \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} |W(t_{k+1}) - W(t_k)|(t_{j+1} - t_j)$$

$$\left| \sum_{j=0}^{n-1} (W(t_{j+1}) - W(t_j))(t_{j+1} - t_j) \right| \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} |W(t_{k+1}) - W(t_k)| \cdot T$$

Da erneut $\|\Pi\| \rightarrow 0$ gilt und W stetig ist, hat der Ausdruck $\max_{0 \leq k \leq n-1} |W(t_{k+1}) - W(t_k)|$ die Zahl Null als Grenzwert.

Ein ähnliches Beweisschema wird bei der quadratischen Variation von t angewandt.

$$\sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j)^2 \leq \|\Pi\| \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) = \|\Pi\| \cdot T \quad [2.16]$$

Diese hat aufgrund der Konvergenz von $\|\Pi\|$ gegen null ebenfalls null als Limit.

Die folgenden Zusammenhänge können aus den drei vorangegangenen Variationen geschlossen werden:

$$dW(t) dW(t) = dt, \quad dW(t) dt = 0, \quad dt dt = 0 \quad [2.17]$$

Diese werden später in der Herleitung von Itô's Lemma von großer Bedeutung sein.

2.3.3 Herleitung von Itô's Lemma für einen Itô-Prozess

Zunächst definieren wir einen Itô-Prozess in Integralform, wobei $X(0)$ keiner Zufallszahl entspricht und $W(t)$, $t \geq 0$, für einen Standard-Wiener-Prozess steht. Weiters sind $b(u)$ und $a(u)$ adaptierte stochastische Prozesse und $\mathcal{F}(t)$, $t \geq 0$, eine Filtration.

$$X(t) = X(0) + \int_0^t b(u) dW(u) + \int_0^t a(u) du$$

Nun wird derselbe Ausdruck in Differentialschreibweise angeführt.

$$dX(t) = b(t) dW(t) + a(t) dt \quad [2.18]$$

Diese Gleichung ist mit der stochastischen Differentialgleichung [2.11] vergleichbar, stehen sie ja beide für Itô-Prozesse. Um nun die quadratische Variation von $X(t)$ zu erhalten, wird [2.18] quadriert und anschließend mithilfe von [2.17] simplifiziert.

(vgl. Shreve 2004, S. 143f)

$$dX(t) dX(t) = b^2(t) dW(t) dW(t) + 2a(t) b(t) dW(t) dt + a^2(t) dt dt = b^2(t) dt \quad [2.19]$$

Aus dieser Differentialgleichung kann geschlossen werden, dass die quadratische Variation über das Zeitintervall $[0, t]$ durch das Einsetzen in [2.20] erhalten wird.

$$[X, X](t) = \int_0^t b^2(u) du \quad [2.20]$$

Das Integral in [2.20] ist als eine aus unendlich kleinen Summanden bestehende Summe zu verstehen. Die Behauptung, die einzelnen Summanden seien unendlich klein, lässt sich aus du ableiten. Außerdem lässt sich aus [2.20] schließen, dass die quadratische Variation des Itô-Prozesses pro Zeiteinheit um $b^2(t)$ zunimmt.

Nun wird eine Funktion, deren Variablen t und $X(t)$ sind, gemäß des Taylor'schen Lehrsatzes modelliert, wobei alle partiellen Ableitungen von f definiert und stetig sind.

$$\begin{aligned}
 & f(T, X(T)) - f(0, X(0)) \\
 &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial f(t_j, X(t_j))}{\partial t} (t_{j+1} - t_j) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial f(t_j, X(t_j))}{\partial x} (X(t_{j+1}) - X(t_j)) \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 f(t_j, X(t_j))}{\partial x^2} (X(t_{j+1}) - X(t_j))^2 \\
 &+ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 f(t_j, X(t_j))}{\partial x \partial t} (X(t_{j+1}) - X(t_j)) (t_{j+1} - t_j) \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 f(t_j, X(t_j))}{\partial t^2} (t_{j+1} - t_j)^2 + \text{Terme höherer Ordnung}
 \end{aligned}$$

Nun werden die Grenzwerte der einzelnen Summanden berechnet. Für den ersten Term der rechten Seite der Gleichung lautet dieser

$$\int_0^T \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial t} dt.$$

Dieser Term ist also auf jeden Fall verschieden von null und daher von Bedeutung.

Für den darauffolgenden Summanden gilt für den Grenzwert weiters

$$\int_0^T \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial x} dX(t) = \int_0^T \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial x} b(t) dW(t) + \int_0^T \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial x} a(t) dt.$$

Auch hier ist der Grenzwert nicht null. Als Erklärung für die Aufteilung des Integrals ist der in [2.18] präsentierte Zusammenhang anzuführen.

Als Nächstes ist der Grenzwert des dritten Summanden zu betrachten.

$$\frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial^2 f(t, X(t))}{\partial x^2} dX(t) dX(t) = \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial^2 f(t, X(t))}{\partial x^2} b^2(t) dt \quad [2.21]$$

Es ist hierbei spannend, dass das Differential $dX(t) dX(t)$ exakt der quadratischen Variation des Itô-Prozesses entspricht. Da das Resultat dieses Ausdruckes in [2.19] bestimmt worden ist, kann $dX(t) dX(t)$ einfach durch $b^2(t) dt$ ersetzt werden. Aufgrund der Tatsache, dass die beiden Terme einander entsprechen und die Abänderung damit ohne entstehenden Fehler durchgeführt werden kann, ist es nun legitim, die Hypothese, dass eine Fortführung der Entwicklung der Taylorreihe nicht mehr notwendig ist, aufzustellen. Um diese Behauptung zu verifizieren, wird der Grenzwert des vierten Terms in eine Ungleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned} & \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 f(t_j, X(t_j))}{\partial x \partial t} (X(t_{j+1}) - X(t_j)) (t_{j+1} - t_j) \right| \\ & \leq \underbrace{\lim_{\|\Pi \rightarrow 0\|} \max_{0 \leq k \leq n-1} |X(t_{k+1}) - X(t_k)|}_{=0} \cdot \lim_{\|\Pi \rightarrow 0\|} \sum_{j=0}^{n-1} \left| \frac{\partial^2 f(t_j, X(t_j))}{\partial x \partial t} \right| (t_{j+1} - t_j) = 0 \end{aligned}$$

Da der vierte Term tatsächlich null ist, lässt sich nun Itô's Lemma für einen Itô-Prozess allgemein definieren.

Definition Sei $X(t)$ ein Itô-Prozess gemäß [2.18], $t \geq 0$, und $f(t, X)$ eine Funktion, deren für diese Aussage relevanten partiellen Ableitungen stetig und definiert sind. Es gilt dann für jedes $T \geq 0$ (vgl. Shreve 2004, S. 146)

$$\begin{aligned} f(T, X(T)) &= f(0, X(0)) + \int_0^T \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial t} dt + \int_0^T \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial x} b(t) dW(t) \\ &+ \int_0^T \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial x} a(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial^2 f(t, X(t))}{\partial x^2} b^2(t) dt. \quad [2.22] \end{aligned}$$

Abschließend wird die in [2.22] dargestellte Erkenntnis in Differentialschreibweise angeführt.

$$\begin{aligned} df(t, X(t)) &= \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial t} dt + \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial x} b(t) dW(t) + \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial x} a(t) dt \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, X(t))}{\partial x^2} b^2(t) dt \quad [2.23] \end{aligned}$$

3 Das Black-Scholes-Merton-Modell

3.1 Herleitung der Black-Scholes-Merton-Differentialgleichung

Fischer Black und Myron Scholes veröffentlichten im Jahre 1973 unter der Mitarbeit von Robert C. Merton einen wissenschaftlichen Artikel, welcher sich der Bewertung von Aktienoptionen widmete, im Magazin „The Journal of Political Economy“. Zunächst wurde eine auf Itô's Lemma basierende Differentialgleichung, der sieben Annahmen zugrunde liegen, aufgestellt.

- Der Aktienkurs folgt dem in [2.12] präsentierten Prozess, wobei die Parameter μ und σ als konstant angenommen werden.
- Es ist erlaubt, alle aus einem Leerverkauf hervorgehenden Mittel zu verwenden.
- Es fallen keine Steuern und Transaktionskosten an.
- Alle Wertpapiere sind beliebig teilbar.
- Es fallen während der Laufzeit keine Dividendenzahlungen an.
- Risikolose Arbitragemöglichkeiten werden ausgeschlossen.
- Der Handel von Wertpapieren findet ständig statt.
- Der risikolose Zinssatz r ist konstant und identisch für alle Laufzeiten der Option.

(vgl. Hull 2015, S. 415)

Nun wird Itô's Lemma auf [2.12] angewandt und dt herausgehoben. Weiters sei erwähnt, dass f dem Preis einer Kaufoption entspricht. Daraus folgt

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz. \quad [3.1]$$

Im nächsten Schritt wird der Wert eines risikolosen Portfolios Π modelliert, wobei eine Short-Position in einem Derivat und eine Long-Position in Aktien vorliegen.

$$P = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \quad [3.2]$$

Die Änderung des Wertes des Portfolios in einem Zeitabstand Δt ergibt sich mithilfe der Gleichungen [2.12] und [3.1] und die dazugehörige Gleichung lautet

$$\Delta P = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t. \quad [3.3]$$

Das Portfolio ist insofern risikolos, als [3.3] den stochastischen Wiener-Prozess z nicht enthält. Nun wird davon ausgegangen, dass die relative Wertänderung des Portfolios im Intervall Δt genau dem risikolosen Zinssatz r multipliziert mit Δt entspricht, sodass von einem Ausschluss von Arbitragemöglichkeiten hinsichtlich anderer risikoloser Wertpapiere gesprochen werden kann. Es folgt

$$\Delta P = rP\Delta t.$$

Durch das Einsetzen von [3.2] und [3.3] und anschließende Vereinfachung erhält man die Black-Scholes-Merton-Differentialgleichung.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad [3.4]$$

3.2 Lösung der Black-Scholes-Merton-Differentialgleichung

Da es für diese Differentialgleichung mehrere Lösungen gibt, ist das Definieren einer Randbedingung unabdinglich. Black und Scholes (1973) kommen zu dem Schluss, dass es sich bei [2.1] im Falle eines europäischen Calls um eine geeignete Randbedingung handelt, sodass es nur eine Lösung gibt. Folglich muss diese Lösung dann dem Wert einer europäischen Call-Option entsprechen.

Nun gelten die folgenden Zusammenhänge:

$$f(S, t) = K\vartheta(x, \tau), \quad x = \ln\left(\frac{S}{K}\right), \quad \tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t).$$

Weiters ist anzumerken, dass T dem Verfalldatum entspricht. Im nächsten Schritt werden die partiellen Ableitungen berechnet.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = K \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = K \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} \cdot \frac{-\sigma^2}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial S} = K \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dS} = K \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot \frac{1}{S}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial f}{\partial S} \right) = K \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{-1}{S^2} + K \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{S^2}$$

Die erhaltenen Terme werden in [3.4] eingesetzt und anschließend vereinfacht.

Außerdem wird der eine Konstante darstellende Term $\frac{r}{\sigma^2/2}$ mit dem Buchstaben

k zusammengefasst. Man erhält

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1) \frac{\partial v}{\partial x} - kv. \quad [3.5]$$

Nun erfolgt eine weitere Substitution, wobei die Koeffizienten α und β noch zu bestimmen sind.

$$v = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) \quad [3.6]$$

Zunächst werden alle in [3.5] vorkommenden Ableitungen bestimmt und anschließend

in [3.5] eingesetzt. Anschließend wird der Faktor $e^{\alpha x + \beta \tau}$ gekürzt und man erhält

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k-1) \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - ku. \quad [3.7]$$

Wählt man $\alpha = -\frac{k-1}{2}$ und $\beta = -\frac{(k+1)^2}{4}$, so vereinfacht man [3.7] zu

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad [3.8]$$

Mit dieser Entscheidung geht eine Änderung der Form der Randbedingung einher. Diese

lautete zu Beginn $f(S, T) = \max(S_T - K, 0) = \max(Ke^x - K, 0)$. Da $f(S, T) =$

$Kv(x, 0)$ gilt, wird $v(x, 0)$ durch die Maximumsfunktion $\max(e^x - 1, 0)$ beschrieben.

Verwendet man dieses Resultat im Hinblick auf [3.6], so erhält man

$$u(x, 0) = e^{-\left(-\frac{(k-1)}{2}\right)x - \left(-\frac{(k+1)^2}{4}\right) \cdot 0} v(x, 0) = \max\left(e^{\left(\frac{(k+1)}{2}\right)x} - e^{\left(\frac{(k-1)}{2}\right)x}, 0\right). \quad [3.9]$$

Außerdem zeigt [3.9], dass $u(x, 0) = u_0(x) > 0$ für alle $x > 0$ gilt. Aufgrund der

Eigenschaften der in [3.9] verwendeten Maximumsfunktion gilt außerdem $u_0(x) = 0$

für $x \leq 0$. Diese Zusammenhänge werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit in Bezug

auf die Verschiebung von Integrationsgrenzen von großer Wichtigkeit sein.

Da [3.8] der Wärmeleitungsgleichung entspricht, kann die von Churchill (1963, S. 155)

ermittelte Lösung übernommen werden. Diese lautet

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds, \tau \geq 0, -\infty < x < +\infty.$$

Im nächsten Schritt wird die Variablensubstitution $z = \frac{(s-x)}{\sqrt{2\tau}}$ durchgeführt, wobei z nicht mit einem Wiener-Prozess zu verwechseln ist. Diese Substitution impliziert außerdem, dass $dz = \left(\frac{1}{\sqrt{2\tau}}\right) ds$ gilt. Durch das Einsetzen dieser Resultate und das anschließende Vereinfachen erhält man

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(z\sqrt{2\tau} + x) e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \quad [3.10]$$

Es ist zu beachten, dass die bei der Substitution des Differentials entstehende multiplikative Konstante $\sqrt{2\tau}$ vor das Integral gestellt werden kann.

Wie im sich auf [3.9] beziehenden Absatz gezeigt wird, muss nur über den Bereich, für den $u_0 > 0$ gilt, integriert werden. Die zuvor genannte Eigenschaft trifft von [3.10] ausgehend auf alle $z > -\frac{x}{\sqrt{2\tau}}$ zu. Ersetzt man u_0 durch die Differenz, die ein Element der Maximumsfunktion in [3.9] darstellt, und setzt man in diese statt x den durch die Substitution entstandenen Term $z\sqrt{2\tau} + x$ ein, so erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{\frac{k+1}{2}(z\sqrt{2\tau}+x)} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{\frac{k-1}{2}(z\sqrt{2\tau}+x)} e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \quad [3.11]$$

Von nun an werden die beiden Integrale mit I_1 und I_2 bezeichnet, sodass eine effizientere Sprache gewährleistet werden kann. Es gilt also $u(x, \tau) = I_1 - I_2$.

In [3.11] ist bereits jeweils eine Ähnlichkeit der Integrale mit einer kumulativen Verteilungsfunktion zu erkennen. Um dies zu verdeutlichen, werden zunächst die beiden Exponenten von I_1 auf ein gemeinsames, vollständiges Quadrat ergänzt. Dieses ergibt sich folgendermaßen

$$\frac{k+1}{2}(z\sqrt{2\tau} + x) - \frac{z^2}{2} = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(z - \sqrt{\tau/2}(k+1)\right)^2 + \frac{(k+1)x}{2} + \frac{(k+1)^2\tau}{4}.$$

Danach kann man I_1 umschreiben.

$$I_1 = \frac{e^{\frac{(k+1)x}{2} + \frac{(k+1)^2\tau}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(z - \sqrt{\tau/2}(k+1)\right)^2} dz \quad [3.12]$$

Im Anschluss daran wird ein weiteres Mal eine Variablensubstitution durchgeführt. In diesem Fall gilt $y = z - \sqrt{\tau/2}(k + 1)$. Da aus diesem Zusammenhang $dz = dy$ hervorgeht, bedarf es im Zuge dieser Substitution lediglich einer Änderung der Integrationsgrenzen. Es folgt aus [3.12]

$$I_1 = \frac{e^{\frac{(k+1)x}{2} + \frac{(k+1)^2\tau}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau} - \sqrt{\tau/2}(k+1)}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Das Intervall für die Integration wird insofern erweitert, als es sich bei y um eine Variable handelt, die genau um $\sqrt{\tau/2}(k + 1)$ kleiner als die zuvor verwendete Variable z ist.

Nach diesem Schritt ist nun deutlich zu erkennen, dass aufgrund der Symmetrie des Integrals eine kumulative Verteilungsfunktion vorliegt. Diese lautet dann

$$\Phi(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad [3.13]$$

wobei $d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \sqrt{\frac{\tau}{2}}(k + 1)$ gilt.

Im nächsten Schritt wird [3.11] mithilfe der Resultate aus [3.12] und [3.13] angeschrieben.

$$u(x, \tau) = e^{\frac{(k+1)x}{2} + \frac{(k+1)^2\tau}{4}} \Phi(d_1) - e^{\frac{(k-1)x}{2} + \frac{(k-1)^2\tau}{4}} \Phi(d_2) \quad [3.14]$$

Hierbei ist zu beachten, dass $d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \sqrt{\frac{\tau}{2}}(k + 1)$ und $d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \sqrt{\frac{\tau}{2}}(k - 1)$ gilt.

Anschließend kann mit der Resubstitution begonnen werden. Zuerst wird [3.14] in den Ausdruck $v(x, \tau) = e^{-\frac{(k-1)x}{2} - \frac{(k+1)^2\tau}{4}} u(x, \tau)$ eingesetzt. Nach Vereinfachung erhält man $v(x, \tau) = e^x \Phi(d_1) - e^{-k\tau} \Phi(d_2)$.

Nun setzt man in $f(S, t) = K v(x, \tau)$ ein. Anschließend führt man folgende

Resubstitutionen $x = \ln\left(\frac{S}{K}\right)$, $\tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t)$ und $k = \frac{r}{\sigma^2/2}$ durch und vereinfacht erneut. Das Ergebnis entspricht der Black-Scholes-Merton-Formel zur Bepreisung einer europäischen Call-Option. Diese lautet:

$$f_{Call}(S, t) = S \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{S}{K} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \right) - K e^{-r(T-t)} \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{S}{K} \right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \right)$$

Die Black-Scholes-Merton-Formel wird allerdings häufiger in der folgenden Form angegeben:

$$f_{Call}(S, t) = S \cdot \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \cdot \Phi(d_2), \text{ wobei}$$

$$d_1 = \frac{\ln \left(\frac{S}{K} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \text{ und}$$

$$d_2 = \frac{\ln \left(\frac{S}{K} \right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}. \quad [3.15]$$

Analog dazu kann der Preis einer europäischen Verkaufsoption nach Black, Scholes und Merton durch Einsetzen in

$$f_{Put}(S, t) = K e^{-r(T-t)} \cdot \Phi(-d_2) - S \cdot \Phi(-d_1) \quad [3.16]$$

ermittelt werden.

3.3 Interpretation der Bewertungsformel

Aufgrund der Einfachheit wird zunächst die Bedeutung des Subtrahenden $K e^{-r(T-t)} \cdot \Phi(d_2)$ erläutert. Es handelt sich im Falle $\Phi(d_2)$ nämlich um die Wahrscheinlichkeit, dass die Option ausgeübt wird. Im Falle einer Call-Option lautet das Ereignis, für die die zuvor erwähnte Wahrscheinlichkeit gilt, $S_T > K$, wobei S_T für den Aktienkurs zum Verfalltermin der Option steht. Um nun zu zeigen, dass $\Phi(d_2)$ tatsächlich der Wahrscheinlichkeit einer Ausübung entspricht, muss d_2 aus [3.15] herangezogen werden. $\ln \left(\frac{S}{K} \right)$ zeigt an, welchen Exponenten x man der Zahl e zuordnen muss, sodass $S = K e^x$ gilt. Der Betrag von x gibt also Auskunft über den Abstand des Aktienkurses vom Strike-Preis. Der zweite Summand im Zähler entspricht dann der erwarteten

logarithmierten (= stetigen) Rendite der Aktie über die verbleibende Laufzeit der Option $(T - t)$. Diese ist pro Jahr mit $\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)$ zu beziffern. Dieser Zusammenhang resultiert aus der Tatsache, dass die Aktienkurse lognormalverteilt sind, was bedeutet, dass die logarithmierten Renditen normalverteilt sind.

Um diese Aussage zu beweisen, wenden wir Itô's Lemma auf den Prozess $G = \ln S$ an (vgl. Hull 2015, S. 395f).

Nach dem Einsetzen der partiellen Ableitungen in die rechte Seite von [3.1] und nach dem Vereinfachen erhält man für den Prozess G :

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dz$$

Die Änderung eines logarithmierten Aktienkurses im Zeitraum $[0, T]$ folgt dann einer Normalverteilung.

$$\frac{\ln S_T}{\ln S_0} \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right)$$

Da im Black-Scholes-Merton-Modell $\mu = r$ gilt, wurde gezeigt, dass der zweite Summand des Zählers von d_2 tatsächlich der erwarteten stetigen Rendite entspricht.

$\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)$ und der Nenner, die Volatilität $\sigma\sqrt{T - t}$, können dann als ein Mittel, welches die Standardisierung von $\ln\left(\frac{S}{K}\right)$ ermöglicht, verstanden werden. Dies hat zur Folge, dass d_2 standardnormalverteilt ist.

Der gesamte Term $Ke^{-r(T-t)} \cdot \Phi(d_2)$ entspricht dem diskontierten Erwartungswert der zu leistenden Zahlung. Eine Zahlung, die zu dem Erwerb der Aktien zum Preis K führt, erfolgt nur dann, wenn die Option am Ende ihrer Laufzeit einen Wert besitzt. Da eine wertlose Option mit keiner Zahlung einhergeht, kann diese Möglichkeit bei der Berechnung des Erwartungswertes außen vor gelassen werden.

Außerdem ist anzumerken, dass $e^{-r(T-t)}$ dem Diskontierungsfaktor auf den heutigen Barwert entspricht. Der Basispreis K wird also mithilfe des risikolosen Zinssatzes auf das heutige Datum zurückgerechnet.

Aus logischen Überlegungen geht hervor, dass $S \cdot \Phi(d_1)$ dem diskontierten erwarteten Wert der zu erhaltenden Aktien im Falle von $S_T \geq K$ entspricht. Um dies zu beweisen, wird eine Funktion \mathcal{S} definiert:

$$S = \begin{cases} S_T & S_T \geq K \\ 0 & S_T < K. \end{cases} \quad [3.17]$$

Da es, wie [3.17] zeigt, essentiell ist, die Wahrscheinlichkeit für die Ausübung miteinzubeziehen, kann $\Phi(d_2)$ als Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion herangezogen werden. Aufgrund dieser Überlegungen erhält man

$$E(S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} S e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + y\sigma\sqrt{T-t}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Nach einer Ergänzung auf ein vollständiges Quadrat lautet der Erwartungswert von S

$$E(S) = \frac{S e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{(y - \sigma\sqrt{T-t})^2}{2}} dy.$$

Nun wird vereinfacht und die Variablensubstitution $z = y - \sigma\sqrt{T-t}$ durchgeführt. Anschließend müssen ähnlich wie in [3.12] die Integrationsgrenzen verschoben werden. Da z um $\sigma\sqrt{T-t}$ kleiner als y , kann der Integrationsbereich für z um $\sigma\sqrt{T-t}$ erweitert werden. Es folgt

$$E(S) = \frac{S e^{r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2 + \sigma\sqrt{T-t}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Diese Gleichung kann nun durch das Zusammenfassen des Integrals zu einer kumulativen Verteilungsfunktion vereinfacht werden. Es resultiert

$$E(S) = S e^{r(T-t)} \Phi(d_2 + \sigma\sqrt{T-t}). \quad [3.18]$$

[3.18] wird nun ebenso wie der Basispreis K auf den heutigen Barwert diskontiert. Außerdem zeigt [3.15], dass $d_2 + \sigma\sqrt{T-t}$ der Integrationsgrenze d_1 entspricht. Nach der Umsetzung dieser Schritte ergibt sich endgültig der Minuend der Black-Scholes-Merton-Formel zur Bewertung einer Call-Option europäischer Natur:

$$S\Phi(d_1).$$

Da es sich bei einer Put-Option hingegen um ein Verkaufsrecht handelt, müssen die Vorzeichen der beiden Terme der Bewertungsformel für eine Call-Option vertauscht werden. Schließlich ist es ja das Ziel, Aktien zu einem relativ geringen Preis zu kaufen und diese dann aufgrund der Option zum Basispreis verkaufen zu können. Um nun

endgültig [3.16] zu erhalten, müssen noch die Vorzeichen der Integrationsgrenzen d_1 und d_2 geändert werden. Dieser Schritt ist dadurch zu begründen, dass die Wahrscheinlichkeit, eine Put-Option auszuüben, genau der Wahrscheinlichkeit, eine Call-Option nicht auszuüben, entspricht.

3.4 Graphische Darstellung der BSM-Bewertungsformel anhand eines Beispiels

Nachdem nun die wichtigsten Zusammenhänge erläutert worden sind, gilt es, die Bewertungsformel nach Black, Scholes und Merton zu visualisieren.

Hierfür eignet sich erneut das Programm „Microsoft Excel 2013“ hervorragend. Die auf der nächsten Seite folgende Abbildung zeigt den Wert einer europäischen Call-Option mit Basispreis $K = 100$ \$, deren Underlying einer Aktie mit $r = 0,1$ und $\sigma = 0,2$ entspricht. Die gezeigte Funktion ist sowohl von der Restlaufzeit als auch von dem aktuellen Aktienkurs abhängig, wobei die Definitionsbereiche mit $t \in [0, 1]$, t in Jahren, und $S \in [0, 200]$, S in Dollar, festgelegt sind.

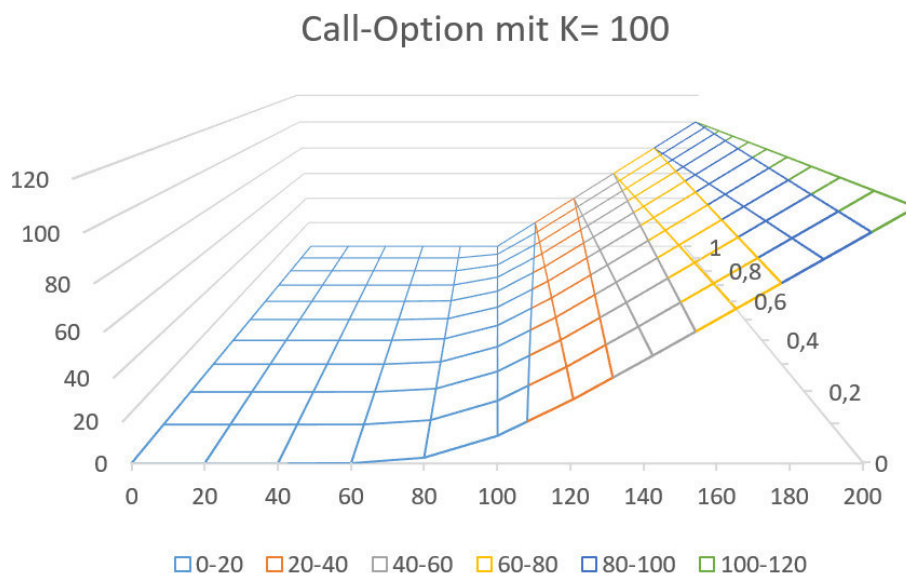


Abbildung 7: Preis einer europäischen Call-Option nach Black, Scholes und Merton abhängig von Aktienkurs und Restlaufzeit

Um die einzelnen Werte zu erhalten, wurde jeweils der Zellbefehl
„=S*NORM.S.VERT(((LN(S)-LN(100))+0,12*(1-t))/(0,2*WURZEL(1-t));WAHR)-100*EXP(-
0,1*(1-t))*NORM.S.VERT(((LN(S)-LN(100))+0,08*(1-t))/(0,2*WURZEL(1-t));WAHR)“
verwendet, wobei S und t von Zelle zu Zelle variieren. Wie aus der Grafik hervorgeht,
beschreibt $t = 0$ den aktuellen Zeitpunkt. Daraus folgt, dass man in den Term $(1-t)$
einsetzen muss, um die Restlaufzeit zu erhalten.

Außerdem geht aus Abbildung 7 hervor, dass mit sinkender Restlaufzeit logischerweise
auch der Zeitwert der Option abnimmt. Diese Erkenntnis ist besonders gut im Verlauf
der Gerade für $S = 200$ zu beobachten. Während der Optionspreis mit einer
Restlaufzeit von einem Jahr noch ca. 109,52 \$ wert ist, gleicht er am Verfalltermin dem
Resultat aus [2.1], $f = 100$ \$. Ein weiterer Aspekt, der auf eine Beziehung zu [2.1]
hindeutet, ist in der Tatsache zu finden, dass der Graph zum Zeitpunkt $t = 1$ der in
Abbildung 1 gezeigten Funktion entspricht.

4 Das Cox-Ross-Rubinstein-Modell

4.1 Herleitung der Bewertungsformel nach Cox, Ross und Rubinstein

Im Jahr 1979 veröffentlichten John C. Cox, Stephen A. Ross und Mark Rubinstein im
„Journal of Financial Economics“ eine Arbeit, in welcher sie ein Modell zur Bewertung
von Optionen vorschlugen. Dieses Modell unterscheidet sich vor allem dadurch von
dem BSM-Modell, dass es diskreter Natur ist.

4.1.1 Das Einperioden-Binomialmodell

Zunächst wird angenommen, dass S dem aktuellen Aktienkurs entspricht und der Kurs
dieser Aktie mit einem Einperioden-Binomialmodell beschrieben werden kann. Das
heißt, dass der Aktienkurs am Ende einer Periode entweder uS oder dS betragen kann,
wobei u und d den jeweils um eins erhöhten, möglichen Renditen über diese Periode

entsprechen. Außerdem definieren wir, dass uS mit einer Wahrscheinlichkeit q und dS mit der Gegenwahrscheinlichkeit $(1 - q)$ eintritt.

Aufbauend auf diesen Annahmen bezeichnet man nun die Optionspreise beim Eintreten der Ereignisse uS oder dS mit C_u beziehungsweise C_d , wobei $C_u = \max(0, uS - K)$ beziehungsweise $C_d = \max(0, dS - K)$ gilt.

Hierbei fällt auf, dass die beiden zuvor angeführten Maximumfunktionen logischerweise dem durch [2.1] dargestellten Zusammenhang ähneln.

Im nächsten Schritt wird gemäß Cox, Ross und Rubinstein (1979, S. 233) ein risikoloses Portfolio, welches aus Δ Aktien zum Preis S und einem Investment in risikolose Anleihen zu einem Gesamtbetrag von A besteht, modelliert, wobei $r > 1$ dem um eins erhöhten risikolosen Zinssatz der Anleihen entspricht. Den aktuellen Wert des Portfolios erhält man durch Einsetzen in den Term $\Delta S + A$. Es ist zu beachten, dass $A \leq 0$ ist, da im Zuge eines Anleihekaufes Geld verliehen wird. Da der Kurs einer Aktie nach einer Periode nur zwei mögliche Werte aufweisen kann und das Resultat der Anleihe mit rA feststeht, ergeben sich auch für den Wert des Portfolios nur zwei Möglichkeiten.

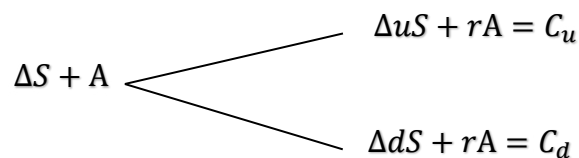


Abbildung 8: Darstellung des Portfoliowertes mithilfe eines Einperioden-Baumes

Da Δ und A frei wählbar sind, muss eine Bedingung angegeben werden, um eindeutige Werte für die beiden Parameter zu erhalten. In Abbildung 8 ist bestimmt worden, dass die beiden möglichen Portfoliowerte am Ende der Periode genau den möglichen Werten einer Call-Option am Ende dieser Periode entsprechen. Löst man die beiden in Abbildung 8 angeführten Gleichungen mittels Elimination von rA und setzt den für Δ erhaltenen Term in eine der beiden Gleichungen ein, so erhält man für Δ und A

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{(u - d)S}, \quad A = \frac{uC_d - dC_u}{(u - d)r}. \quad [4.1]$$

Da der heutige Wert der Kaufoption dann dem Term $\Delta S + A$ entsprechen muss, kann C durch Einsetzen von [4.1] erhalten werden.

$$C = \frac{C_u - C_d}{u - d} + \frac{uC_d - dC_u}{(u - d)r} = \left[\left(\frac{r - d}{u - d} \right) C_u + \left(\frac{u - r}{u - d} \right) C_d \right] / r \quad [4.2]$$

Es ist anzumerken, dass die Veränderung der Gestalt der „rechten“ Seite dieser Gleichung durch eine Erweiterung des ersten Summanden um den Faktor $\frac{r}{r-d}$ ermöglicht wurde.

Unter der Prämisse, dass keine risikolosen Arbitragemöglichkeiten existieren, entspricht [4.2] genau dem Wert einer Kaufoption eine Periode vor dem Verfalltermin. Da $\frac{r-d}{u-d}$ und $\frac{u-r}{u-d}$ immer zwischen null und eins liegen und die Summe der beiden Terme immer genau eins ergibt, können diese Terme als Wahrscheinlichkeiten angesehen werden.

$$p = \frac{r - d}{u - d}, \quad 1 - p = \frac{u - r}{u - d}$$

Unter der Berücksichtigung dieser Substitution wird die Bewertungsformel aus [4.2] zu

$$C = [pC_u + (1 - p)C_d] / r. \quad [4.3]$$

Im nächsten Schritt wird bewiesen, dass für den aktuellen Optionspreis einer Call-Option immer $C > S - K$ gilt. Sollte diese Ungleichung nicht erfüllt werden, so ergibt sich bei Kaufoptionen amerikanischer Natur oder unter Umständen auch bei Bermuda-Optionen eine Arbitragemöglichkeit, wenn $C < S - K$ eintritt. Der Investor könnte dann diese Call-Option erwerben und sofort ausüben, um so risikolos Gewinn zu erzielen. Bei einer Bermuda-Option wäre dies nur möglich, wenn es sich bei dem Zeitpunkt des Auftretens einer Arbitragemöglichkeit auch um einen für die Ausübung zugelassenen Zeitpunkt handelt.

Bei einem Einperioden-Binomialmodell müssen für das Überprüfen der Gültigkeit der zuvor angeführten Ungleichung die drei Intervalle $[0, dS]$, $]dS, uS[$ und $[uS, +\infty[$ herangezogen werden. Gilt $K \in [uS, +\infty[$, so kann man daraus schließen, dass der Wert des Calls null beträgt, da sogar bei einer Aufwärtsbewegung der Aktie um den Faktor u der Basispreis der Option nicht mehr übertroffen werden kann. Da weiters $u > 1$ gilt, kann $S < K$ festgehalten werden, was wiederum impliziert, dass $C > S - K$ erfüllt wird. Befindet sich der Basispreis der Kaufoption hingegen im Intervall $[0, dS]$, so ist sicher, dass die Option nicht außerhalb des Geldes liegt. Der Wert der Option ergibt sich dann durch $C = S - K/r$, was definitiv größer als $S - K$ ist, solange $r > 1$ gilt. Die zuvor

angeführte Formel für die Bepreisung der in diesem Beispiel angeführten Kaufoption kann mit der Black-Scholes-Merton-Formel verglichen werden, wobei die Wahrscheinlichkeit für die Ausübung dieser Option eins ist. Außerdem ist zu beachten, dass hier die Diskontierung auf den heutigen Barwert mittels einer einfachen Division durch r erfolgt, da eine Verzinsung diskreter Natur vorliegt.

Nun verbleibt einzig noch die Möglichkeit, dass K im Intervall $]dS, uS[$ liegt. In diesem Fall besteht sowohl die Möglichkeit, dass die Option am Ende der Laufzeit einen positiven Wert hat, als auch, dass das Wertpapier am Verfalltermin wertlos ist. Um in diesem Fall den heutigen Wert der Kaufoption zu erhalten, wird der Erwartungswert des Optionspreises am Verfalldatum ermittelt und anschließend diskontiert. Der Preis ergibt sich dann durch Einsetzen in $C = p(uS - K)/r$. Nun gilt es zu überprüfen, ob $p(uS - K)/r > S - K$ gilt. Zunächst wird die Klammer ausmultipliziert und die Ungleichung mit r multipliziert.

$$puS - pK > rS - rK$$

Anschließend werden S und K herausgehoben und es wird p auf der linken Seite der Ungleichung durch $\frac{r-d}{u-d}$ ersetzt. Die Ungleichung wird zu

$$S \left(\frac{(r-d)u}{u-d} - r \right) > K(p-r).$$

Der Ausdruck in der Klammer auf der linken Seite wird nun auf einen gemeinsamen Bruchstrich gebracht und anschließend vereinfacht.

$$S \left(\frac{(r-d)u - r(u-d)}{u-d} \right) > K(p-r) \Leftrightarrow dS \left(\frac{r-u}{u-d} \right) > K(p-r)$$

An dieser Stelle fällt auf, dass die linke Seite der Ungleichung zu $dS(p-1)$ wird. Die gesamte Ungleichung lautet dann $dS(p-1) > K(p-r)$. Diese Aussage trifft unter der Prämisse, dass $r > 1$ gilt, auf jeden Fall zu. An dieser Stelle sei erneut erwähnt, dass K nicht kleiner oder gleich dS sein darf. Würde diese Annahme nicht berücksichtigt werden, so wäre die Ungleichung nicht als allgemein richtig zu bewerten.

4.1.2 Das Mehr-Perioden-Binomialmodell nach Cox, Ross und Rubinstein

Es wird zunächst angenommen, dass die Restlaufzeit in zwei Perioden unterteilt wird, wobei u und d als die um eins erhöhten möglichen Renditen pro Periode definiert sind.

Am Ende der Optionslaufzeit können folglich drei unterschiedliche Optionspreise eintreten.

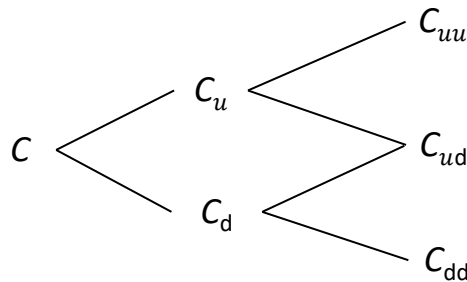


Abbildung 9: Optionspreise dargestellt in einem Binomialbaum

Der in Abbildung 9 gezeigte Preis C_{uu} entspricht der Funktion $\max(0, u^2S - K)$. Analog werden die restlichen beiden möglichen Optionspreise am Verfalldatum modelliert, wobei der Index von entscheidender Bedeutung ist. Die beiden möglichen Preise nach einer Periode ergeben sich mittels Einsetzen in [4.3].

$$C_u = [pC_{uu} + (1 - p)C_{ud}]/r$$

$$C_d = [pC_{ud} + (1 - p)C_{dd}]/r \quad [4.4]$$

Um den aktuellen Preis der Kaufoption zu erhalten, werden die Resultate aus [4.4] erneut in [4.3] eingesetzt.

$$C = \frac{p^2 \max(0, u^2S - K) + 2p(1 - p) \max(0, udS - K) + (1 - p)^2 \max(0, d^2S - K)}{r^2}$$

In der obigen Gleichung fällt auch deutlich auf, dass der Zähler dem Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariable, dem Optionspreis C , entspricht. Die Maximumsfunktionen stellen hierbei alle möglichen Optionspreise am Verfalldatum dar. Diese werden mit dem zugehörigen Wahrscheinlichkeitsmaß multipliziert, sodass die einzelnen möglichen Werte in der Summe, dem heutigen Optionspreis C , der Wahrscheinlichkeit entsprechend gewichtet werden können. Der Nenner entspricht erneut der Diskontierung auf den heutigen Barwert.

Die zuvor angeführte Formel kann nun auf n Perioden erweitert werden. Diese lautet

$$C = \left[\sum_{j=0}^n \left(\frac{n!}{j! (n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} \max(0, u^j d^{n-j} S - K) \right] / r^n. \quad [4.5]$$

Es sei angemerkt, dass es sich bei [4.5] um eine korrekte Bewertungsformel einer Kaufoption handelt. Da die Maximumsfunktion allerdings allen möglichen Optionspreisen, die am Verfalldatum nicht im Geld liegen, den Wert 0 zuordnet, können diese in der Berechnung des Erwartungswertes unter der Anwendung des Satzes vom Nullprodukt vernachlässigt werden. Es sei nun a eine nichtnegative ganze Zahl, die gleich der erforderlichen Anzahl an Aufwärtsbewegungen u ist, sodass die Kaufoption am Verfalltermin im Geld liegt. Mathematisch betrachtet muss die Ungleichung $u^a d^{n-a} S > K$ gelten, wobei im Falle $a > n$ die Gleichung $C = 0$ gilt. Drückt man a aus, so muss man beachten, dass das anfangs definierte a von der in der Ungleichung vorkommenden Variable insofern abweicht, als die Ungleichung für a auch Zahlen, die keiner ganzen Zahl entsprechen, als Lösung angibt. An dieser Stelle eignet sich das Miteinbeziehen der Aufrundungsfunktion hervorragend, um einen eindeutigen Wert für a zu erhalten.

$$a = \left\lceil \frac{\ln(K/(Sd^n))}{\ln(u/d)} \right\rceil, a \geq 0$$

Sollte der Wert des Quotienten einer natürlichen Zahl entsprechen, so muss dieser um eins erhöht werden, sodass die obige Ungleichung gilt. Dieses Erkenntnis führt dazu, dass die Maximumsfunktion aus [4.5] im Zuge einer Veränderung des Startwertes des Laufindex aus [4.5] durch den Term $(u^j d^{n-j} S - K)$ ersetzt wird. Durch Ausmultiplizieren der zuvor angeführten Klammer erhält man

$$C = S \left[\sum_{j=a}^n \left(\frac{n!}{j! (n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} \left(\frac{u^j d^{n-j}}{r^n} \right) \right] - Kr^{-n} \left[\sum_{j=a}^n \left(\frac{n!}{j! (n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} \right]. \quad [4.6]$$

An dieser Stelle fällt auf, dass der Faktor, mit dem Kr^{-n} multipliziert wird, der kumulierten Binomialverteilung $\Phi[a; n; p]$ entspricht, wobei die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten für alle $j \in \mathbb{N}$, für die $a \leq j \leq n$ gilt, summiert werden. Um auch den entsprechenden Teil des Minuenden von [4.6] in dieser Weise zusammenfassen zu können, muss eine neue Wahrscheinlichkeit p' definiert werden:

$$p' = \frac{u}{r} p.$$

Da sowohl p' als auch $1 - p'$ im Intervall $]0, 1[$ liegen und die Summe $\frac{u}{r} p + \frac{d}{r} (1 - p)$ die Zahl eins ergibt, handelt es sich auch bei p' definitiv um eine Wahrscheinlichkeit.

Daraufhin kann [4.6] in dieser Form angegeben werden:

$$C = S \Phi[a; n; p'] - Kr^{-n} \Phi[a; n; p].$$

Daraus folgt für den Preis einer europäischen Put-Option:

$$P = Kr^{-n} (1 - \Phi[a; n; p]) - S (1 - \Phi[a; n; p']).$$

4.1.3 Spezifizierung der Parameter u und d

Die einzigen beiden Größen, die noch genauer zu definieren sind, sind u und d .

Rationale Überlegungen zeigen, dass die beiden Größen von der Volatilität abhängen müssen. Je höher die Volatilität ist, desto wahrscheinlicher sind stärkere Abweichungen von dem neutralen Faktor 1. Daraus folgt, dass mit steigender Volatilität u zunehmen beziehungsweise d abnehmen muss, wobei immer die Gleichung $ud = 1$ erfüllt wird.

Um auf konkrete Zusammenhänge zwischen u , d und σ schließen zu können, wird zunächst der logarithmierte Quotient eines Aktienkurses nach n Perioden mit dem heutigen Aktienkurs betrachtet. Es ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) = j \ln u + (n - j) \ln d = j \ln\left(\frac{u}{d}\right) + n \ln d.$$

Das Ausmultiplizieren und das damit einhergehende Vereinfachen sind dadurch zu begründen, dass so die Berechnung der Varianz des obigen Ausdruckes erheblich einfacher wird. Bei $n \ln d$ handelt es sich nämlich um eine Konstante, was impliziert, dass die Varianz dieses Ausdruckes null beträgt.

$$\text{Var}\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] = \hat{\sigma}^2 n = \left[\ln\left(\frac{u}{d}\right)\right]^2 \text{Var}[j] \quad [4.7]$$

An dieser Stelle ist anzuführen, dass $\hat{\sigma}^2$ für die Varianz pro Zeitschritt steht. Gemäß den Eigenschaften einer Binomialverteilung kann $\text{Var}[j]$ durch den Term $nq(1 - q)$ ersetzt werden. Nun gilt es u , d und q so zu wählen, dass [4.7] bei $n \rightarrow \infty$ gegen $\sigma^2 t$ konvergiert. Zuerst werden die Parameter u und d , wie von Cox, Ross und Rubinstein

(S. 249) vorgeschlagen, mit $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t/n}}$ und $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/n}}$ gewählt. Im Zuge dessen muss auch die im Zähler der Wahrscheinlichkeit $p = q$ vorkommende, um eins erhöhte Rendite an die Abhängigkeit von t adaptiert werden. Unter der Prämisse, dass eine fixierte Zeitspanne der Länge Δt genau in n Perioden unterteilt wird, kann die um eins erhöhte Rendite pro Periode durch den Term $r^{\Delta t/n}$ beschrieben werden. In weiterer Folge gilt es, die Wahrscheinlichkeit q so zu wählen, dass die folgende Aussage gilt:

$$nq(1 - q) \left[\ln \left(\frac{u}{d} \right) \right]^2 \rightarrow \sigma^2 t, \quad n \rightarrow \infty.$$

Um dies zu erreichen, wird der in [4.2] postulierte Wert für $p = q$ leicht abgewandelt. (vgl. Cox et al. 1979, S. 249)

$$q = \frac{\frac{\mu\Delta t}{n} - \ln d}{\ln u - \ln d}$$

Der Buchstabe μ steht hierbei für die erwartete, jährliche Rendite. Setzt man zunächst die zuvor angeführten Terme für u und d ein und hebt man anschließend $\sqrt{\Delta t/n}$ und σ heraus, so erhält man durch Kürzen

$$q = 0,5 + \frac{\mu}{2\sigma} \sqrt{\frac{\Delta t}{n}}.$$

Anschließend wird dieser Term für q in [4.8] eingesetzt. Somit ergibt sich

$$\hat{\sigma}^2 n = \left(\sigma^2 - \mu^2 \frac{\Delta t}{n} \right) \Delta t,$$

was definitiv gegen $\sigma^2 t$ konvergiert, sofern $n \rightarrow \infty$ gilt.

Im nächsten Schritt, gilt es μ so zu wählen, dass sich die Rendite einer Aktie einer Lognormalverteilung nähert, wenn $n \rightarrow \infty$. In diesem Kontext ist der Begriff „lognormalverteilt“ anzuführen, da der Quotient aus aktuellem und zukünftigem Aktienkurs nicht negativ sein kann. Dieser Zusammenhang resultiert aus der Tatsache, dass der Kurs einer Aktie auf jeden Fall nichtnegativ ist. Um eine Normalverteilung zu erhalten, muss eine lognormalverteilte Zufallsvariable daher logarithmiert werden, sodass auch negative Werte zugelassen werden. Es gilt gemäß den Eigenschaften einer Lognormalverteilung:

$$\ln E \left[\frac{S_T}{S_0} \right] = \mu T + \frac{1}{2} \sigma^2 T.$$

Da der Erwartungswert des zuvor angeführten Quotienten mit r^t bereits definiert worden ist, kann jener Ausdruck einfach in die obige Gleichung eingesetzt werden. Nach dem Dividieren durch den Faktor t erhält man den Erwartungswert der erhaltenen Normalverteilung.

$$\mu = \ln r - \frac{1}{2} \sigma^2$$

Mit dem Erkennen dieses Zusammenhanges wird nun deutlich, dass das Black-Scholes-Merton-Modell den Grenzwert des Cox-Ross-Rubinsteinmodells darstellt, wenn $n \rightarrow \infty$.

4.2 Graphische Darstellung der CRR-Bewertungsformel anhand eines Beispiels

Wie beim Black-Scholes-Merton-Modell gezeigt, kann auch das Bewertungsmodell nach Cox, Ross und Rubinstein mittels des Programmes „Microsoft Excel 2013“ visualisiert werden. Um eine Vergleichbarkeit zu gewährleisten, wird hier ebenfalls eine europäische Call-Option mit einem Basispreis $K = 100$ \$ bewertet, wobei auch die Werte der beiden Parameter r und σ mit $r = 0,1$ beziehungsweise $\sigma = 0,2$ übernommen worden sind. Der Optionspreis f wird erneut als eine Funktion zweier Variablen betrachtet, wobei die Definitionsbereiche mit $t \in [0, 1]$ und $S \in [0, 200]$ unverändert sind. Es wird weiters angenommen, dass ein Jahr in zwölf Perioden unterteilt ist.

Durch Einsetzen in die Formeln von u und d erhält man nach dem Runden auf die dritte Nachkommastelle $u = 1,059$ beziehungsweise $d = 0,944$.

Call-Option mit K=100

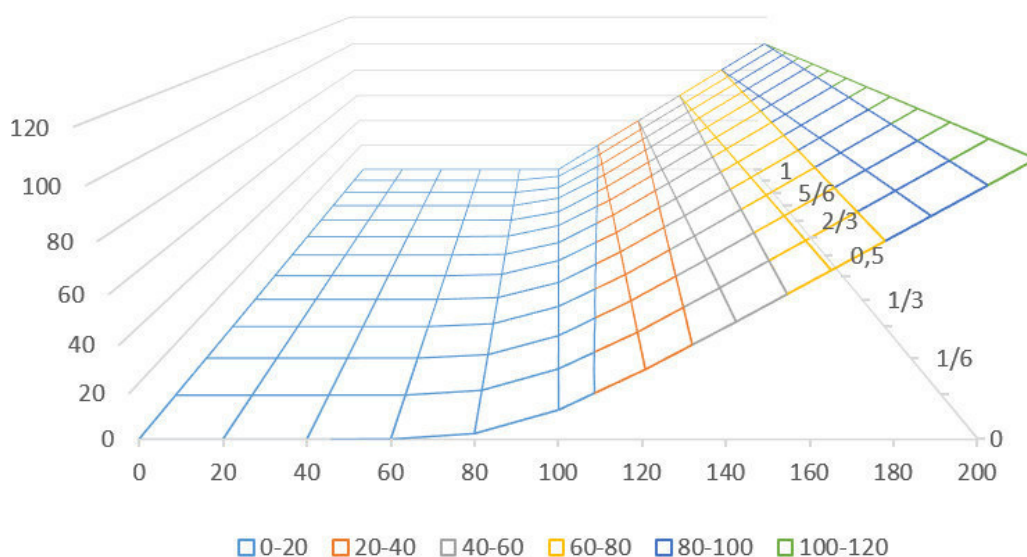


Abbildung 10: Preis einer europäischen Call-Option nach Cox, Ross und Rubinstein in Abhängigkeit von Aktienkurs und Restlaufzeit

Um die für diese Grafik relevanten Werte zu erhalten, wurde jeweils folgender Zellbefehl verwendet: „=S*WENN(LN(100/(S*d^(12-12t)))/LN(u/d)>12-12t;0;WENN(LN(100/(S*d^(12-12t)))/LN(u/d)<=0;1;(1-BINOM.VERT(ω;12-12t;(u/1,1^(1/12))*((1,1^(1/12)-d)/(u-d));1)))-100*1,1^(t-1)*WENN(LN(100/(S*d^(12-12t)))/LN(u/d)>12-12t;0;WENN(LN(100/(S*d^(12-12t)))/LN(u/d)<=0;1;(1-BINOM.VERT(ω;12-12t;(1,1^(1/12)-d)/(u-d);1))))“.

Der Parameter ω entspricht hierbei dem Term $a - 1$ und wird mittels Einsetzen in „=MAX(ABRUNDEN(LN(100/(S*d^(12-12t)))/LN(u/d);0);0)“ ermittelt. Auf natürliche Zahlen als Ergebnis des Ausdrucks „LN(100/(S*d^(12-12t)))/LN(u/d)“ muss nun insofern nicht speziell geachtet werden, als $\text{LN}(100/(S*d^{(12-12t)}))/\text{LN}(u/d)+1-1=\text{LN}(100/(S*d^{(12-12t)}))/\text{LN}(u/d)$ gilt. (siehe Definition von a)

Wie beim BSM-Modell wird auch in Abbildung 10 ein konkreter Beispielwert, nämlich $f(200, 1 - 0/12 = 1)$, betrachtet. Man erhält: $f(200, 1) \approx 109,09$ \$, was um ca. 0,43 \$ niedriger als der entsprechende BSM-Preis ist. Die Gründe für diese Differenz werden in der Sektion „Vergleich“ diskutiert. Es lässt sich allerdings beobachten, dass die Flächendarstellungen der beiden Modelle sehr starke Ähnlichkeiten aufweisen.

5 Das Jump-Diffusions Modell nach Merton

5.1 Herleitung der Erweiterung der Black-Scholes-Merton-Differentialgleichung nach Merton

Robert C. Merton schlug im Jahre 1976 vor, dass bei der Bewertung von Aktienoptionen auch sprunghafte Anstiege des Aktienkurses berücksichtigt werden müssen. Daraus folgt, dass die von Black, Scholes und Merton im Jahre 1973 vorgeschlagene Beschreibung eines Aktienkurses (siehe [2.12]) durch einen Sprungprozess erweitert werden muss. Die zugehörige Differentialgleichung lautet

$$\frac{dS}{S} = (\alpha - \lambda k)dt + \sigma dz + dq. \quad [5.1]$$

Der Term dq steht hierbei für einen Poisson-Prozess mit einer Intensität von λ und einer durchschnittlichen Sprunghöhe von k . Eine spannende Eigenschaft eines Poisson-Prozesses ist die Tatsache, dass λ sowohl dem Erwartungswert als auch der Varianz pro Zeiteinheit entspricht. Außerdem wird angenommen, dass der Wiener-Prozess und der Poisson-Prozess voneinander unabhängig sind. Der Parameter α steht in Gleichung [5.1] für die unmittelbar erwartete Rendite der Aktie.

Nun gilt es, die Bedeutung des Poisson-Prozesses in der zuvor angeführten stochastischen Differentialgleichung zu analysieren. Der Ausdruck $\lambda k dt$, welcher von α abgezogen wird, steht hierbei für eine Anpassung der erwarteten Rendite an den nicht zu vernachlässigenden Poisson-Prozess. In einem Zeitraum dt werden nämlich λdt Sprünge mit einer Höhe von k des Aktienkurses erwartet. Da solche Sprünge ebenfalls zu der Höhe der Rendite der Aktie beitragen, muss es zu einer Gegenrechnung der erwarteten, durch Sprünge generierten Rendite kommen. Diese Anpassung der unmittelbar erwarteten Rendite α ist von der Form $(\alpha - \lambda k)dt$.

Um k auszudrücken, wird, wie von Merton (1976, S. 128) vorgeschlagen, eine Zufallsvariable Y definiert, die den Faktor angibt, mit dem der Aktienkurs im Falle eines Eintretens eines Poisson-Ereignisses multipliziert wird. Daraus folgt, dass $S(t+h) = S(t)Y$ gilt, sofern sich genau ein Sprung im Intervall $[t, t+h]$ ereignet und der stetige Teil des Aktienkurses vernachlässigt wird, wobei $Y \geq 0$ gilt. Daraus folgt

$$k = E[Y - 1].$$

Nach Klärung dieser Zusammenhänge wird [5.1] mit dem Preis der Aktie S multipliziert und dq durch $(Y - 1)dN_t$ ersetzt, wobei N_t einem Poisson-Prozess mit Intensität λ entspricht. Es ist insofern sinnvoll, die Verteilung der Sprünge mithilfe einer Poisson-Verteilung zu modellieren, als es sich bei solchen unstetigen Stellen um sehr selten auftretende Ereignisse handelt. Die Poisson-Verteilung ist nämlich der Grenzwert einer Binomialverteilung, bei der $n \rightarrow \infty$ und $p \rightarrow 0$, wobei der Erwartungswert np gegen einen endlichen Wert λ konvergiert. Aus [4.1] wird nach der Durchführung der zu Beginn dieses Absatzes angeführten Substitution

$$dS = (\alpha - \lambda k)S dt + \sigma S dz + (SY - S)dN_t. \quad [5.2]$$

Anzumerken ist, dass der Poisson-Prozess N_t lediglich die Anzahl der Sprünge angibt, wobei die Verteilung von $(Y - 1)$ noch nicht genauer bestimmt ist. Ein weiterer spannender Aspekt hinsichtlich des Poisson-Prozesses ist, dass dieser in infinitesimalen Zeitintervallen einen binären Charakter erlangt. Der Ausdruck dN_t kann dann nämlich entweder den Wert 1 oder die Zahl 0 annehmen.

An dieser Stelle kann Itô's Lemma angewandt werden, wobei es das Ziel ist, eine Funktion des Aktienkurses und der Zeit zu erhalten. Das Lemma für den Poisson-Prozess wird von Cont und Tankov (2004, 279f) angeführt.

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} (\alpha - \lambda k)S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz + (f(SY, t) - f(S, t))dN_t \quad [5.3]$$

Es fällt auf, dass [5.3] gewisse Ähnlichkeiten mit [3.1] aufweist. [5.3] unterscheidet sich allerdings insofern, als die erwartete Rendite μ durch $(\alpha - \lambda k)$ ersetzt worden ist.

Außerdem kommt aufgrund des Poisson-Prozesses ein Summand hinzu, welcher den unstetigen Sprung im Falle eines Poisson-Ereignisses mit $Y \neq 1$ angibt. Dieser zu der Gleichung hinzugekommene Teil ist leicht zu interpretieren, da er lediglich die Differenz aus dem Optionspreis nach dem Sprung und dem entsprechenden Preis vor der unstetigen Stelle angibt.

Es gilt nun, ein Portfolio ähnlich wie in [3.2] zu modellieren, wobei die Anzahl der Aktien noch nicht spezifiziert worden ist. Diese wird zunächst durch den Parameter Δ beschrieben. Die folgende Gleichung unterscheidet sich insofern von [3.2], als Minuend und Subtrahend vertauscht worden sind, sodass die spätere Multiplikation mit der

ganzen Zahl -1, die zwischen [3.3] und [3.4] durchgeführt worden ist, hinfällig wird. Die Wertänderung des Portfolios ergibt sich dann durch

$$dP = df(S, t) - \Delta dS. \quad [5.4]$$

Nach dem Einsetzen von [5.2] und [5.3] in [5.4] erhält man

$$dP = \left(\frac{\partial f}{\partial S} (\alpha - \lambda k) S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz + (f(SY, t) - f(S, t)) dN_t - \Delta ((\alpha - \lambda k) S dt + \sigma S dz + (SY - S) dN_t). \quad [5.5]$$

Hedgt man nun das Portfolio gemäß Gleichung [3.2], indem man $\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}$ setzt, so wird aus Differentialgleichung [5.5]

$$dP = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \left(f(SY, t) - f(S, t) - \frac{\partial f}{\partial S} (SY - S) \right) dN_t. \quad [5.6]$$

Hier fällt auf, dass durch die zuvor angeführte Substitution zwar der stochastische Wiener-Prozess eliminiert werden konnte, der Poisson-Prozess hingegen aber noch immer einen Einfluss auf die Wertänderung des Portfolios ausübt. Da die Sprung-Ereignisse allerdings ohne Muster auftreten und auch die Höhe der Sprünge rein zufällig bestimmt wird, gibt es keine Möglichkeit, das aus dem Poisson-Prozess resultierende Risiko zu eliminieren.

Merton (1976, S. 133) gibt allerdings an, dass der Einfluss des Jump-Prozesses auf den Aktienkurs ein nicht-systematisches Risiko darstellt, da dq keine Korrelation mit dem Markt aufweist. Diese These impliziert, dass das Berücksichtigen des Jump-Prozesses mit keinem Zinsbonus einhergeht. Daraus kann man schließen, dass die erwartete Rendite des Portfolios mit r zu beziffern ist. Weiters bedeutet es $\alpha = r$. Erfasst man diesen soeben erläuterten Zusammenhang mathematisch, so gilt

$$E[dP] = rP dt.$$

In diese Gleichung werden nun sowohl [5.6] als auch der Wert des Portfolios, welcher aus [5.4] abgeleitet werden kann, eingesetzt.

$$E \left[\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \left(f(SY, t) - f(S, t) - \frac{\partial f}{\partial S} (SY - S) \right) dN_t \right]$$

$$= r \left(f(S, t) - \frac{\partial f}{\partial S} S \right) dt \quad [5.7]$$

Der Ausdruck in der mit der Zeit multiplizierten Klammer ist nicht variabel, weshalb der Erwartungswert des Produktes mithilfe ebendesselben Ausdruckes beziffert werden kann. Außerdem ist der Erwartungswert von dN_t durch λdt gegeben. Spaltet man den Erwartungswert der mit dN_t multiplizierten Klammer auf, so kann man aufgrund der zu Beginn dieses Kapitels angeführten Definition für k den Erwartungswert $E[SY - S]$ durch kS ersetzen. Führt man diese Vereinfachungen durch, so wird aus [5.7]:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \lambda \left(E[f(SY, t) - f(S, t)] - \frac{\partial f}{\partial S} kS \right) dt$$

$$= r \left(f - \frac{\partial f}{\partial S} S \right) dt. \quad [5.8]$$

Jetzt gilt es, dt zu kürzen, sowie alle Klammern auszumultiplizieren. Nachdem alle Terme auf eine Seite gebracht worden sind, erhält man als Resultat

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + \frac{\partial f}{\partial S} (r - \lambda k)S - rf + \lambda E[f(SY, t) - f(S, t)] = 0. \quad [5.9]$$

Es handelt sich bei [5.9] um eine Differentialgleichung, die unter den Nebenbedingungen $f(0, \tau = T - t) = 0$ und $f(S, 0) = \max(S - K, 0)$ als Lösung den Preis einer europäischen Call-Option erhält. Außerdem wird deutlich, dass es sich bei [5.9] um eine Erweiterung der Black-Scholes-Merton-Differentialgleichung handelt. Nimmt man nämlich an, dass $\lambda = 0$ gilt, so wird [5.9] zu [3.4] reduziert.

5.2 Lösung der Merton-Differentialgleichung

Merton (1976, S. 134) gibt in seiner Arbeit eine allgemeine Lösung für [5.9] an, welche lautet

$$f(S, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} \{E_n[W(SY(n)e^{-\lambda K\tau}, \tau, K, \sigma^2, r)]\}, \quad [5.10]$$

wobei $W(S, \tau, K, \sigma^2, r)$ dem Preis gemäß Black und Scholes entspricht. Die Variable n gibt hierbei die Anzahl der Sprünge bis zum Verfalldatum an. Die Wahrscheinlichkeit, dass in der Restlaufzeit genau n Sprünge auftreten, wird gemäß den Eigenschaften einer Poisson-Verteilung durch den Bruch in [5.10] angegeben. Für die Zufallsvariable $Y(n)$ gilt $Y(n) = \prod_{j=0}^n Y_j$, wobei $Y_0 = 1$ immer wahr ist und alle Zufallsvariablen Y_j voneinander unabhängig und identisch verteilt sind. Der Term $SY(n)$ gibt also folglich den Aktienkurs nach n voneinander unabhängigen Sprüngen an, wobei der stetige Teil vernachlässigt wird. Der Faktor $e^{-\lambda k \tau}$ ist dann als die Diskontierung, die aus dem Erwartungswert der durch Sprünge generierten Kursänderungen resultiert, zu verstehen. Aus dem Summenzeichen, dessen Index keine obere Schranke besitzt, und den mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten multiplizierten Erwartungswerten kann man schließen, dass es sich bei dem Optionspreis um den nach den Wahrscheinlichkeiten gewichteten Durchschnitt der Preise nach Black und Scholes für jeweils genau n Sprünge handelt.

Um [5.10] zu spezifizieren, bedarf es einer genaueren Beschreibung der Verteilung von Y . Merton (1976, S. 135) schlägt vor, anzunehmen, dass die Zufallsvariable Y einer Lognormalverteilung folgt, wobei $\ln Y \sim N(\xi, \delta^2)$ gilt.

Diese Annahme hat zur Folge, dass die erwartete relative Sprunggröße k durch den Term $e^{\xi+0,5\delta^2} - 1$ beschrieben werden kann. Die Erweiterung des Exponenten um den Summanden $0,5\delta^2$ ist durch die Umkehrung der in Kapitel 3.3 angeführten Anwendung von Itô's Lemma zu begründen.

Da nun die aus dem Poisson-Prozess resultierende Rendite ebenso wie die Rendite des stetigen Anteiles des Prozesses für den Aktienkurs lognormalverteilt ist, kann die erwartete logarithmierte Rendite des Aktienkurses durch

$$r_n = r - \lambda k + \frac{n \ln(1 + k)}{\tau}$$

beschrieben werden. Der Index n steht hierbei für die Anzahl an Sprüngen bis zum Verfalldatum. Analog ergibt sich die erwartete Varianz des Aktienkurses pro Zeiteinheit, wenn in der Restlaufzeit genau n Sprünge auftreten:

$$v_n^2 = \sigma^2 + \frac{n\delta^2}{\tau}.$$

Definiert man nun den Optionspreis nach Black und Scholes $f_n(S, t)$ unter der Prämisse, dass bis zum Verfalldatum genau n Sprünge auftreten, so lautet dieser unter der Berücksichtigung der zuvor angeführten Definitionen für r_n und v_n

$$f_n(S, t) = W(S, \tau, K, v_n^2, r_n).$$

Aufgrund dieser Erkenntnis kann [5.10] zu

$$f(S, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda'\tau} (\lambda'\tau)^n}{n!} f_n(S, t) \quad [5.11]$$

vereinfacht werden, wobei $\lambda' = \lambda(k + 1) = \lambda e^{\xi + 0,5\delta^2}$ gilt.

Folglich kann [5.11], die Preisbewertungsformel nach Merton, als gewichtete Summe aller Optionspreise $f_n(S, t)$, $n \in \mathbb{N}$, interpretiert werden. Die Gewichtung erfolgt gemäß der Wahrscheinlichkeit, dass eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda'\tau$ genau den Wert n annimmt. Die Bewertungsformel [5.11] gilt ebenfalls für Put-Optionen.

5.3 Graphische Darstellung der Merton-Bewertungsformel anhand eines Beispielles

Wie bei den beiden angeführten Modellen, gilt es auch das Modell nach Merton graphisch darzustellen. Es wird erneut eine europäische Call-Option auf eine Aktie betrachtet, wobei die für das BSM-Modell verwendeten Parameter übernommen werden. Weiters wird festgelegt:

$$\lambda = 2; \quad \xi = 0,04; \quad \delta = 0,16.$$

Für die Berechnung der Optionspreise nach [5.11] wurde eine von Mark Whirdy am 28.5.2013 hochgeladene MATLAB-Datei verwendet. Die dadurch erhaltenen Werte wurden anschließend mithilfe des Programmes „Microsoft Excel 2013“ visualisiert.

Der Definitionsbereich der beiden Variablen wurde erneut mit $t \in [0, 1]$ und $S \in [0, 200]$ gewählt. Während bezüglich der Zeit eine Schrittgröße von 0,1 gewählt worden ist, beträgt die Schrittweite hinsichtlich des Aktienkurses 20 \$.

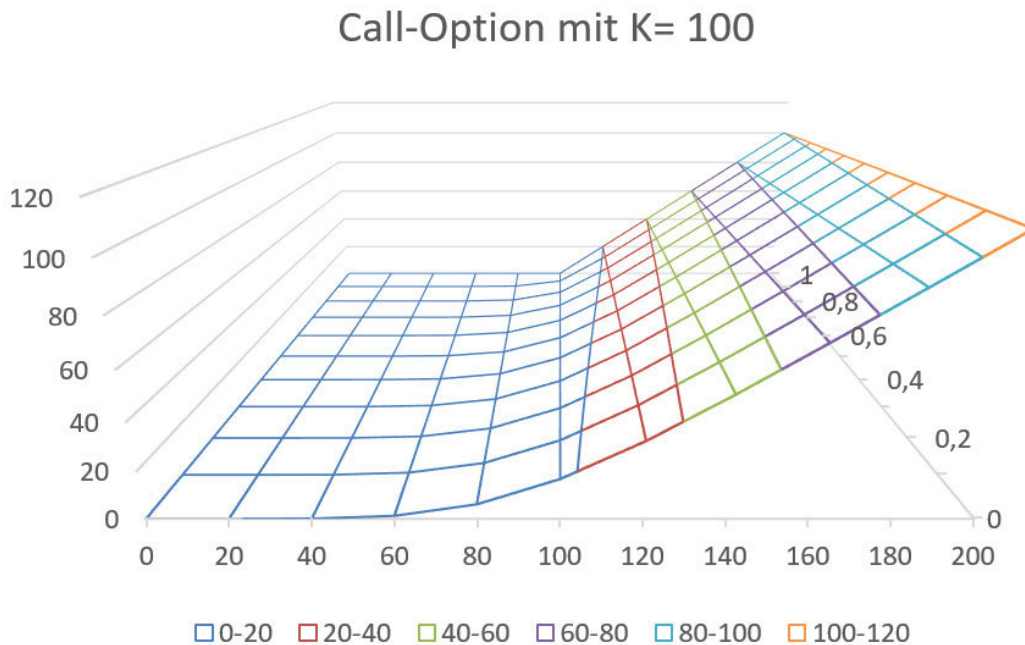


Abbildung 11: Preis einer europäischen Call-Option nach Merton in Abhängigkeit von Aktienkurs und Restlaufzeit

Als Beispiel wird erneut der Optionspreis $f(200, 1 - 0 = 1)$ angeführt, für welchen im Merton-Modell $f(200, 1 - 0 = 1) \approx 109,58$ \$ gilt. In diesem konkreten Beispiel beträgt also der Unterschied zum BSM-Preis ca. 0,06 \$. Diese Differenz wird allerdings im Falle des Funktionswertes $f(100, 1)$ noch deutlicher sichtbar. Die Differenz ergibt sich folgendermaßen:

$$f_{Merton}(100, 1) - f_{BSM}(100, 1) \approx 16,85 - 13,27 = 3,58 \text{ $}.$$

Auf die Gründe für diese Disparität wird in der Sektion „Vergleich“ eingegangen.

6 Vergleich der drei Bewertungsmodelle

6.1 Vergleich anhand eines konkreten, realitätsbezogenen Beispiels

Im Zuge dieser Gegenüberstellung werden die Preise von Call-Optionen auf die Aktie des amerikanischen Unternehmens General Electric (GE) betrachtet. Die mithilfe der drei im Zuge dieser Arbeit behandelten Modelle ermittelten Werte werden anschließend mit den Marktpreisen der entsprechenden Optionsscheine verglichen. Damit der Vergleich mit Marktpreisen als sinnvoll angesehen werden kann, muss berücksichtigt werden, dass in der Restlaufzeit der betrachteten gehandelten Option amerikanischer Natur keine Dividendenausschüttung stattfindet.

Dann kann die amerikanische Option als europäische Option angesehen werden, da für einen rational handelnden Investor kein Grund besteht, die Option vor dem Verfalldatum auszuüben. (vgl. Hull 2015, S. 314f)

Das Ex-Dividenden-Datum für das 4.Quartal 2016 war der 22.12.2016, weshalb es zulässig ist, Optionen mit dem 20.1.2017 als Verfalltermin zu betrachten.

Für die Berechnungen der Optionspreise mithilfe der behandelten Modelle wurden folgende Parameter verwendet:

S	31,81	n	5
$\tau = T - t$	0,05952381	u	1,021005622
r	0,1404	d	0,979426536
σ	0,190525589		

Bei der Berechnung der Restlaufzeit wurde angenommen, dass ein Jahr genau 252 Handelstage besitzt. Die Werte r und σ wurden auf das durchschnittliche Monat bezogen am 28.12.2016 um 15:41 der Website „www.stock-analysis-on.net“ entnommen und an die gegebenen Erfordernisse angepasst.

Um aussagekräftige, für das Merton-Modell spezifische Parameter zu finden, bedarf es einer genaueren Analyse der Logarithmen der Quotienten aus Schluss (S_S)- und Eröffnungskurs (S_E) einiger Handelstage. Bei der Analyse der GE-Aktie wurde dabei der Zeitraum 3.1.2000 – 28.12.2016 betrachtet. Die Schluss- und Eröffnungskurse wurden am 29.12.2016 um 17:52 der Website „finance.yahoo.com“ entnommen.

Es gilt weiters zu definieren, wann ein Sprung-Ereignis in Bezug auf den Ausdruck $\ln \frac{S_S}{S_E}$ eintritt. Merton postulierte 1976 (S. 133) lediglich, dass es sich bei einem Sprung um eine Veränderung des Aktienkurses nicht-systembezogenen Ursprunges handelt. Das bedeutet, dass diese Kursbewegung keiner Korrelation mit dem übrigen Markt unterliegt.

Um diesen Zusammenhang zwischen einer einzelnen Aktie und dem Markt zu verdeutlichen, zeigt die folgende Abbildung die Gegenüberstellung des relativen Kursstandes des Dow Jones Industrial Average mit dem der GE-Aktie ausgehend vom 3.1.2000.

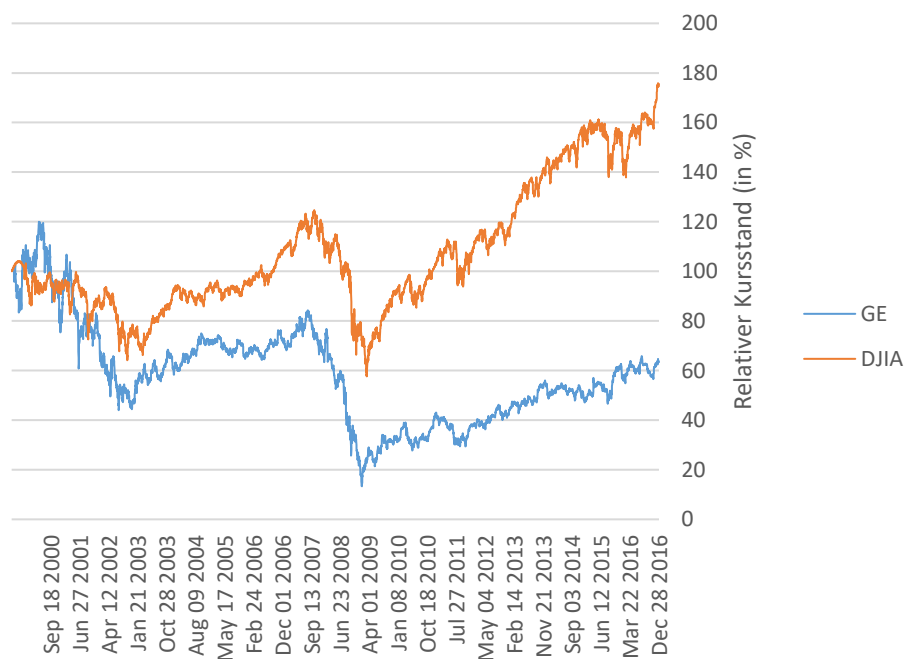


Abbildung 12: Relativer Kursstand von GE und DJIA ausgehend vom 3.1.2000

Aufgrund der Parallelen der Trends in Abbildung 12 kann man vermuten, dass vor allem im Zeitraum der Finanzkrise 2008 nicht jede große Kursänderung der GE-Aktie mit einem Sprung-Ereignis gleichzusetzen ist.

Es wird angenommen, dass ein Sprung-Ereignis genau dann eintritt, wenn der Betrag der logarithmierten Rendite des entsprechenden Handelstages größer als 0,05 ist. Da nach Merton weiter gelten muss, dass diese Ereignisse nicht systematisch bedingt sein dürfen, wurden Handelstage, an denen $\left| \ln \frac{S_t}{S_{t-1}} \right| > 0,05$ auch für den DJIA gilt, herausgestrichen. Im Falle der GE-Aktie wurde seit dem 3.1.2000 so die Anzahl von ursprünglich 68 Sprung-Ereignissen auf 55 reduziert. Diese besonderen Handelstage verteilen sich zeitlich, wie diese Abbildung zeigt, wobei „1“ für das Auftreten eines Sprung-Ereignisses steht:

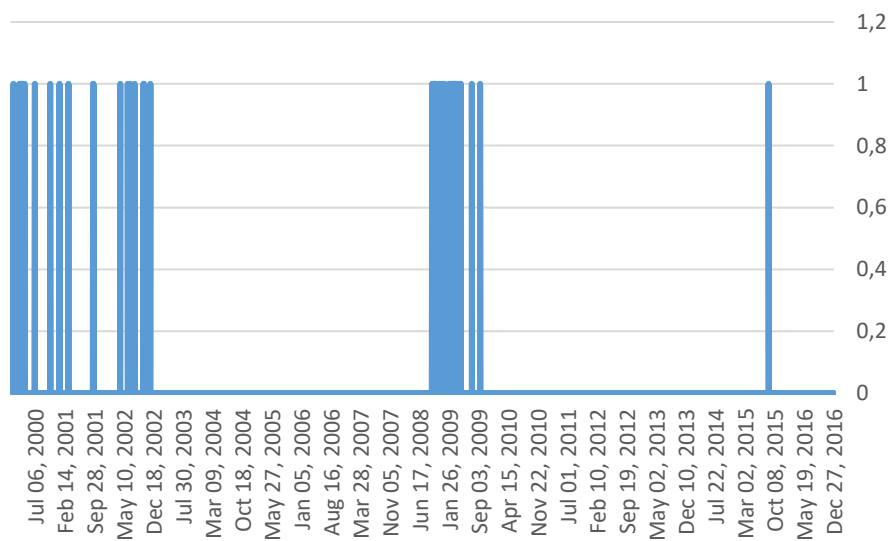


Abbildung 13: Zeitliches Auftreten von "Jumps" im Falle des Kurses der GE-Aktie

Es fällt in Abbildung 13 auf, dass die Sprünge hauptsächlich in Zeiten sehr hoher Volatilität zu finden sind. Als Beispiel ist die Finanzkrise in den Jahren 2008 und 2009 anzuführen.

Aus diesen Ereignissen können nun die fehlenden Parameter für das Merton-Modell ermittelt werden:

λ	3,235294118	δ	0,075942642
ξ	0,00167434	δ^2	0,005767285

Aufbauend auf allen Parametern, die in diesem Kapitel tabellarisch angeführt worden sind, zeigt die folgende Abbildung die Genauigkeit der einzelnen Modelle in Bezug auf die Marktpreise der entsprechenden Optionen. Die Marktpreise wurden ebenfalls „finance.yahoo.com“ am 29.12.2016 um 14:13 entnommen.

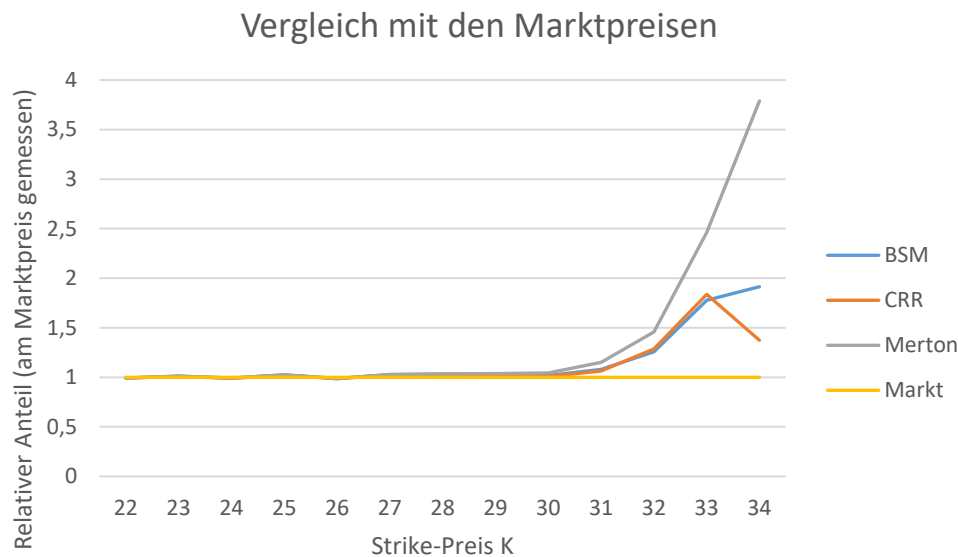


Abbildung 14: Gegenüberstellung der Modellpreise mit den Marktpreisen anhand des relativen Anteils

Abbildung 14 zeigt, dass alle drei Modelle vor allem für tief im Geld liegende Call-Optionen sehr gute Näherungswerte für die Marktpreise liefern. Weiters fällt in diesem konkreten Beispiel eine eindeutige Überbewertung von Optionen, die außerhalb des Geldes liegen, durch das Merton-Modell auf. Außerdem kann festgehalten werden, dass das CRR-Modell in diesem konkreten Beispiel die genauesten Werte liefert.

6.2 Allgemeiner Vergleich

Es ist festzuhalten, dass das CRR-Modell, das eine diskrete Form des BSM-Modells darstellt, vor allem einen Vorteil in der relativ einfachen und verständlichen Herleitung besitzt. Es kann daher als Näherungsformel für die Preisbewertung nach Black, Scholes und Merton charakterisiert werden. Außerdem kann das Binomialmodell aufgrund der endlichen Anzahl an Perioden dazu verwendet werden, Optionen amerikanischer Natur zu bewerten. Ein Beispiel hierfür ist in Hull (2015, S. 361f) zu finden.

Über die Genauigkeit des CRR-Modells im Vergleich zum BSM-Modell kann aufgrund des Parameters n keine allgemeine Aussage getroffen werden. Es ist also im CRR-Modell möglich, den Preis nach Black und Scholes durch einen beliebig großen Parameter n beliebig gut anzunähern.

Ein Vorteil des BSM-Modells gegenüber dem CRR-Modell ist, dass es den Wertpapierhandel realistischer darstellt. Während sich nämlich im Binomialmodell Aktien- und Optionspreis nur am Ende einer Periode ändern können, ist das im Falle des BSM-Modells zu jedem Zeitpunkt möglich.

Es ist allgemein zu beobachten, dass das Merton-Modell höhere oder gleich hohe Werte im Vergleich zum Black-Scholes-Merton-Modell liefert. Dieser Zusammenhang lässt sich auch am Beispiel von Call-Optionen auf die GE-Aktie mit einer Restlaufzeit von einem Jahr beobachten (bis auf Restlaufzeit gleiche Parameter wie in vorigem Kapitel):

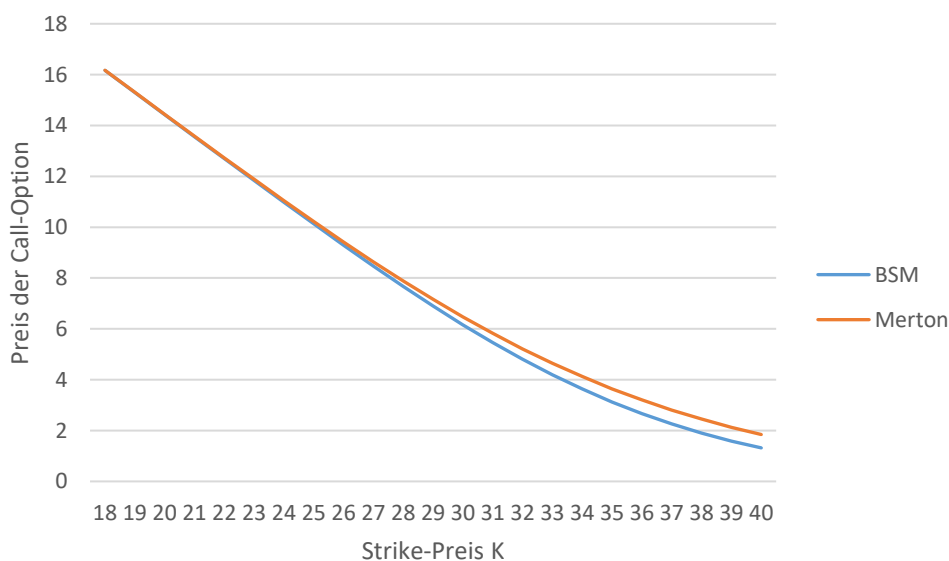


Abbildung 15: Preis-Funktionen von Call-Option auf die GE-Aktie mit Verfalldatum 29.12.2017 in Abhängigkeit von K

Um zu zeigen, dass $f_{Merton} - f_{BSM} \geq 0$ allgemein gültig ist, gilt es, die Volatilität in beiden Fällen miteinander zu vergleichen. Zunächst werden die Varianzen der zu den Modellen gehörenden, logarithmierten Prozesse der Aktienkurse verglichen.

$$\sigma_{BSM}^2(t) = \sigma_{BSM}^2 * t \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{Merton}^2(t) = (\sigma_M^2 + \lambda\delta^2 + \lambda\xi^2)t$$

Der Parameter σ_M^2 steht hierbei für die Varianz des Logarithmus des stetigen Teiles des Prozesses. Aufgrund der Zusammenhänge zwischen dem BSM-Modell und dem Merton-Modell muss daher $\sigma_{BSM}^2 = \sigma_M^2$ gelten. Die restlichen beiden Summanden in der Definition von $\sigma_{Merton}^2(t)$ entsprechen der Varianz des zusammengesetzten Poisson-Prozesses pro Zeiteinheit. Für die Volatilität der beiden Modelle gilt somit folgende Relation:

$$\sigma_{BSM}(t) = \sigma_{BSM} \sqrt{t} \leq \sqrt{(\sigma_{BSM}^2 + \lambda \delta^2 + \lambda \xi^2)t} = \sigma_{Merton}(t)$$

Dies gilt aufgrund der Tatsache, dass die Aussagen $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$ und $\lambda \geq 0$ allgemein wahr sind. Somit folgt auch die Relation $f_{Merton} \geq f_{BSM}$, da es allgemein gültig ist, dass mit steigender Volatilität auch die Optionspreise zunehmen. (vgl. Hull 2015, S. 304f)

Ein weiterer Gesichtspunkt, der das Merton-Modell positiver als das BSM-Modell darstellt, sind die sogenannten Volatility Smiles. Sie beschreiben die charakteristische Form, die der Graph der impliziten Volatilitäten von Marktpreisen in Abhängigkeit vom Basispreis annimmt. Implizite Volatilitäten von beliebigen Optionspreisen erhält man allgemein, indem man betrachtet, wie hoch die Volatilität im BSM-Modell sein müsste, sodass sich der gegebene Optionspreis ergibt. Folglich ist die implizite Volatilität, wenn man Optionspreise mithilfe des BSM-Modelles ermittelt, konstant.

Die charakteristische Form eines Graphen, der die implizite Volatilität von Marktpreisen angibt, entspricht einem konvexen Smile. Es ist allgemein zu beobachten, dass sich diese Smiles tendenziell stärker bei sehr kurzen Restlaufzeiten ausprägen. Rubinstein (1994), der festgestellt hat, dass es zu einem großflächigen Auftreten dieser konvexen Zusammenhänge zum ersten Mal unmittelbar nach dem Börsencrash 1987 gekommen ist, hat daraufhin postuliert, dass der Grund für Volatility Smiles eine Art „Crash-Phobie“ sein könnte.

Diese Form zeigt sich auch bei den Marktpreisen von Call-Optionen auf die GE-Aktie mit $S = 31,60$ \$. Die in der folgenden Grafik verwendeten Daten stammen von der Website „finance.yahoo.com“ und wurden am 30.12.2016 um 22:41 heruntergeladen.

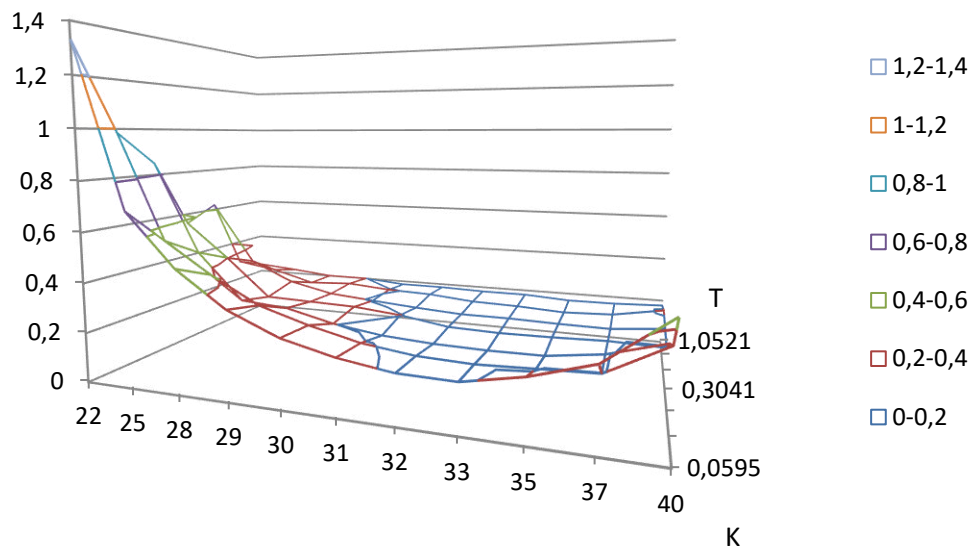


Abbildung 16: Implizite Volatilitäten von Call-Optionen auf die GE-Aktie in Abhängigkeit von Restlaufzeit und Basispreis

Wie erwartet, ist in Abbildung 16 die zuvor beschriebene charakteristische Form zu erkennen.

Mithilfe eines MATLAB-Codes, der am 23.4.2013 von Mark Whirly hochgeladen worden ist, kann nun auch die vom Merton-Modell ausgehende implizite Volatilität in Abhängigkeit von dem Basispreis und der Restlaufzeit angegeben werden. Die Grafik wurde ebenfalls in MATLAB programmiert. Bis auf den Aktienkurs mit $S = 31,60$ \$ wurden dieselben Parameter wie in Kapitel 6.1 verwendet.

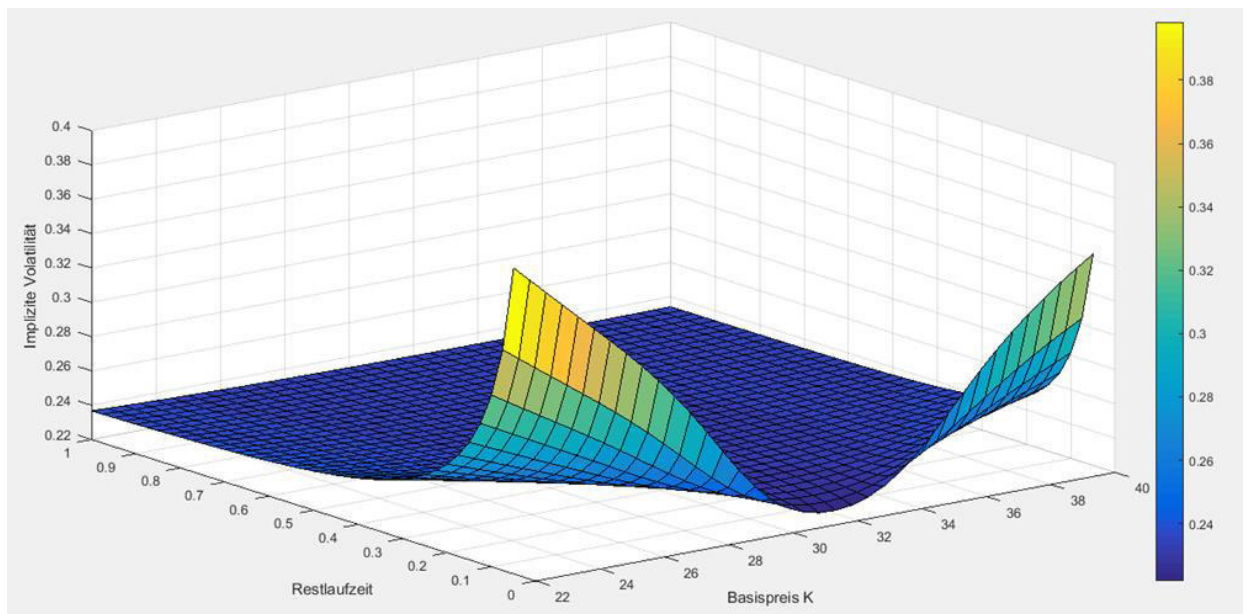


Abbildung 17: Implizite Volatilität von Call-Optionen auf die GE-Aktie im Merton-Modell in Abhängigkeit von Basispreis und Restlaufzeit

Abbildung 17 zeigt eindeutig, dass das Merton-Modell im Vergleich zum BSM-Modell Volatility Smiles abbilden kann. ($\lambda \neq 0$, sonst wäre ja die Merton-DGL gleich der BSM-DGL)

In diesem Gesichtspunkt schafft es also das Merton-Modell besser, die Realität abzubilden. Es sei allerdings auch erwähnt, dass in diesem Beispiel das Maximum der impliziten Volatilitäten des Merton-Modells nur ein Drittel des Maximums der entsprechenden Marktpreise misst.

7 Schlussfolgerungen

Aufgrund der Tatsache, dass das BSM-Modell den Grenzwert des CRR-Modell für $n \rightarrow \infty$ darstellt, kann das BSM-Modell durch das CRR-Modell durch Variation von n beliebig gut approximiert werden.

Ein Vorteil des BSM-Modells gegenüber dem CRR-Modell ist allerdings die Stetigkeit des für den Aktienkurs verwendeten stochastischen Prozesses. Das BSM-Modell bietet so eine weitaus realistischere Darstellung des Wertpapierhandels als das CRR-Modell, da Kursänderungen nicht ausschließlich zu speziellen Zeitpunkten, den Enden von Perioden, sondern zu jedem Zeitpunkt der Handelszeit auftreten können.

Ein Vorteil des CRR-Modells gegenüber dem BSM-Modell ist aber, dass es aufgrund der Endlichkeit der Anzahl der Perioden für die Bewertung von Optionen amerikanischer Natur verwendet werden kann. So kann an jedem Knotenpunkt des Binomialbaumes überprüft werden, ob der Optionspreis bei entsprechendem Aktienkurs und Restlaufzeit größer als die durch eine vorzeitige Ausübung resultierende Auszahlung ist. Ist dies nicht der Fall, so kann der Optionspreis durch den Wert der Auszahlung ersetzt werden.

Aus der durch den zusammengesetzten Poisson-Prozess generierten zusätzlichen Volatilität beim Merton-Modell kann geschlossen werden, dass das Merton-Modell höhere Preise als das BSM-Modell liefert. Diesen Zusammenhang quittieren sowohl Abb. 14 als auch Abb. 15.

Außerdem kann festgestellt werden, dass das Merton-Modell im Gegensatz zum Black-Scholes-Merton-Modell Volatility Smiles abbilden kann. (siehe Abb. 17)

In diesem Gesichtspunkt erweist sich also das vorgestellte Jump-Diffusions-Modell als das Modell, das die Realität besser darstellt.

8 Literaturverzeichnis

Becker, Hans Paul; Peppmeier, Arno (2013): Bankbetriebslehre. 9. Auflage, NWB Verlag, Herne

Black, Fischer; Scholes, Myron (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities. The Journal of Political Economy, Vol. 81, No. 3: 637-654

Churchill, Ruel V. (1963): Fourier Series and Boundary Value Problems. 2. Auflage, McGraw-Hill, New York

Cont, Rama; Tankov, Peter (2004): Financial Modelling with Jump Processes. 1. Auflage, Chapman & Hall, London

Cox, John C.; Ross, Stephen A.; Rubinstein, Mark (1979): Option Pricing: A Simplified Approach. Journal of Financial Economics, Vol. 7, No. 3: 229-263

Hull, John C. (2015): Optionen, Futures und andere Derivate. 9. Auflage, Pearson Studium, München

Lawler, Gregory F. (1995): Introduction to Stochastic Processes. 1. Auflage, Chapman & Hall, London

Merton, Robert C. (1976): Option Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous. Journal of Financial Economics, Vol. 3, No. 1-2: 125-144

Rubinstein Mark (1994): Implied Binomial Trees. Journal of Finance, Vol. 49, No. 3: 771-818

Shreve, Steven E. (2004): Stochastic Calculus for Finance II. Continuous-Time Models. 1. Auflage, Springer Verlag, New York

Webel, Karsten; Wied, Dominik (2016): Stochastische Prozesse. Eine Einführung für Statistiker und Datenwissenschaftler. 2. Auflage, Springer Fachmedien, Wiesbaden

Weber, Michael (2002): Bewertung und Eigenkapitalunterlegung von Kreditderivaten. Risikoadequate Konzepte zur Preisbestimmung und für bankenaufsichtsrechtliche Regelungen. 1. Auflage, Deutscher Universitäts-Verlag, Wiesbaden

9 Abbildungsverzeichnis

Abb. 1: Hull, John C. (2015): Optionen, Futures und andere Derivate. 9.Auflage, Pearson Studium, München, S. 280.....	9
Abb. 2: Hull, John C. (2015): Optionen, Futures und andere Derivate. 9.Auflage, Pearson Studium, München, S. 280.....	10
Abb. 3: Hull, John C. (2015): Optionen, Futures und andere Derivate. 9.Auflage, Pearson Studium, München, S. 280.....	11
Abb. 4: Hull, John C. (2015): Optionen, Futures und andere Derivate. 9.Auflage, Pearson Studium, München, S. 280.....	11
Abb. 5: Eigene Darstellung.....	14
Abb. 6: Eigene Darstellung.....	17
Abb. 7: Eigene Darstellung.....	32
Abb. 8: Vgl. Cox, John C.; Ross, Stephen A.; Rubinstein, Mark (1979): Option Pricing: A Simplified Approach. Journal of Financial Economics, Vol. 7, No. 3: S. 233	34
Abb. 9: Vgl. Cox, John C.; Ross, Stephen A.; Rubinstein, Mark (1979): Option Pricing: A Simplified Approach. Journal of Financial Economics, Vol. 7, No. 3: S. 236	37
Abb. 10: Eigene Darstellung.....	42
Abb. 11: Eigene Darstellung.....	49
Abb. 12: Eigene Darstellung.....	51
Abb. 13: Eigene Darstellung.....	52
Abb. 14: Eigene Darstellung.....	53
Abb. 15: Eigene Darstellung.....	54
Abb. 16: Eigene Darstellung.....	56
Abb. 17: Eigene Darstellung.....	57