KatalogNr 11

Archimedes – Ein genialer Mathematiker und Physiker

Vorwissenschaftliche Arbeit

Eingereicht am BORG Lienz

Eingereicht von:	Anna Schmidhofer
Klasse:	8B
Betreuer:	Dr. Jürgen John

Innervillgraten, den 7. Juli 2017

BUNDES-OBERSTUFENREALGYMNASIUM LIENZ
Kärntnerstraße 8 | 9900 Lienz

Abstract

Die vorliegende Literaturarbeit befasst sich mit Archimedes, einem Gelehrten der Antike, der seiner Zeit weit voraus war. Neben seiner Tätigkeit als Naturwissenschaftler leistete er Großes als Kriegsbauingenieur. Letzteres führte dazu, dass im Laufe der Zeit allerhand Legenden über Archimedes entstanden sind. Relativ wenig ist über das Leben von Archimedes bekannt. Im Gegensatz dazu liegen seine Schriften zu einem großen Teil in überlieferter Form vor. Dies ist jedoch nicht selbstverständlich. Hätte man Archimedes Schriften nicht immer wieder abgeschrieben, so hätten sie wohl nicht bis in die heutige Zeit überlebt. Der Inhalt dieser Schriften lässt Archimedes außergewöhnliches Talent, vor allem für die Mathematik, erahnen. Um das Geniale an seinen Erkenntnissen zu verdeutlichen, wird in dieser Arbeit der formelmäßige Zusammenhang zur Bestimmung der Fläche eines Parabelsegments Schritt für Schritt erarbeitet. Das Bemerkenswerte daran ist, dass Archimedes schon damals vor etwa 2200 Jahren in der Lage war, zahlreiche, nebensächlich erscheinende Erkenntnisse zu gewinnen und diese zu einem Ganzen zu verbinden – dabei aber nie den Überblick zu verlieren.

Vorwort

Heutzutage wird in der Schule kaum mehr von Erkenntnissen antiker Wissenschaftler unterrichtet. Lediglich der *Satz des Thales* sowie der *Satz des Pythagoras* dürften jeder Schülerin und jedem Schüler ein Begriff sein. Das, obwohl vor vielen Jahrhunderten das Behandeln von Texten antiker Wissenschaftler den Grundstein einer guten schulischen Ausbildung bildete. Deshalb sah ich im Verfassen der vorwissenschaftlichen Arbeit die Gelegenheit, mich mit Erkenntnissen aus der Antike auseinanderzusetzen und wählte folglich das Thema *Archimedes – Ein genialer Mathematiker und Physiker*.

An dieser Stelle möchte ich jetzt noch die Gelegenheit ergreifen mich bei einigen Personen zu bedanken. Besonderer Dank gebührt meiner Familie, welche immer Verständnis und viel Geduld an den Tag legte, wenn ich wieder einmal über meiner Arbeit vertieft war. Darüber hinaus möchte ich mich recht herzlich bei meinem Betreuer, Jürgen John, und meinem Klassenvorstand, Herbert Ortner, bedanken.

Innervillgraten, den 20. Februar 2017 Anna Schmidhofer

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung 6

2. Geschichtliche Einordnung 7

3. Archimedes 9

3.1 Das Interesse an Archimedes wird geweckt 9

3.2 Leben 10

3.2.1 Archimedes Tätigkeit für das Königshaus 11

3.3 Legenden 12

3.3.1 Die Goldkrone 13

4. Die Werke des Archimedes 20

4.1 Heute bekannte Schriften 20

4.2 Überlieferung und Weiterleben 22

4.3 Archimedes Schriften als Ausgangstext 24

5. Auf dem Weg zur Quadratur der Parabel 26

5.1 Definition 26

5.2 Grundlegende Eigenschaften 27

5.2.1 Hilfssatz 1 27

5.2.2 Hilfssatz 2 28

5.3 Erste Sätze aus *Die Parabelquadratur* 29

5.3.1 Satz 1 30

5.3.2 Satz 2 31

5.3.3 Satz 3 31

5.4 Längen- und Flächenverhältnisse 37

5.4.1 Das Parabelsegment 37

5.4.2 Satz 18 38

5.4.3 Ein konkretes Zahlenverhältnis ... 39
5.4.4 Ein erster Vergleich von Flächen ... 41
5.4.5 Satz 21 ... 42
5.5 Die Quadratur der Parabel ... 44
5.5.1 Die Summe einbeschriebener Dreiecke ... 44
5.5.2 Der indirekte Beweis ... 48
6. Schluss ... 51
7. Literaturverzeichnis ... 53
8. Abbildungsverzeichnis ... 55

1. Einleitung

Ad fontes ist eine berühmtes Motto und bedeutet ins Deutsche übersetzt *Zurück zu den Quellen*. Humanisten forderten mit diesem Ausruf eine Rückbesinnung auf die Originaltexte antiker Philosophen und Wissenschaftler. Auch ich möchte mich in meiner Arbeit zurück zu diesen Quellen begeben und dabei den griechischen Gelehrten Archimedes näher kennenlernen.

Grundsätzlich verfolgt meine Arbeit zwei Ziele: Einerseits soll Wissen zur Person Archimedes und zu dessen Schriften erlangt werden. Andererseits möchte ich auf einige Erkenntnisse aus den Schriften von Archimedes eingehen. Da es aufgrund der begrenzten Länge der Arbeit nicht möglich ist, auf mehrere Zusammenhänge einzugehen, werde ich mich dabei lediglich auf den Beweis zur Bestimmung der Fläche eines Parabelsegments beschränken und kurz das *Gesetz von Archimedes* vorstellen.

Das erforderliche Wissen zu dieser Arbeit beziehe ich aus verschiedenen literarischen Quellen. Erwähnenswert ist dabei das Buch *Archimedes: Ingenieur, Naturwissenschaftler, Mathematiker*, welches von Ivo Schneider verfasst wurde. Es gibt ausführlich Auskunft zur Person Archimedes und reflektiert übersichtsartig die Erkenntnisse aus den einzelnen Schriften. Wichtige Informationen zur Überlieferung der Schriften von Archimedes habe ich aus dem Buch *Der Kodex des Archimedes*, geschrieben von Reviel Netz und William Noel, gewonnen. Im Buch *Archimedes: Mathematik in bewegten Zeiten*, welches von Günter Aumann verfasst wurde, werden Archimedes Erkenntnisse Schritt für Schritt erarbeitet.

Zum Schluss möchte ich noch kurz auf die Gliederung meiner Arbeit eingehen. Zuerst werde ich kurz geschichtlich wichtige Ereignisse zur Zeit Archimedes nennen. Anschließend möchte ich mich der Person Archimedes widmen, von seinen alltäglichen Tätigkeiten bis hin zu Legenden, welche im Laufe der Zeit entstanden sind. Danach werde ich auf die Werke von Archimedes und deren Überlieferung zu sprechen kommen. Ein großer Teil der Arbeit wird sich mit dem streng geometrischen Beweis zur Findung einer Formel für die Fläche eines Parabelsegments beschäftigen.

2. Geschichtliche Einordnung

Im folgenden Kapitel werden geschichtliche Aspekte zu Archimedes Lebzeiten, von etwa 330 bis 200 v. Chr., betrachtet. Dabei werde ich mich auf Geschehnisse im Mittelmeerraum und dabei im Besonderen auf Syrakus konzentrieren, da Archimedes in dieser Stadt den Großteil seines Lebens verbrachte.

Um 330 v. Chr. ist das wohl bedeutendste Großreich des Mittelmeerraumes das hellenistische Griechenland. Es erlebte seine Blüte unter Alexander dem Großen und endete mit dessen Tod im Jahre 323 v. Chr. Dieser hinterließ ein Reich, welches sich von Makedonien bis zum Indus erstreckte. Ungeklärte Machtfragen führten in den darauffolgenden Jahrzehnten zu mehreren Kriegen zwischen griechischen Klein- und Mittelmächten, welche das hellenistische Griechenland erneut schwächten. Dabei übersah Griechenland die stetig wachsende Macht der anfänglich eher unbedeutenden Stadt Rom und verlor daher zu Beginn des 3. Jhdt. v. Chr. die Herrschaft über Süditalien an Rom. Daraus resultierte der Erste Punische Krieg von 264 bis 241 v. Chr. Das Römische Reich konnte sich im Kampf um Sizilien gegen das Reich der Karthager durchsetzen und ging als Sieger aus dem Krieg hervor. In der folgenden Abbildung ist das Verhältnis der beiden Mächte nach dem Ersten Punischen Krieg dargestellt. Im Zweiten Punischen Krieg, von 218 bis 201 v. Chr., gelang es Rom im Kampfe gegen Karthago das Reich auf den gesamten westlichen Mittelmeerraum auszudehnen (Aumann, 2013, S. 10-12).

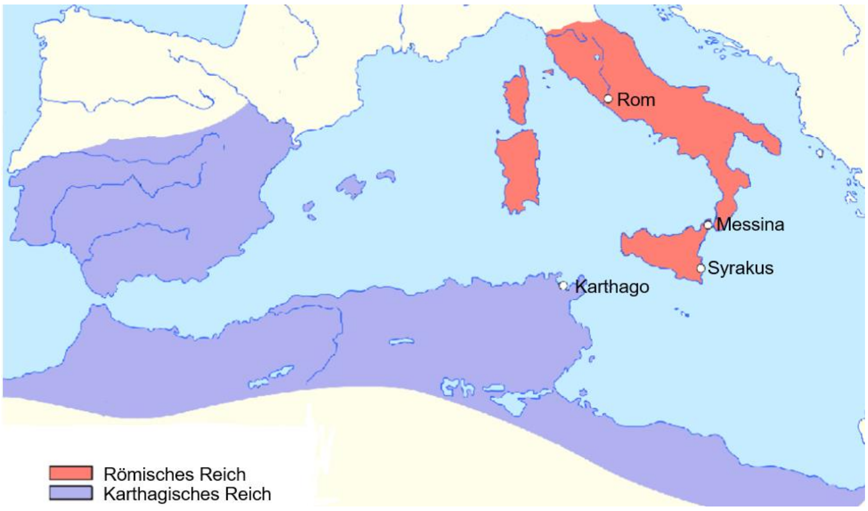


Abb. 1: Machtverhältnisse im Mittelmeerraum nach dem Ersten Punischen Krieg

Neben Rom und Karthago war Syrakus auf Sizilien eine der bedeutendsten Städte der damaligen Zeit. Bereits im Jahre 350 v. Chr. war Syrakus ein wichtiges Handels- und Wirtschaftszentrum. Daher wurde auch das Interesse Roms an Syrakus sowie an ganz Sizilien, geweckt. Schließlich griff das Römische Reich im Jahre 264 v. Chr. das Heer der Karthager und Syrakuser an. Nach dem Erfolg in Messina[1] stieß das römische Heer nach Syrakus vor. 263 v. Chr. wurde Syrakus angegriffen, woraufhin *Hieron II.*[2] mit Rom Frieden schloss. Dies war der Beginn einer 50-jährigen Friedenszeit, bevor schließlich der Zweite Punische Krieg ausbrach. Nach dem Tod von König Hieron II. schloss sich Syrakus unter der Herrschaft von Hieronymos den Karthagern an und führte Krieg mit Rom. Im Jahre 212 v. Chr. gelang es dem römischen Heer letztendlich, die zu dieser Zeit bereits politisch bedeutungslose Stadt Syrakus einzunehmen. Überaus erstaunenswert ist die Tatsache, dass es Syrakus etwa zwei Jahre lang gelungen ist, sich gegen die römischen Truppen zur Wehr zu setzen. Die Person, welche dies durch den Bau großartiger Kriegsmaschinen und die Weiterentwicklung der Kriegsausrüstung ermöglicht hat, war Archimedes (S. 28-35).

[1] Messina ist eine Stadt an der nordöstlichen Spitze Siziliens („Messina“, 2017).

[2] Hieron II. war einer der Könige von Syrakus, welcher von 306 bis 215 v. Chr. lebte („Hieron II of Syracuse“, 2017).

3. Archimedes

Im nachfolgenden Kapitel wird die Person Archimedes näher betrachtet. Dabei wird unter anderem der Frage nachgegangen, weshalb bis in die heutige Zeit so viel über Archimedes überliefert ist. Anschließend sollen sein Leben, seine alltäglichen Beschäftigungen und die damit verbundene Arbeit unter dem damaligen König Hieron II. kurz dargestellt werden. Spannend ist darüber hinaus die Frage, welche Legenden und Anekdoten unser Verständnis von Archimedes grundlegend beeinflusst und in gewisser Hinsicht auch verfälscht haben.

3.1 Das Interesse an Archimedes wird geweckt

Gemessen an unserem Wissen über andere bedeutende Mathematiker der Antike, wie etwa Apollonios und Euklid, ist der heutige Wissensstand zu Archimedes relativ groß. Apollonios und Euklid waren, wie Archimedes, Vertreter einer sehr gut entwickelten Mathematik. Ihre Erkenntnisse wurden oft als praxisfremd angesehen und waren für Machthaber auf den ersten Blick von keinem großen Nutzen. Archimedes war jedoch nicht nur Naturwissenschaftler, sondern auch verantwortlich für die Verteidigung von Syrakus. Diese Tätigkeit verschaffte ihm im Zweiten Punischen Krieg großes Ansehen. Er war es, der die Einnahme von Syrakus durch das römische Heer ungefähr zwei Jahre lang verhindern konnte. Schließlich konnte Rom den Kampf dennoch für sich entscheiden und übernahm nach und nach die Herrschaft über den gesamten Mittelmeerraum. Viele römische Geschichtsschreiber beschäftigten sich mit dem Zweiten Punischen Krieg und erwähnten verständlicherweise die Verdienste von Archimedes (Schneider, 2015, S. 1-2).

Auch Cicero schreibt in einer seiner Schriften von Archimedes: „Etenim ille [Marcellum] requisisse etiam dicitur Archimedem illum, summo ingenio hominem ac disciplina, quem cum audisset interfectum permoleste tulisse.“ (Cicero zitiert nach Yonge, 1889, S. 571) Cicero rühmt Archimedes also mit folgenden Worten: „In der Tat, sagt man, dass jener, Marcellus, sogar nach Archimedes, jenem Menschen mit höchstem Talent und Kenntnissen, gefragt hat. Und dass Marcellus, als er gehört hatte, dass Archimedes getötet wurde, dies zutiefst beklagte.“ Marcellus ist jener Feldherr, unter dessen Führung es den Römern gelang Syrakus einzunehmen. Seine Aussage unterstreicht die Anerkennung, welche nicht zuletzt auch das Römische Reich für Archimedes empfand. Diese Wertschätzung ist einer der ausschlaggebenden Gründe, weshalb das Interesse an Archimedes Leben sowie an seiner militärischen und mathematischen Seite geweckt wurde (Aumann, 2013; Rorres, 1995).

3.2 Leben

Es gibt verschiedene Überlieferungen zum Alter von Archimedes. Dabei lässt sich nur eines mit Sicherheit sagen, und zwar, dass Archimedes im Jahre 212 v. Chr. bei der Einnahme der Stadt Syrakus ums Leben gekommen ist. Sein exaktes Geburtsjahr lässt sich hingegen nicht genau bestimmen. Johannes Tzetzes gibt beispielsweise an, dass Archimedes als ‚sehr alter Mann‘ gestorben sei. Die Angabe ‚sehr alter Mann‘ entsprach damals dem Alter von etwa 75 Jahren. Daraus würde sich das Geburtsjahr 287 v. Chr. ergeben. Problematisch an dieser Angabe ist, dass es in der damaligen Zeit üblich war, Altersgruppen festzulegen und nicht genaue Altersangaben zu machen. Als weitaus zuverlässiger werden die Überlieferungen von Proklos angesehen. Dieser schreibt, dass Archimedes gleichaltrig mit Eratosthenes sei und nach Ptolemaios I. lebte. Das würde ein Geburtsjahr zwischen 283 – 276 v. Chr. nahelegen (Schneider, 2015, S. 2-3).

Archimedes stammt aus einer wohlhabenden und angesehenen Familie. Er selbst schreibt im *Sandrechner*[3], dass sein Vater der Astronom Phidias ist. Dieser war, wohl wegen seiner Tätigkeit als Astronom, mit dem Königshaus befreundet. Phidias hat Archimedes, als dieser noch jung gewesen ist, auf die Mathematik aufmerksam gemacht und ihn unterrichtet. Weiters schließt Schneider nicht aus, dass Archimedes am Museion in Alexandria geforscht und studiert habe. Dies könnte, so Diodorus[4], auch der Grund für seinen einmaligen Aufenthalt in Ägypten sein. Im mittleren Alter von Archimedes erlebte Syrakus

[3] Der *Sandrechner* ist eine Schrift von Archimedes, welche von der Darstellung beliebig großer Zahlen handelt („Sandzahl“, 2017).

[4] Diodorus ist ein antiker Geschichtsschreiber, der im 1. Jahrhundert v. Chr. lebte („Diodorus of Sicily“, 2017).

eine 50-jährige Blütezeit, welche er zum Verfassen seiner Schriften genützt hat. Seine letzten Lebensjahre verliefen im Gegensatz dazu äußerst unruhig. Nach mehreren politischen Wechseln in Syrakus kämpfte die Stadt schließlich unter Hieronymos an der Seite von Karthago im Zweiten Punischen Krieg gegen Rom. In diesen Jahren erlangte Archimedes den Titel „υγγενὴζ καὶ φίλοζ“ (Plutarch zitiert nach Schneider, 2015, S. 4), was nichts anderes als „Verwandter und Freund des Königs“ (Schneider, 2015, S. 4) heißt. Dabei ist aber nicht gemeint, dass Archimedes tatsächlich mit dem Königshaus verwandt war, denn damals stand besonderen Vertrauten und Beratern des Königs dieser Titel zu. Verdanken wird er diese außergewöhnliche Stellung seinen herausragenden militärischen Leistungen (S. 3-9).

3.2.1 Archimedes Tätigkeit für das Königshaus

König Hieron II. wurde wohl durch Phidias auf die Talente von Archimedes aufmerksam. Für diesen waren Archimedes mathematische Fähigkeiten bedeutungslos, da er daraus keinen Nutzen ziehen konnte. Für König Hieron II. war er aber als Kriegsbauingenieur und Berater sehr hilfreich. So beaufsichtigte Archimedes unter anderem den Bau der Stadtmauer und bestückte diese mit verschiedensten Schussvorrichtungen. Eine solche war der Skorpion, eine pfeilschießende Maschine. In Abbildung 2 lässt sich erkennen, wie ein Skorpion vereinfacht ausgesehen haben könnte (Schneider, 2016, S. 6-7).

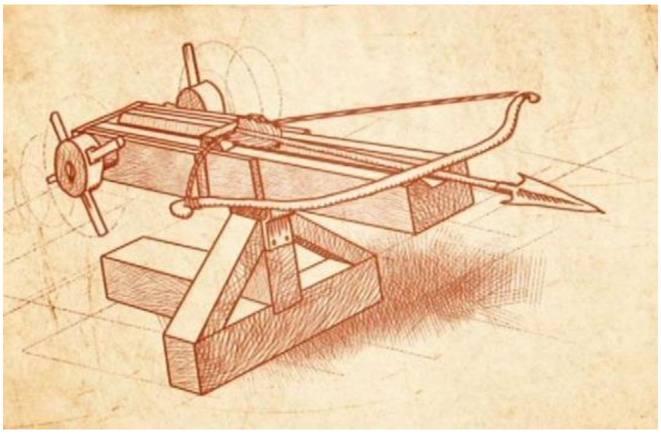


Abb. 2: Skorpion

Das Besondere und Geniale an dieser Erfindung war, dass man durch eine eingebaute Feder auf verschieden weit entfernte Ziele schießen konnte.

Weiters entwickelte er Steinwurfmaschinen zum Versenken von Schiffen. Zudem erfand er eine kranähnliche Vorrichtung zum Anheben von Schiffen. Kam nun ein Schiff näher an eine solche Maschine, wurde es angehoben und daraufhin blitzartig losgelassen. Dabei wurde die Besatzung aus dem Schiff geschleudert und das Schiff selbst wurde an den Felsen zertrümmert. Diese Vorrichtungen kamen erstmals im Zweiten Punischen Krieg bei der Belagerung der Stadt Syrakus durch die Römer zum Einsatz und bereiteten diesen Kopfzerbrechen. Außerdem war Archimedes für das Schiffsbauwesen und die Ausrüstung der Flotte zuständig. Er entwickelte beispielsweise eine Pumpe, die es einem einzigen Mann ermöglichte, einen Schiffsboden zu entleeren. Aufgrund der hervorragenden Leistungen ist es nicht verwunderlich, dass rund um Archimedes verschiedenste Legenden entstanden sind (S. 7-10).

3.3 Legenden

„Störe meine Kreise nicht!" (Archimedes zitiert nach Aumann, 2013, S. 35) ist ein bekannter Ausspruch, welchen Archimedes bei seinem Tod geäußert haben soll. Diese Formulierung wird Archimedes fälschlicherweise in den Mund gelegt. Bei seinem Tode hat Archimedes viel eher folgende Worte gesprochen: „Ihr habt euch niemals mit diesem kenntnisreichen Pulver beschäftigt." (Archimedes zitiert nach Aumann, 2013, S. 35) Mit dem kenntnisreichen Pulver könnte er den feinen Glasstaub gemeint haben, auf welchem Mathematiker damals ihre Gedanken skizziert haben. Der Ausruf dürfte daher bedeuten, dass Archimedes nicht wollte, dass man ihn beim Ausführen seiner mathematischen Tätigkeiten stört (Aumann, 2013, S. 35).

Marcellus, der Feldherr der Römer, soll über Archimedes Tod äußerst betrübt gewesen sein und ihm ein würdiges Grab errichtet haben. Angeblich ließ er eine Säule anfertigen, auf deren Spitze sich ein Zylinder mit einer einbeschriebenen Kugel befand. Cicero soll dieses Grab am Stadttor von *Achradina*[5] besucht haben. Heute findet man an der von Cicero beschriebenen Stelle zwei Gräber. Welches und ob überhaupt eines davon die wahre

[5] Achradina war ein Stadtteil von Syrakus (Lehmler, 2005, S. 103).

Grabstätte von Archimedes ist, weiß man bislang nicht (Schneider, 2015, S. 16).

Eine weitere Erzählung über Archimedes handelt von Brennspiegeln. Laut dieser Erzählung habe Archimedes einen Spiegel entwickelt, welcher Sonnenstrahlen bündelt und in der Lage ist, Schiffe in Brand zu setzen. Versuche haben aber gezeigt, dass es mit den Archimedes zur Verfügung stehenden Mitteln beinahe unmöglich ist, einen solchen Spiegel zu entwickeln (S.35).

Vor allem diese Legende führte zur uneingeschränkten Bewunderung von Archimedes. Zahlreiche Künstler bildeten die verheerende Wirkung dieser Brennspiegel ab, wie etwa Giulio Parigi. Sein Gemälde, welches im Jahre 1600 fertiggestellt wurde, ist in der folgenden Abbildung dargestellt. Erstaunlicherweise lassen sich zu Archimedes Brennspiegeln deutlich mehr Aufzeichnungen finden als zu den tatsächlich von ihm entwickelten Kriegsmaschinen. Dies verdeutlicht, dass es sich als überaus schwierig gestaltet, Fakten von erfundenen Geschichten zu unterscheiden.

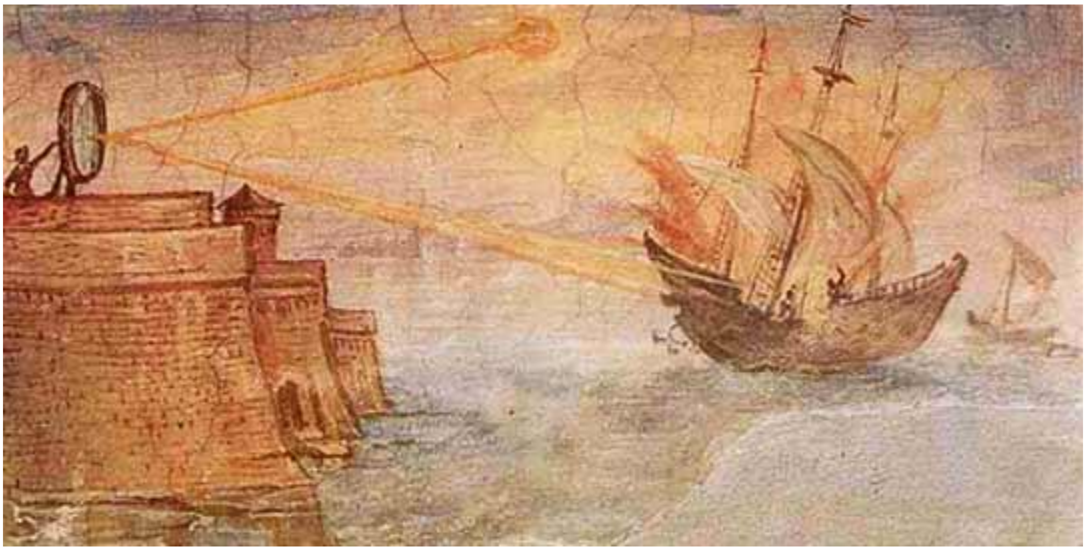


Abb. 3: Gemälde von Giulio Parigi

3.3.1 Die Goldkrone

„Heureka, heureka!“ (Archimedes zitiert nach Aumann, 2013, S. 34) – dieser Ausruf wird oftmals mit Archimedes in Verbindung gebracht. Dies heißt so viel wie „Ich hab’s!“ (Archimedes zitiert nach Anderegg, 2014) Der Grund für diesen Ausruf soll ein Auftrag von König Hieron gewesen sein; dieser hatte einen

Goldschmied beauftragt, eine Krone aus reinem Gold anzufertigen. Dafür hatte er ihm eine gewisse Menge an Gold gegeben und nach einiger Zeit lieferte der Schmied dem König eine Krone mit exakt demselben Masse. Dem König wurde gesagt, dass dieser nicht das ganze Gold verwendet, sondern etwas Silber hinzugemischt habe. Aus diesem Grund wurde Archimedes beauftragt, die Angelegenheit zu untersuchen. Daraufhin soll Archimedes ein Bad genommen und erkannt haben, dass das Wasser in dem Maße übergeht, wie tief er seinen Körper eintaucht. Anschließend soll er nackt die Badewanne verlassen haben und mit lautem „Heureka, heureka!" (Archimedes zitiert nach Aumann, 2013, S.34) durch die Stadt gelaufen sein. Danach habe er Versuche angestellt, indem er Gold- und Silberklumpen mit der gleichen Masse wie die Krone in Wasser eingetaucht habe. Dabei habe er erkannt, dass die Krone mehr Wasser verdrängt, als der gleich schwere Goldklumpen. Somit war der Goldschmied des Diebstahles überführt (Aumann, 2013, S. 33-34).

Es ist unwahrscheinlich, dass Archimedes den Diebstahl tatsächlich aufgedeckt hat, indem er die Krone und ein gleich schweren Goldklumpen in Wasser getaucht und überprüft hat, wie viel Wasser jeweils überfloss. Das Problematische an dieser Legende wird im Folgenden dargelegt. Heute sind einige Kronen, wie diese aus der Legende, noch erhalten. Diese wiegen durchschnittlich 1000 g und haben einen Durchmesser von etwa 18 cm. Daher nimmt man für die nachstehenden Überlegungen an, dass Archimedes eine Krone von 1000 g und einen Goldklumpen mit derselben Masse in einen mit Wasser gefüllten Behälter mit einem Durchmesser von 20 cm getaucht hat. Die Wasseroberfläche in diesem zylindrischen Behälter beträgt $10^2 \cdot \pi \ cm^2 \approx 314 \ cm^2$. Es wird berechnet, wie sehr der Wasserspiegel ansteigt, wenn man die Krone bzw. den Goldklumpen ins Wasser eintaucht. Dabei wird die Masse des jeweiligen Körpers mit m, die Dichte eines Materials mit ρ und das Volumen des betrachteten Körpers mit V bezeichnet. Das Volumen des Goldklumpens wird wie folgt berechnet (Leifiphysik, 2013).

$$m = \rho_{Gold} \cdot V \qquad \Big| \cdot \frac{1}{\rho_{Gold}}$$

$$V = \frac{m}{\rho_{Gold}}$$

$V = \frac{1000}{19{,}3}\,cm^3 \approx 51{,}8\ cm^3$

Es stellt sich die Frage, wie stark der Wasserspiegel beim Eintauchen des Goldklumpens ansteigt. G ist dabei die Grundfläche, in diesem Fall die Wasseroberfläche des zylindrischen Behälters, und h ist die Höhe, um welche der Wasserspiegel ansteigt, wenn man den Goldklumpen mit dem Volumen V eintaucht (Leifiphysik, 2013).

$V = G \cdot h \qquad \Big|\cdot \frac{1}{G}$

$h = \frac{V}{G}$

$h \approx \frac{51{,}8}{314}\ cm \approx 0{,}165\ cm$

Beim Eintauchen des Goldklumpens wird der Wasserspiegel um 1,64 mm angehoben. Dasselbe wird berechnet, für den Fall, dass die Goldkrone eingetaucht wird. Für die Überlegungen wird angenommen, dass der Goldschmied beim Anfertigen $\frac{1}{3}$ kg Silber und $\frac{2}{3}$ kg Gold verwendet hat (Leifiphysik, 2013).

$V_{Krone} = V_{Silber} + V_{Gold}$

$V_{Silber} = \frac{m}{\rho_{Silber}}$

$V_{Silber} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 1000}{10{,}6}\ cm^3 \approx 31{,}4\ cm^3$

$V_{Gold} = \frac{m}{\rho_{Gold}}$

$V_{Gold} = \frac{\frac{2}{3}\cdot 1000}{19{,}3}\ cm^3 \approx 34{,}5\ cm^3$

$V_{Krone} = V_{Silber} + V_{Gold}$

$V_{Krone} \approx 31{,}4\ cm^3 + 34{,}5\ cm^3 = 65{,}9\ cm^3$

Der Wasserspiegel wird angehoben um (Leifiphysik, 2013):

$$h = \frac{V_{Krone}}{G}$$

$$h \approx \frac{65{,}9}{314}\ cm \approx 0{,}210\ cm$$

Wird die Krone eingetaucht, dann wird der Wasserspiegel um 2,10 mm angehoben. Der Höhenunterschied des Wasserspiegels beim Eintauchen des Goldklumpens und der Krone beträgt $2{,}10\ mm - 1{,}65\ mm = 0{,}45\ mm$. Dieser Unterschied ist sehr klein und wäre mit den Archimedes zur Verfügung stehenden Messgeräten nicht nachweisbar gewesen (Leifiphysik, 2013).

Daher erscheint es als viel nachvollziehbarer, dass Archimedes mit dem Auftriebs- und Hebelgesetz den Goldschmied überführt hat. Mit dem folgenden Versuch wird dazu zunächst *Das Gesetz von Archimedes* erarbeitet (ebd.).

3.3.1.1 Das Gesetz von Archimedes

Man braucht eine Balkenwaage mit Gewichten, ein Überlaufgefäß, ein Auffanggefäß, einen Metallzylinder und einen Hohlzylinder, in welchen der Metallzylinder genau hineinpasst. Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 4 dargestellt (Leifiphysik, 2013).

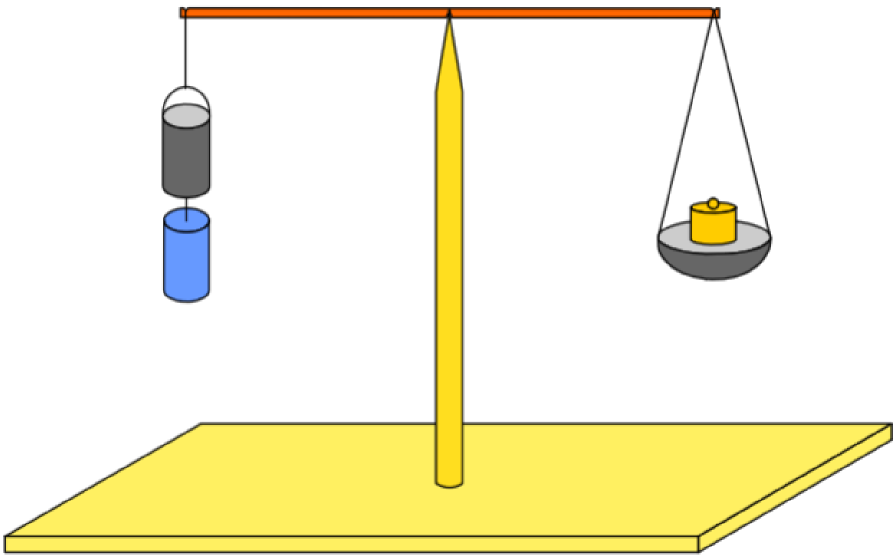


Abb. 4: Versuchsaufbau

Dazu wird der Hohlzylinder an einem Ende der Balkenwaage angebracht. Am unteren Ende des Hohlzylinders wird der Metallzylinder befestigt. Durch

Hinzufügen von Gewichten am anderen Ende der Balkenwaage wird diese ins Gleichgewicht gebracht. Im nächsten Schritt werden unter den Zylindern das Überlauf- und das Auffanggefäß in Position gebracht. Anschließend wird der Metallzylinder in das Überlaufgefäß getaucht. Dies ist in Abbildung 5 dargestellt (Leifiphysik, 2013).

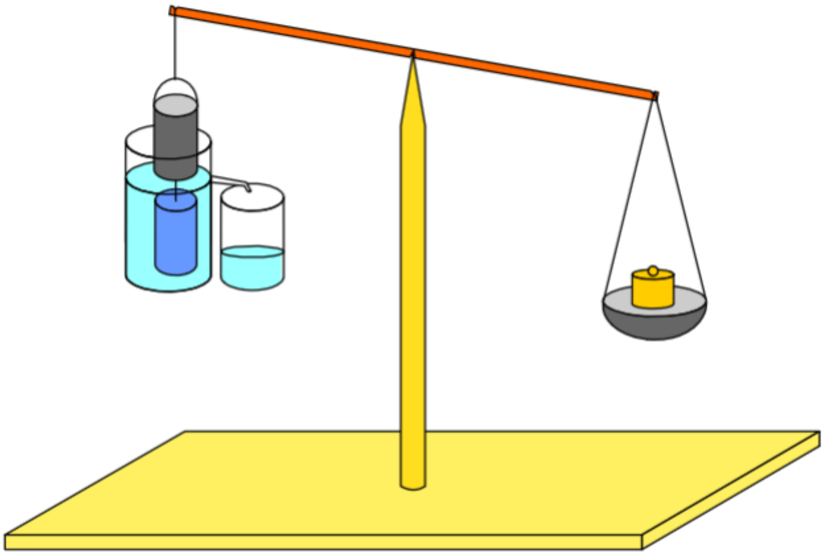


Abb. 5: Versuch

Beim Eintauchen des Metallzylinders fließt so viel Wasser ins Auffanggefäß, wie durch das Volumen des Metallzylinders verdrängt wird. Gleichzeitig erfährt der Metallzylinder eine Auftriebskraft und die Waage neigt sich nach rechts. Füllt man aber das Wasser vom Auffanggefäß in den Hohlzylinder, ist die Waage wieder im Gleichgewicht. Daher kann gesagt werden, dass die Balkenwaage in Abbildung 5 nicht im Gleichgewicht ist, da die Belastung am linken Hebelarm durch den Auftrieb um die Masse des abgeflossenen Wassers verringert wird. Hieraus folgt *Das Gesetz von Archimedes*: „Die Auftriebskraft ist gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit.“ (Archimedes zitiert nach Leifiphysik, 2013).

Mit diesem Wissen kann gezeigt werden, wie Archimedes argumentiert hat, dass die Krone nicht aus reinem Gold besteht. Wie zuvor wird angenommen, dass Archimedes einen Goldklumpen und eine Krone, welche zu einem Drittel aus Silber und zu zwei Drittel aus Gold besteht, vorliegen hat. Krone und Goldklumpen haben dabei eine Masse von 1000 g. Die Krone wird auf der einen Seite der Balkenwaage angebracht. In gleicher Entfernung zur Achse wird auf der anderen Seite der Balkenwaage der Goldklumpen befestigt. Die Krone und der Goldklumpen werden in einen Behälter, welcher mit Wasser gefüllt ist, getaucht. Dies ist in Abbildung 6 zu sehen. Wie bereits berechnet wurde, hat die Krone ein Volumen von 65,9 cm^3 und verdrängt 65,9 g Wasser, da Wasser die Dichte von 1 $\frac{g}{cm^3}$ hat. Nach dem *Gesetz von Archimedes* belastet die Krone durch den Auftrieb im Wasser die Balkenwaage nur mehr mit $1000\ g - 65{,}9\ g = 934{,}1\ g$. Der Goldklumpen hat ein Volumen von 51,8 cm^3 und verdrängt 51,8 g Wasser. Die Belastung der Balkenwaage durch den Goldklumpen beträgt durch den Auftrieb $1000\ g - 51{,}8\ g = 948{,}2\ g$ (Leifiphysik, 2013).

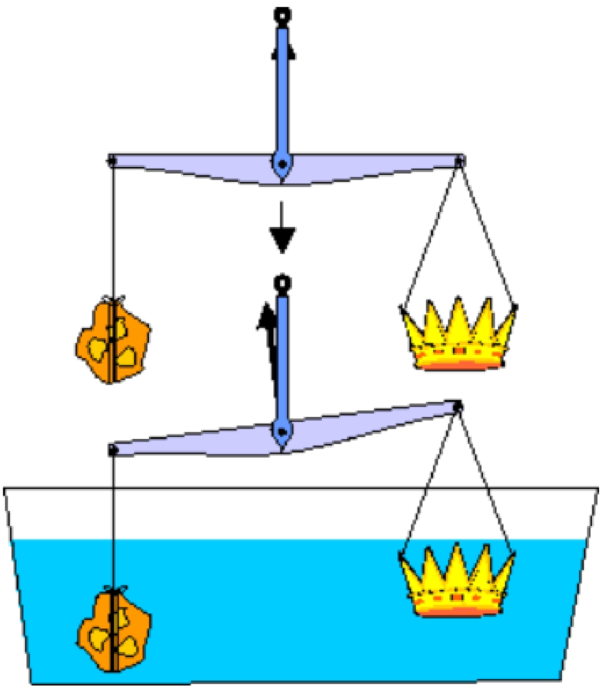


Abb. 6: Überführung des Goldschmiedes

Die Balkenwaage ist daher nicht mehr im Gleichgewicht und es kann eindeutig gezeigt werden, dass die Krone nicht aus reinem Gold besteht. Würde sie aus reinem Gold bestehen, so müsste die Balkenwaage auch nach dem Eintauchen im Gleichgewicht sein, da Krone und Goldklumpen gleichviel Auftrieb erfahren würden. Hat es den Auftrag an Archimedes, den Goldschmied zu überführen, tatsächlich gegeben, so wird Archimedes auf diese Weise den Diebstahl nachgewiesen haben (Leifiphysik, 2013).

Von Legenden, welche sich um die Person Archimedes ranken, möchte ich jetzt zu jenem übergehen, was von Archimedes noch erhalten bzw. zumindest genau überliefert ist – seinen Werken.

4. Die Werke des Archimedes

Im weiteren Verlauf möchte ich auf die von Archimedes verfassten Werke eingehen. Höchst interessant sind hierbei folgende Fragen: Welche Werke sind inhaltlich heutzutage noch bekannt? In welcher Reihenfolge hat Archimedes seine Werke verfasst? Daraufhin werde ich den Weg von Archimedes Schriften, von ihrer Entstehung bis in die heutige Zeit, verfolgen. Auf dieser langen Reise wurden diese Schriften von vielen anderen Wissenschaftlern gelesen und dienten als Ausgangspunkt für zahlreiche neue Erkenntnisse.

4.1 Heute bekannte Schriften

Heute sind fast alle Schriften von Archimedes größtenteils inhaltlich oder zumindest namentlich bekannt. Verglichen mit der relativ langen und ruhigen Zeit, welche Archimedes zum Verfassen seiner Schriften zur Verfügung hatte, ist sein Gesamtschaffen vom Umfang her allerdings relativ klein. Ein Grund dafür sind einerseits die schon erwähnten Tätigkeiten für das Königshaus. Andererseits nahmen praktische Versuche viel Zeit in Anspruch. Dennoch ist Archimedes beim Ausarbeiten seiner Schriften gezielt vorgegangen. Sein Ziel war es, aufeinander aufbauende Werke zu veröffentlichen (Schneider, 2015, S. 14).

Nachfolgend wird ein Teil der Werke von Archimedes aufgelistet. Dabei wird die von vielen Archimedesforschern, wie etwa Drachmann und Arendt, vertretene Ansicht bezüglich der Reihenfolge der Werke bereits berücksichtigt.

1. *Die Elemente der Mechanik*[6]
2. *Die Parabelquadratur*
3. *Über Kugel und Zylinder*, Buch I
4. *Die Kreismessung*
5. *Über Kugel und Zylinder*, Buch II
6. *Über Spiralen*
7. *Über Konoide und Sphäroide*[7]
8. *Über das Gleichgewicht ebener Flächen*, Buch I und II

---

[6] *Die Elemente der Mechanik* ist eine Schrift, welche aus einer Reihe kleinerer Werke, wie *Über den Schwerpunkt*, *Über Stützen* und *Über Waagen,* besteht (Schneider, 2015, S. 31).

[7] Konoide und Sphäroide sind Körper, welche durch die Rotation verschiedener Kurven entstehen („Konoid“, „Sphäroid“, 2017).

9. *Die mechanische Methode*
10. *Über schwimmende Körper*, Buch I und II

Weitere bedeutende Schriften konnten aufgrund der mangelnden Hinweise nicht in die obige Reihenfolge eingegliedert werden (S. 31).

Diese oben angeführte Reihenfolge beruht auf verschiedenen Untersuchungen. Oftmals erwähnt Archimedes in Einleitungen oder Querverweisen, welche Schriften er bereits abgefasst hat. Nicht selten kommt es vor, dass er beim Behandeln neuer Probleme auf bereits gewonnene Ergebnisse aus einer anderen Schrift verweist. Daraufhin lässt sich erstmals eine gewisse Abfolge der Schriften erkennen. Bei der Einordnung hat zusätzlich die Betrachtung bestimmter Fachbegriffe geholfen. Im Laufe der Parabelquadratur führt Archimedes zum Beispiel die Begriffe *Basis*, *Scheitel* und *Höhe einer Parabel* ein. In der Schrift *Über Kugel und Zylinder* überträgt er diese Begriffe gleichermaßen auf Körper. Die Begriffe werden hier aber nicht erneut definiert. Dies lässt darauf schließen, dass *Die Parabelquadratur* älter als *Über Kugel und Zylinder* ist (S. 19-21).

Zudem ist auch das Erwähnen von bestimmten Ereignissen in den Einleitungen oft ein Anhaltspunkt für die Reihenfolge. In *Die Parabelquadratur* beklagt Archimedes den nur kurze Zeit zurückliegenden Tod Konons, welcher um etwa 240 v. Chr. gestorben ist. In *Über Spiralen* schreibt er dann, dass seit Konons Tod bereits viele Jahre vergangen sind. Daraus folgt, dass *Über Spiralen* nach *Die Parabelquadratur* entstanden ist (S. 24-25).

Wie bereits erwähnt wurde, verfasste Archimedes auch andere Schriften, welche sich aufgrund der unzureichenden Anhaltspunkte, aber nicht in die obige Reihenfolgen einordnen lassen. Erwähnenswert wäre dabei zunächst einmal *Das Stomachion*, ein Zusammensetzspiel. Eine andere Schrift ist *Das Lemmata*, welches sich mit der Inhaltsbestimmung ebener Flächen befasst. *Das Rindviehproblem* ist eine weitere Abfassung von Archimedes, bei der es sich um das Lösen eines unterbestimmten Gleichungssystems handelt (S. 19).

Archimedes hat sich jedoch nicht nur mit mathematischen Themen beschäftigt, sondern hatte viele andere Interessensgebiete, wie etwa die Astronomie. So wird überliefert, dass er eine Schrift über Planetarien verfasst habe. Diese

Annahme wird dadurch untermauert, dass Marcellus bei der Einnahme von Syrakus ein von Archimedes gefertigtes Planetarium als Beute mitgenommen hat. Außerdem hat er sich mit der Frage beschäftigt, wie viele Sandkörner im Weltall Platz haben. Dieser astronomischen Frage geht Archimedes in *Der Sandrechner* nach. Dabei kam er zur Erkenntnis, dass wohl 10^{63} Sandkörner das Weltall ausfüllen. Diese Zahl ist erstaunlich groß, wenn man in Betracht zieht, dass für die Griechen in der Antike bereits 10 000 – eine Myriade - eine enorm große Zahl darstellte. Dies hat Archimedes aber nicht daran gehindert, ein neues Zahlensystem auf der Basis von 10^8, also eine Myriade zum Quadrat, zu erstellen. Mit diesem Zahlensystem war es ihm nun ein Leichtes derart große Zahlen wie etwa 10^{63} auszudrücken (Aumann, 2013, S. 38-39).

Nachdem die uns heute bekannten Schriften erwähnt wurden, stellt sich die Frage, woher wir dieses Wissen überhaupt beziehen. Wie haben Archimedes Schriften mehr als 2200 durchwegs turbulente Jahre überstanden und schließlich bis heute überlebt?

4.2 Überlieferung und Weiterleben

Archimedes hat es auch selbst möglich gemacht, dass der Inhalt vieler seiner Werke bis in unsere Zeit erhalten ist. Er war es, der Briefe mit seinen Erkenntnissen an Wissenschaftler in Alexandria, die am Museion tätig waren, geschickt hat. Archimedes schrieb in einem Brief, welcher die *Methodenlehre* beinhaltet, an Eratosthenes: „Ich nehme nämlich an, dass jemand von den jetzigen oder künftigen Forschern durch die hier dargelegte Methode auch andere Lehrsätze finden wird, deren wir noch nicht teilhaftig geworden sind." (Archimedes zitiert nach Netz, 2010, S. 70) Das war für Eratosthenes sicherlich der Anlass, Kopien von Archimedes Briefen auf Papyrusrollen anfertigen zu lassen und diese gut zu verwahren. Wahrscheinlich hat auch Archimedes von seinen Briefen eine Kopie machen lassen, jedoch sind diese im Laufe der Zeit verloren gegangen (Netz & Noel, 2010, S. 71-73).

Von vielen Forschern in der Antike wurden die Werke von Archimedes als abgeschlossen betrachtet und deshalb sahen sie keine Notwendigkeit, diese weiterzuentwickeln. Ganz anders wurden hingegen die Werke von Euklid bewertet. Sie galten als Basistexte, welche weitere Forschungstätigkeiten zuließen. So ist es nicht verwunderlich, dass das Interesse an Archimedes Schriften in der Antike eher gering war, seine Schriften nur selten gelesen wurden und somit in Vergessenheit gerieten. Im vierten Jahrhundert n. Chr. kam darüber hinaus noch hinzu, dass Papyrusrollen allmählich an Wert verloren. Immer häufiger verwendete man damals eine neue Buchform, den Kodex[8]. Ein solcher Medienwechsel ist für alte Schriften äußerst problematisch, da sie übertragen werden müssen, damit ihr Fortleben gesichert ist. Glücklicherweise erledigte ein Gelehrter namens Eutokios im 5. und 6. Jhdt. n. Chr. das Abschreiben von Archimedes Werken von Papyrusrollen auf Kodizes. Eutokios unternahm viele Reisen, unter anderem nach Alexandria, bei welchen er wohl mit den Schriften des Archimedes in Kontakt gekommen ist. Er übertrug dessen Schriften aber nicht nur, sondern fügte zudem Erklärungen hinzu, welche das Verständnis deutlich erleichterten (S. 75-78).

Zwei Bekannte von Eutokios, Anthemios von Tralleis und Isidor von Milet, waren aufgrund ihrer Tätigkeit als Architekten ebenso an den Werken von Archimedes interessiert. Die beiden arbeiteten an der Hagia Sophia in Konstantinopel und mussten mehrere Berechnungen für Gewölbe und Säulenkonstruktionen aufstellen. Dabei waren die Werke von Archimedes durchaus hilfreich und so kam es, dass Isidor von Milet eine Ausgabe der Schriften von Archimedes mit den Kommentaren von Eutokios veröffentlichte (S. 80-81).

Ein weiterer gravierender Einschnitt in der Überlieferungsgeschichte der Werke von Archimedes ist der Wechsel von der Majuskel- zur Minuskelschrift. In Abbildung 7 lässt sich der Unterschied von Majuskeln und Minuskeln erkennen. Die Majuskelschrift besteht ausschließlich aus Großbuchstaben, wohingegen die Minsukelschrift auch Kleinbuchstaben verwendet (S. 83).

[8] Ein Kodex ist eine vereinfachte Form des Buches, so wie wir es auch heute noch kennen („Kodex“, 2017).

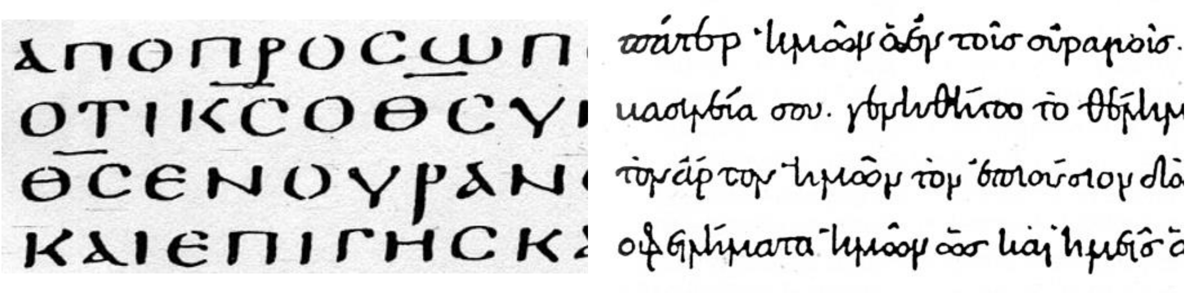


Abb. 7: Vergleich: Majuskeln (links) und Minuskeln (rechts)

Wie auch beim Übergang von der Papyrusrolle zum Kodex war es diesmal erforderlich, die Schriften erneut zu übertragen. Dies geschah im 9. und 10. Jhdt. n. Chr. in Konstantinopel. Infolgedessen entstanden die heute unter dem Namen Kodex A, Kodex B und Kodex C bekannten Ausgaben der Schriften von Archimedes. Heute ist von ihnen nur noch Kodex C erhalten. Dieser ist die älteste Überlieferung von Archimedes Schriften, die uns heute in der Form eines *Palimpsests*[9] zur Verfügung steht. Leider fehlen Anfang und Ende des Palimpsests; diese Abschnitte haben mit großer Wahrscheinlichkeit weitere Schriften von Archimedes enthalten. Besonders wertvoll ist dieses Palimpsest, da es auch *Das Stomachion* und *Die mechanische Methode* überliefert, deren Inhalt nirgendwo sonst erhalten geblieben ist (S. 83-89).

4.3 Archimedes Schriften als Ausgangstext

Im Mittelalter waren byzantinische Texte für abendländische Forscher von besonderer Bedeutung und so stieg nach und nach das Interesse an Archimedes in Europa. Wissenschaftler und Philosophen beschäftigten sich zu dieser Zeit mit der Vergleichbarkeit von krumm- und geradlinig begrenzten Figuren. Werke, die diese Probleme behandelten waren begehrter Lesestoff. Zu diesen zählt auch Archimedes *Kreismessung*, welche infolgedessen oft als Ausgangstext für neue Ausgaben benutzt wurde. Dies verlangte auch, dass der griechische Text ins Lateinische übersetzt wurde, was der Mönch Wilhelm von Moerbeke tat. Der Mathematiker Regiomontan brachte eine solche Übersetzung nach Deutschland, wo im Jahre 1544 erstmals eine Ausgabe in

[9] Ein Palimpsest ist ein beschriebenes Pergament, dessen ursprünglicher Text abgekratzt und das neu beschrieben wurde („Palimpsest“, 2017).

gedruckter Form erschien. Aufgrund der Erfindung des Buchdrucks Mitte des 15. Jhdt. war es möglich, eine große Zahl an Kopien anzufertigen. Deshalb war Archimedes Wissen von nun an für die breite Masse der Wissenschaftler zugänglich (Schneider, 2015, S. 120-124).

Seit dem einsetzenden Humanismus im 15. Jhdt. wurden hauptsächlich Wissenschaftler aus der Antike gelesen, so auch Archimedes. Die Gelehrten dieser Zeit waren darum bemüht Archimedes Wissen auf andere Gebiete zu übertragen, ähnliche Probleme zu finden und diese zu verallgemeinern. Ein Beispiel findet sich bei Pierre de Fermat, welcher sich zunächst mit der Galilei‘schen Spirale $r(\phi) = \phi^2$ beschäftigte. Später war er darum bemüht, die Fläche einer Spirale $r(\phi) = \phi^n$ zu bestimmen. Dazu verwendete er Archimedes Modell zum Bestimmen des Flächeninhaltes einer Spirale und konnte das Problem erfolgreich lösen. Auch Johannes Kepler nutzte Archimedes Wissen. Er veröffentlichte ein auf die archimedischen Schriften *Kreismessung* und *Über Kugel und Zylinder* aufbauendes Werk (S. 124-125).

Archimedes Vorgehensweise beim Erarbeiten einer Formel und einige seiner grundlegenden Beweismuster werden im nachfolgenden Kapitel am Beispiel der Parabelquadratur erklärt.

5. Auf dem Weg zur Quadratur der Parabel

Das Ziel dieses Kapitels ist es, den Flächeninhalt eines Parabelsegments zu bestimmen. Dazu werden zahlreiche Berechnungen angestellt. Ein Großteil dieser Berechnungen basiert auf der Verwendung von Verhältnissen und der Betrachtung von Dreiecken, welche dem Parabelsegment einbeschrieben werden. Zu guter Letzt werden die gewonnen Zusammenhänge mithilfe des *indirekten Beweises* verbunden und man erhält einen formelmäßigen Zusammenhang für die Fläche eines Parabelsegments.

5.1 Definition

Heute fällt es uns leicht eine Parabel graphisch in einem Koordinatensystem, aber auch in der Form einer Gleichung, $y = x^2$, darzustellen. Archimedes standen diese Mittel jedoch noch nicht zur Verfügung, da es zur damaligen Zeit noch kein Koordinatensystem gab. Damit verbunden gab es keine Gleichungen, welche die Existenz eines Koordinatensystems voraussetzen. Archimedes muss daher eine alternative Darstellungsform verwendet haben, die aber nicht überliefert ist. Im Folgenden wird nun jene Darstellungsweise verwendet, welche Archimedes Überlegungen nahelegen (Aumann, 2013, S. 47).

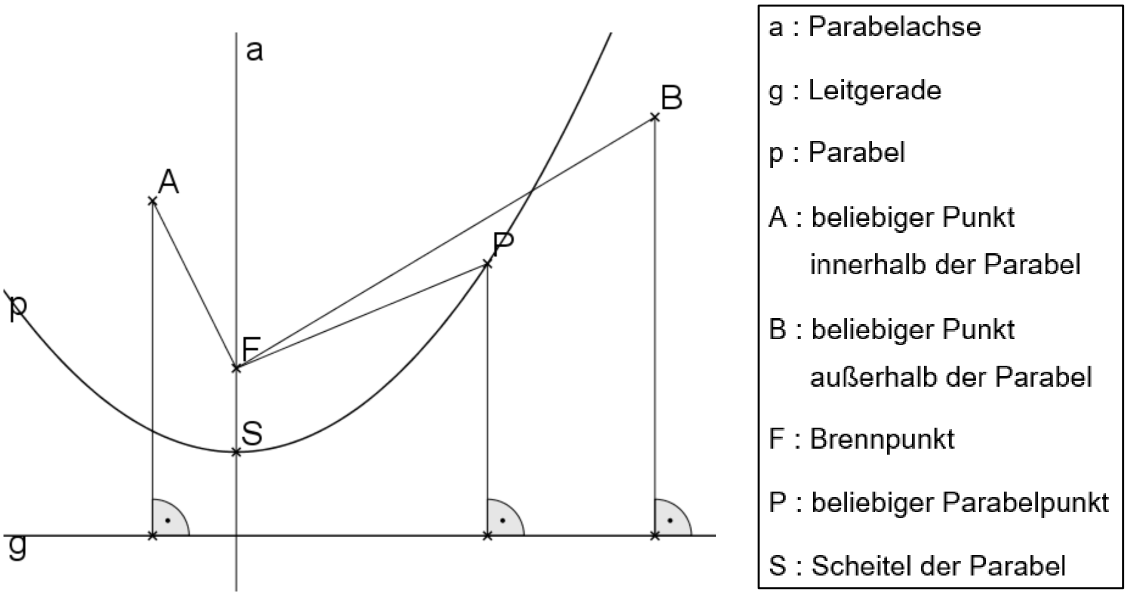


Abb. 8: Definition der Parabel

Eine solche Parabel konstruiert man wie folgt. Es sei eine Leitgerade g und ein Punkt F, der Brennpunkt, gegeben. Die Parabel p bestehe aus all jenen

Punkten, deren Normalabstand auf die Leitgerade g dem Abstand zum Brennpunkt entspricht, kurz: $d(P,g) = d(P,F)$[10]. Weiters muss geklärt werden, welche Punkte innerhalb bzw. außerhalb der Parabel liegen. Im Innenbereich liegen all jene Punkte, deren Abstand zum Brennpunkt kleiner ist als deren Normalabstand auf g. Analog dazu liegen jene Punkte außerhalb der Parabel, deren Abstand zum Brennpunkt größer ist als deren Normalabstand auf g (Aumann, 2013, S. 48).

5.2 Grundlegende Eigenschaften

Vielfach baut Archimedes in *Die Parabelquadratur* auf Zusammenhängen auf, welche er nicht explizit erwähnt, die aber wesentlich zum Verständnis dieser Abhandlung beitragen. Gemeint sind dabei die Definition der Parabeltangente und die Mittelpunktbestimmung einer Sehne – das ist die Verbindungsstrecke zweier Parabelpunkte. Diese Zusammenhänge werden im Weiteren behandelt.

5.2.1 Hilfssatz 1

Hilfssatz 1: Jene Gerade, welche den Winkel $\alpha = \sphericalangle(\overline{PF}, \overline{PA})$ halbiert, ist die Parabeltangente t in P (Aumann, 2013, S. 48-49).

Beweis: Dieser Satz lässt sich unter Betrachtung von Abbildung 9 leicht erklären. Da $d(F,P) = d(P,A)$, steht die Winkelhalbierende t senkrecht auf der Strecke $\overline{FA}$. Dies bedeutet auch, dass die Winkel $\sphericalangle(\overline{FP}, \overline{FA})$ und $\sphericalangle(\overline{AF}, \overline{AP})$ übereinstimmen. Es wird nun ein beliebiger Punkt U auf der Winkelhalbierenden t eingezeichnet, wobei $U \neq P$. Für alle Strecken $\overline{UF}$ bzw. $\overline{UA}$ gilt: $d(U,F) = d(U,A)$. Weiters ist im Dreieck ABU die Seite $\overline{UA}$ die längste Seite und somit $d(U,F) = d(U,A) > d(U,B) = d(U,g)$. Dies entspricht der folgenden Aussage: $d(U,F) > d(U,g)$. Da U ein beliebiger Punkt auf der Winkelhalbierenden t ist, liegen alle Punkte, mit Ausnahme von P, im Außenbereich der

[10] $d(P,g)$ ist der Normalabstand von P auf die Leitgerade g (Aumann, 2013, S. 49). Im Folgenden ist mit $d(Z,h)$ stets der Normalabstand von einem beliebigen Punkt Z auf eine beliebige Gerade h gemeint.

Parabel[11]. Die Gerade, welche diese Eigenschaften erfüllt, ist die Tangente, welche die Parabel in P berührt. Somit ist erwiesen, dass die Winkelhalbierende in P die Parabeltangente ist (Aumann, 2013, S.48-49). ■

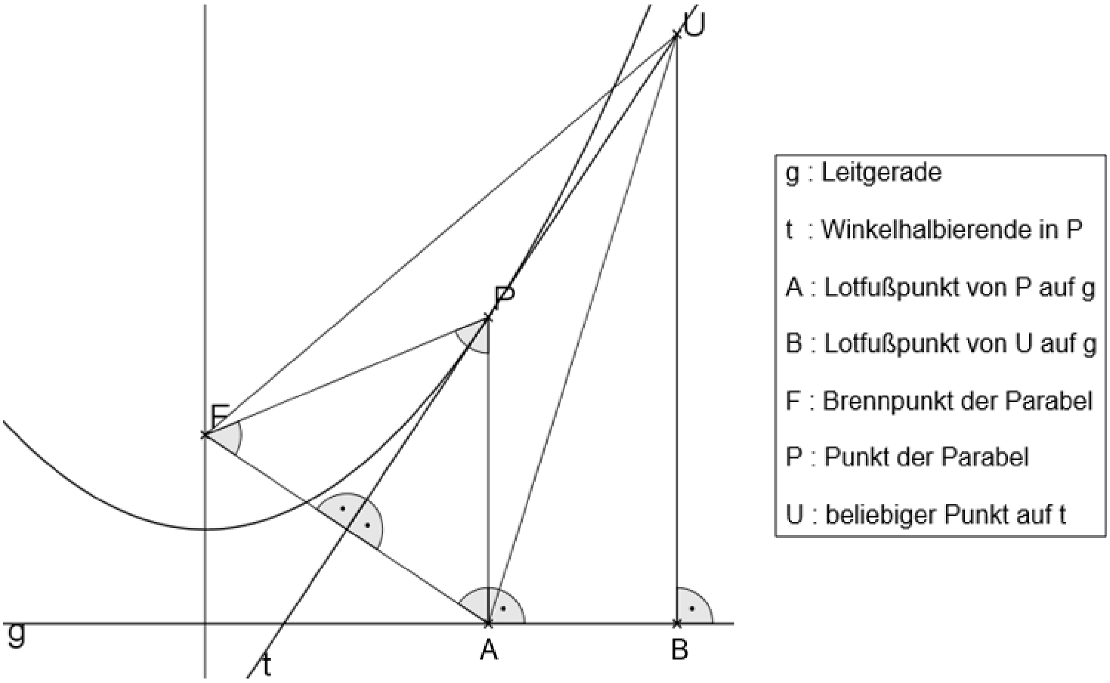


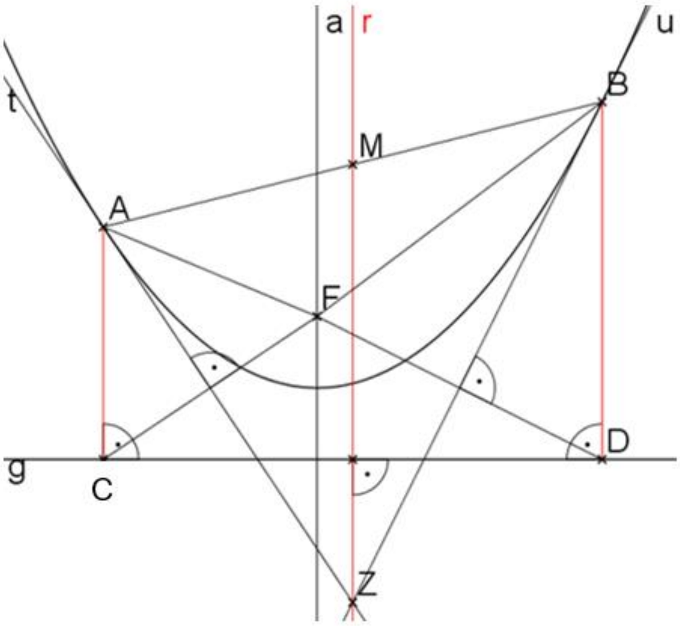
Abb. 9: Die Parabeltangente

Ebenso wie Hilfssatz 1 ist auch der folgende von zentraler Bedeutung in *Die Parabelquadratur*.

5.2.2 Hilfssatz 2

Hilfssatz 2: Die Parallele zur Parabelachse a durch den Schnittpunkt der Parabeltangenten in A und B halbiert die *Sehne* $\overline{AB}$ (Aumann, 2013, S. 49-50).

[11] siehe 5.1 Definition



a : Parabelachse
g : Leitgerade
r : Parallele zu a durch Z
t : Tangente in A
u : Tangente in B
A : beliebiger Punkt der Parabel
B : beliebiger Punkt der Parabel $(A \neq B)$
C : Lotfußpunkt von A auf g
D : Lotfußpunkt von B auf g
F : Brennpunkt der Parabel
M : Mittelpunkt der Sehne $\overline{AB}$
Z : Schnittpunkt von t mit u

Abb. 10: Halbierung der Sehne $\overline{AB}$

Beweis: Wie man schon im Beweis von *Hilfssatz 1* gesehen hat, stehen die Tangenten t und u orthogonal auf $\overline{FC}$ bzw. $\overline{FD}$ und halbieren gleichzeitig diese Strecken. t und u bilden folglich die Streckensymmetralen von $\overline{FC}$ bzw. $\overline{FD}$. Der Schnittpunkt von t mit u ist gleichzeitig der Umkreismittelpunkt Z des Dreiecks FCD. Die Parallele zu a durch Z ist die Streckensymmetrale r auf $\overline{CD}$ und halbiert diese Strecke. Da C bzw. D, die Lotfußpunkte von A bzw. B auf g sind, ist $\overline{AC} \parallel r \parallel \overline{BD}$. Deshalb halbiert r nicht nur $\overline{CD}$, sondern auch die Sehne $\overline{AB}$ (Aumann, 2013, S. 49-50). ■

5.3 Erste Sätze aus *Die Parabelquadratur*

Nun folgen drei Sätze, welche Archimedes in *Die Parabelquadratur* ohne Beweis angibt. Zum besseren Verständnis werden sie dennoch im anschließenden Unterkapitel bewiesen.

5.3.1 Satz 1

Satz 1 aus *Die Parabelquadratur*:

> Eine Parabeltangente in einem Punkt P ist dann parallel zu einer Sehne $\overline{AB}$, wenn die Parallele zu a durch P die Sehne $\overline{AB}$ halbiert (Aumann, 2013, S. 50).

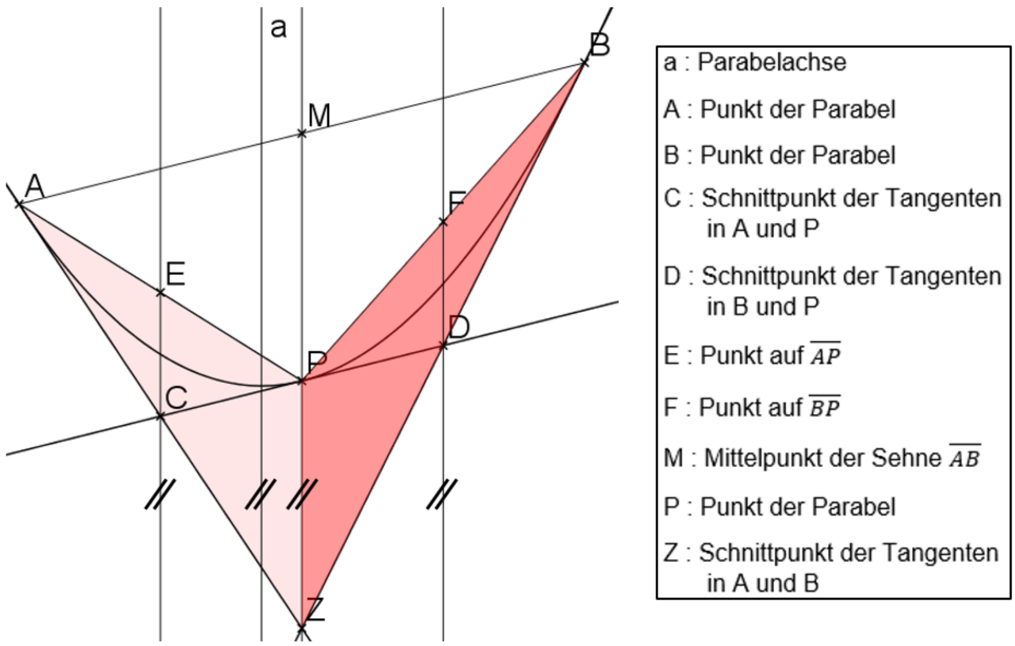


Abb. 11: Weitere Eigenschaften

Beweis: Der Punkt P ist so gewählt, dass die Parallele zu a durch P die Sehne $\overline{AB}$ halbiert. Nach *Hilfssatz 2* halbiert die Parallele zu a durch C die Sehne $\overline{AP}$ und die Parallele zu a durch D die Sehne $\overline{BP}$. Wendet man den Strahlensatz im Dreieck $\triangle APZ$ mit Zentrum A an, gilt: $\frac{1}{2} = \frac{d(A,E)}{d(A,P)} = \frac{d(A,C)}{d(A,Z)}$. Analog dazu gilt für das Dreieck $\triangle BPZ$: $\frac{1}{2} = \frac{d(B,F)}{d(B,P)} = \frac{d(B,D)}{d(B,Z)}$. Daraus folgt, dass C bzw. D der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AZ}$ bzw. $\overline{BZ}$ ist. Aufgrund dieses Zusammenhanges gilt nach Anwendung des Strahlensatzes mit Zentrum Z im Dreieck $\triangle ABZ$, dass $\overline{CD}$ bzw. die Parabeltangente in P parallel zur Sehne $\overline{AB}$ sind (Aumann, 2013, S. 50-51). ■

5.3.2 Satz 2

Für die nachstehenden Überlegungen wird erneut Abbildung 11 betrachtet.

> Wendet man den Strahlensatz im Dreieck $\triangle AMZ$ an, so gilt:
>
> $\frac{2}{1} = \frac{d(Z,A)}{d(Z,C)} = \frac{d(Z,M)}{d(Z,P)}$ oder kurz: $\frac{\overline{ZM}}{\overline{ZP}} = 2$ bzw.
>
> $2 \cdot d(Z,P) = d(Z,M)$ (Aumann, 2013, S.50-51).

Dieser Zusammenhang wird im zweiten Satz aus *Die Parabelquadratur* formuliert.

Satz 2 aus *Die Parabelquadratur*:

> Halbiert die Parallele zu a durch Z die Sehne $\overline{AB}$, dann ist $d(Z,M)$ doppelt so groß wie $d(P,M)$ (Aumann, 2013, S. 50-51).

5.3.3 Satz 3

Im Folgenden wird ein Zusammenhang erarbeitet, welcher zuerst belanglos erscheint, jedoch zu einem späteren Zeitpunkt von großem Nutzen sein wird. Gesucht ist eine allgemeine Formel für das Quadrat über dem Teilstück $\overline{AM}$. Dabei muss $\overline{AM}$ jedoch nicht zwingend senkrecht auf der Parabelachse stehen (Aumann, 2013, S. 51).

5.3.3.1 Hilfssatz 3

Begonnen wird mit dem Sonderfall, in welchem die Sehne $\overline{AB}$ senkrecht auf der Parabelachse a steht, wie dies Abbildung 12 zeigt. Diese vereinfachte Annahme soll als Vorbereitung dienen, um schlussendlich den dritten Satz aus *Die Parabelquadratur* zu beweisen (Aumann, 2013, S. 51-52).

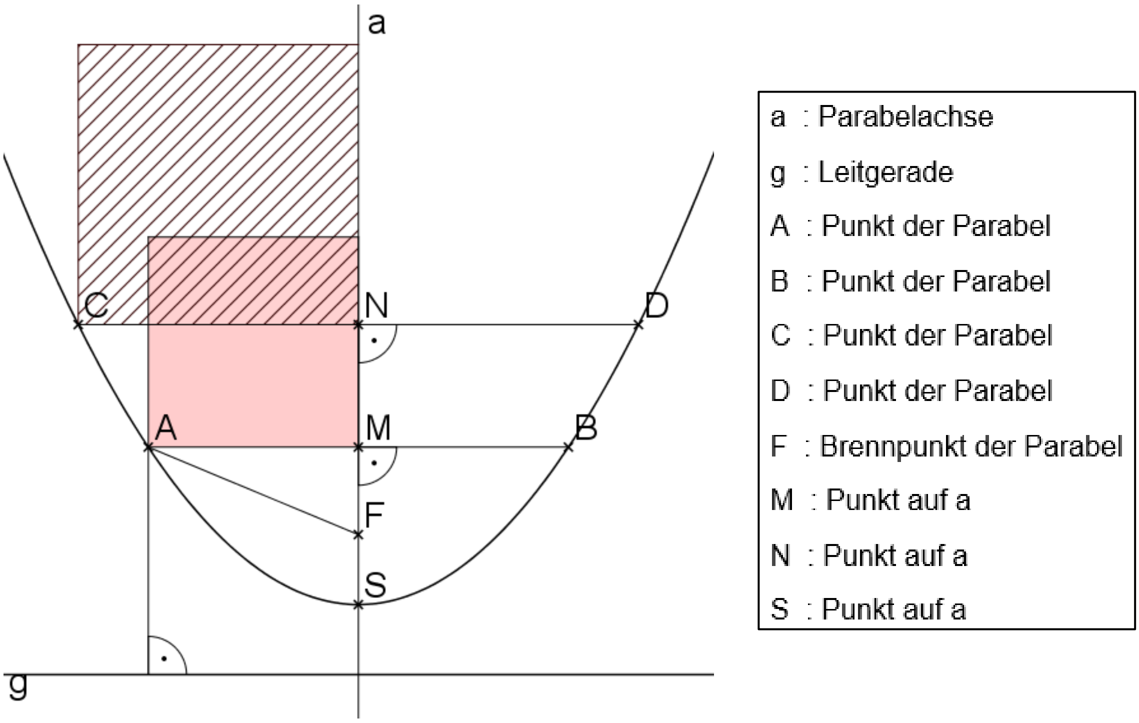


Abb. 12: Vereinfachte Darstellung

Beweis: Im ersten Schritt wird der Satz von Pythagoras angewendet.

$$d^2(A,M) = d^2(A,F) - d^2(F,M) \qquad |d^2(A,F) = d^2(A,g)$$ [12]

$$= d^2(A,g) - [d(S,M) - d(S,F)]^2 \qquad |d^2(S,F) = d^2(S,g)$$

$$= d^2(M,g) - [d(S,M) - d(S,g)]^2$$

$$= [d(S,g) + d(S,M)]^2 - [d(S,M) - d(S,g)]^2 \qquad |bin. Formeln\ anw.$$

$$= d^2(S,g) + 2 \cdot d(S,g) \cdot d(S,M) + d^2(S,M) - [d^2(S,M) - 2 \cdot d(S,M) \cdot d(S,g) + d^2(S,g)]$$

$$= d^2(S,g) + 2 \cdot d(S,g) \cdot d(S,M) + d^2(S,M) - d^2(S,M) + 2 \cdot d(S,M) \cdot d(S,g) - d^2(S,g)$$

$$= 2 \cdot d(S,g) \cdot d(S,M) + 2 \cdot d(S,M) \cdot d(S,g)$$

$$= 4 \cdot d(S,g) \cdot d(S,M)$$ [13]

[12] siehe 5.1 Definition

[13] Aumann, 2013, S. 51-52

Da es sich beim Abstand vom Scheitelpunkt S zur Leitgeraden g um eine konstante Größe handelt, kann man die eben erhaltene Formel auch folgendermaßen anschreiben (Aumann, 2013, S.52):

$4 \cdot d(S,g) \cdot d(S,M) = const. \cdot d(S,M) = z \cdot d(S,M)$ ■

Gesucht ist darüber hinaus das Verhältnis des Quadrates über der Strecke $\overline{AM}$ zum Quadrat über der Strecke $\overline{CN}$. Auch $\overline{CN}$ steht senkrecht auf der Parabelachse (Aumann, 2013, S. 52).

Beweis: $\frac{d^2(A,M)}{d^2(C,N)} = \frac{z \cdot d(S,M)}{z \cdot d(S,N)} = \frac{d(S,M)}{d(S,N)}$ ■

Dieser Zusammenhang lässt sich im folgenden Satz formulieren.

Hilfssatz 3: Halbieren M bzw. N die Sehne $\overline{AB}$ bzw. $\overline{CD}$, welche orthogonal auf der Parabelachse stehen, so verhält sich das Quadrat über $\overline{AM}$ zum Quadrat über $\overline{CN}$ wie $d(S,M)$ zu $d(S,N)$ (Aumann, 2013, S. 52).

5.3.3.2 Verallgemeinerung

Nun kann man sich dem Finden einer allgemeinen Formel widmen. Dazu wird Abbildung 13 betrachtet.

Beweis: Zu Beginn soll bewiesen werden, dass das Dreieck $\triangle AQP$ dieselbe Größe wie das Rechteck $\square OSPL$ besitzt (Aumann, 2013, S. 52).

1. $\frac{[AQP]}{[ZRN]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot d(A,P) \cdot d(P,Q)}{\frac{1}{2} \cdot (N,R) \cdot d(R,Z)}$ [14] $\quad \left| \frac{d(P,Q)}{d(R,Z)} = \frac{d(A,P)}{d(N,R)} \right.$ [15]

$$\frac{[AQP]}{[ZRN]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot d(A,P) \cdot d(A,P)}{\frac{1}{2} \cdot d(N,R) \cdot d(N,R)}$$

$$\frac{[AQP]}{[ZRN]} = \frac{d^2(A,P)}{d^2(N,R)} \quad |Hilfssatz\ 3\ anw.$$

$$\frac{[AQP]}{[ZRN]} = \frac{d(P,S)}{d(R,S)}$$

[14] Mit [AQP] ist der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle AQP$ gemeint. Im weiteren Verlauf deuten diese eckigen Klammern stets auf den Flächeninhalt der in den Klammern stehenden Figur hin.

[15] Dieser Zusammenhang gilt, da $\sphericalangle(\overline{QA}, \overline{QP}) = \sphericalangle(\overline{ZN}, \overline{ZR})$ (Aumann, 2013, S. 52).

2. $\frac{[OSPL]}{[OSRN]} = \frac{d(O,S) \cdot d(P,S)}{d(O,S) \cdot d(R,S)} = \frac{d(P,S)}{d(R,S)}$

1. und 2. $\frac{[AQP]}{[ZRN]} = \frac{[OSPL]}{[OSRN]}$ [16]

Nun werden die Flächen [OSRN] und [ZRN] verglichen (Aumann, 2013, S. 52).

1. $[OSRN] = d(R,N) \cdot d(R,S)$

2. $[ZRN] = \frac{1}{2} \cdot d(R,N) \cdot d(R,Z)$ $\quad |Satz\ 2\ anw.$

$= \frac{1}{2} \cdot d(R,N) \cdot 2d(R,S)$

$= d(R,N) \cdot d(R,S)$

1. und 2. $[OSRN] = [ZRN]$ [17] ★

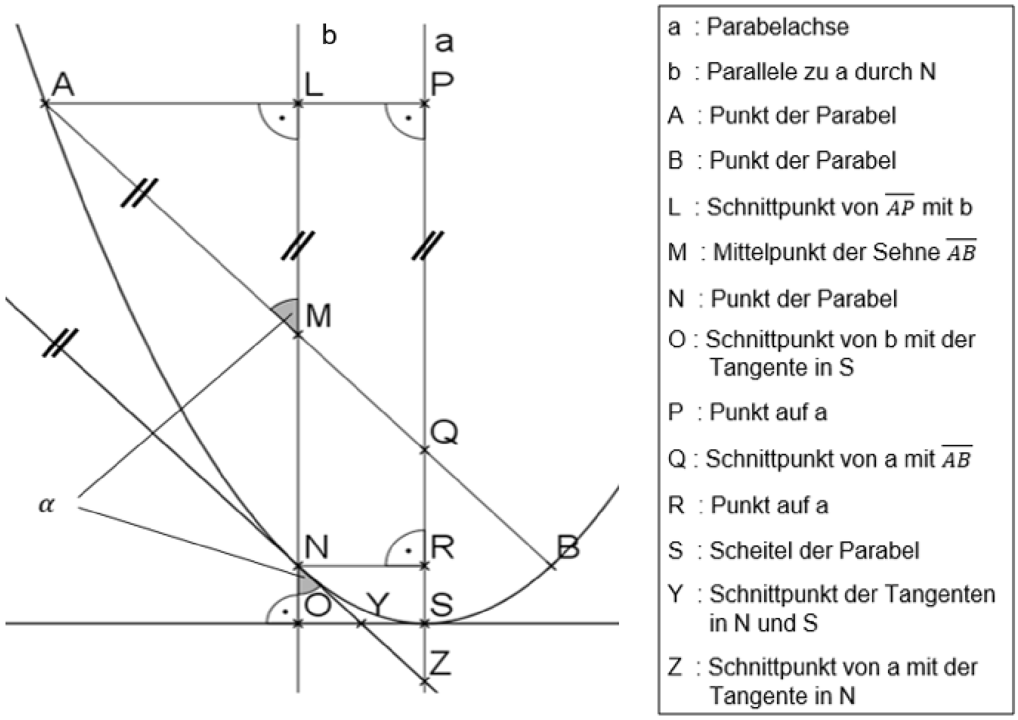


Abb. 13: Allgemeine Darstellung

---

[16] Aumann, 2013, S. 52

[17] Aumann, 2013, S. 52

$\frac{[AQP]}{[ZRN]} = \frac{[OSPL]}{[OSRN]}$ $\quad | \bigstar\, eins.$

$\frac{[AQP]}{[ZRN]} = \frac{[OSPL]}{[ZRN]}$

$[AQP] = [OSPL]$ [18] ★★

Somit wäre bewiesen, dass das Dreieck $\triangle\, AQP$ gleich groß wie das Rechteck $\square OSPL$ ist. Anschließend wird gezeigt, dass $[AQP] = [NZPL]$ (Aumann, 2013, S. 52).

$[NZPL] = [NRPL] + [ZRN]$ $\quad | \bigstar\, eins.$

$[NZPL] = [NRPL] + [OSRN]$

$[NZPL] = [OSPL]$ $\quad | \bigstar\bigstar\, eins.$

$[NZPL] = [AQP]$ [19]

$[NZPL] = [AQP]$ $\quad | -MQPL$

$[NZPL] - [MQPL] = [AQP] - [MQPL]$

$[NZQM] = [AML]$ $\quad \Big| \cdot \frac{1}{2}$

$\frac{[AML]}{2} = \frac{[NZQM]}{2} = [NQM]$

$\frac{[AML]}{2} = [NQM]$ $\quad | \cdot 2$

$[AML] = 2 \cdot [NQM]$

$\frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot d(M,A) \cdot d(M,L) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot d(M,N) \cdot d(M,Q)$

$d(M,A) \cdot d(M,L) = 2 \cdot d(M,N) \cdot d(M,Q)$ $\quad | d(M,Q) = d(N,Z)$

$d(M,A) \cdot d(M,L) = 2 \cdot d(M,N) \cdot d(N,Z)$ $\quad |:[2 \cdot d(M,N) \cdot d(N,Z)\,]$

[18] Aumann, 2013, S. 52

[19] Aumann, 2013, S. 52

$\frac{d(A,M)\cdot d(M,L)}{2\cdot d(M,N)\cdot d(N,Z)} = 1$ [20] ★★★

Die Dreiecke AML und OYN sind ähnlich, da $\overline{AL}$ parallel zu $\overline{OY}$ und $\overline{AM}$ parallel zu $\overline{NY}$ ist. Berechnet man $\frac{1}{\cos\propto}$, so gilt:

$$\cos \propto = \frac{d(M,L)}{d(M,A)} = \frac{d(N,O)}{d(N,Y)}$$

$$\frac{1}{\cos\propto} = \frac{d(M,A)}{d(M,L)} = \frac{d(N,Y)}{d(N,O)}$$

$$\frac{d(A,M)}{d(M,L)} = \frac{d(N,Y)}{d(N,O)} \qquad |1.Bruch\ mit\ d(A,M)\ erw.$$

$$|2.Bruch\ mit\ d(N,M)\ erw.$$

$$\frac{d^2(A,M)}{d(M,L)\cdot d(A,M)} = \frac{d(N,Y)\cdot d(N,M)}{d(N,O)\cdot d(N,M)} \qquad |\cdot [d(M,L)\cdot d(A,M)]$$

$$d^2(A,M) = \frac{d(N,Y)\cdot d(N,M)\cdot d(M,L)\cdot d(A,M)}{d(N,O)\cdot d(N,M)} \qquad |\mathrm{r.Seite\ m.2d(N,Z)}\ erw.$$

$$d^2(A,M) = \frac{d(N,Y)\cdot d(N,M)\cdot d(M,L)\cdot d(A,M)\cdot 2d(N,Z)}{d(N,O)\cdot d(N,M)\cdot 2d(N,Z)}$$

$$d^2(A,M) = \frac{d(M,L)\cdot d(A,M)}{2\cdot d(N,Z)\cdot d(N,M)}\cdot\frac{d(N,Y)\cdot 2d(N,Z)}{d(N,O)}\cdot d(N,M) \qquad |\bigstar\bigstar\bigstar\ anw.$$

$$d^2(A,M) = 1\cdot\frac{d(N,Y)\cdot 2d(N,Z)}{d(N,O)}\cdot d(N,M)$$ [21]

Der Faktor $\frac{d(N,Y)\cdot 2d(N,Z)}{d(N,O)}$ ist abhängig von der Richtung der Sehne $\overline{AB}$. Für diesen Faktor wird im Folgenden der Parameter q verwendet. So erhält man schließlich die Formel für das Quadrat der Strecke $\overline{AM}$, wobei diese nicht senkrecht auf der Parabelachse stehen muss: $d^2(A,M) = q\cdot d(N,M)$ (Aumann, 2013, S. 52-53). ■

Zu guter Letzt wird nun noch das Verhältnis der Quadrate über den Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{CE}$ betrachtet. Dies ist in Abbildung 14 dargestellt.

[20] Aumann, 2013, S. 52

[21] Aumann, 2013, S. 53

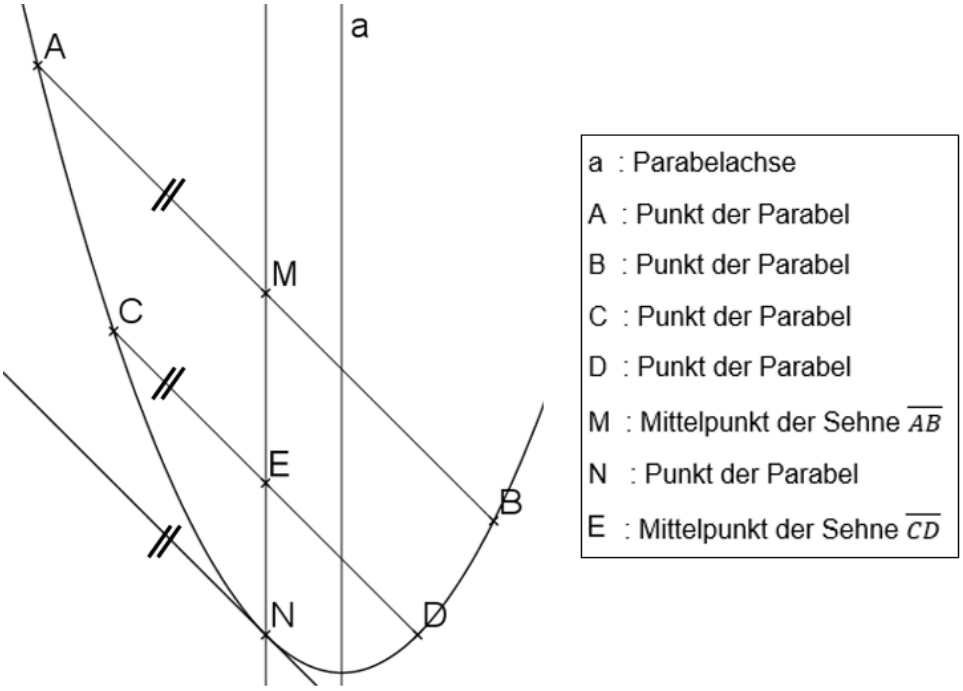


Abb. 14: Satz 3

Beweis: $\frac{d^2\,(A,M)}{d^2\,(C,E)} = \frac{q \cdot d(N,M)}{q \cdot d(N,E)} = \frac{d(N,M)}{d(N,E)}$ [22] ■

Satz 3 aus *Die Parabelquadratur*:

> Die Sehne $\overline{AB}$ und die dazu parallel verlaufende Sehne $\overline{CD}$ werden durch eine Parallele zur Parabelachse in M bzw. E halbiert. In diesem Fall gilt, dass sich das Quadrat über $\overline{AM}$ zum Quadrat über $\overline{CE}$, so verhält wie die Strecke $\overline{NM}$ zur Strecke $\overline{NE}$ (Aumann, 2013, S. 54).

5.4 Längen- und Flächenverhältnisse

5.4.1 Das Parabelsegment

Im weiteren Verlauf erweist es sich als durchaus hilfreich einige grundlegende Eigenschaften des Parabelsegments, welches im Folgenden abgebildet ist, zu kennen. (Aumann, 2013, S. 53-54).

---

[22] Aumann, 2013, S. 54-

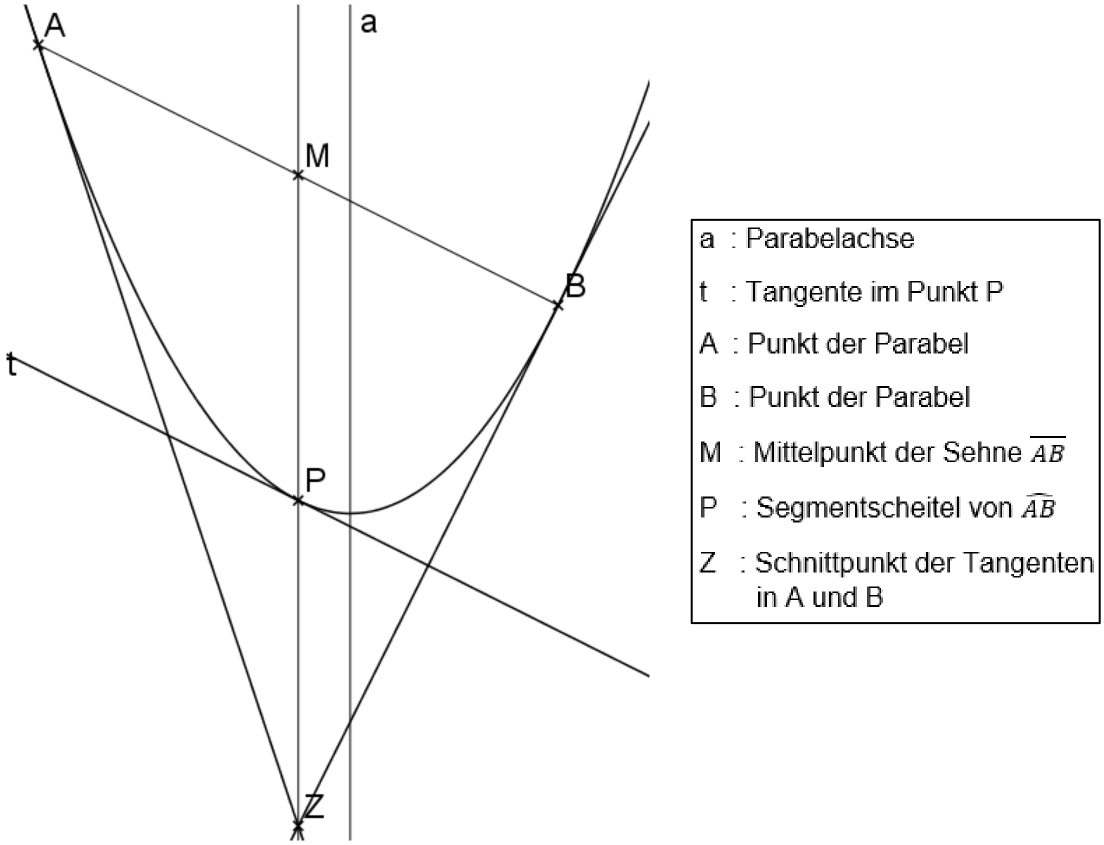


Abb. 15: Das Parabelsegment

Das Parabelsegment wird mit $\widehat{AB}$ bezeichnet. Dies ist die endliche Fläche der Parabel, welche durch die Sehne $\overline{AB}$ begrenzt wird. Der Punkt P ist der Segmentscheitel. Einige wichtige Eigenschaften eines Segmentscheitels werden im Folgenden aufgelistet. Diese gewinnt man vor allem aus Hilfssatz 2 und Satz 1 (Aumann, 2013, S. 53-54):

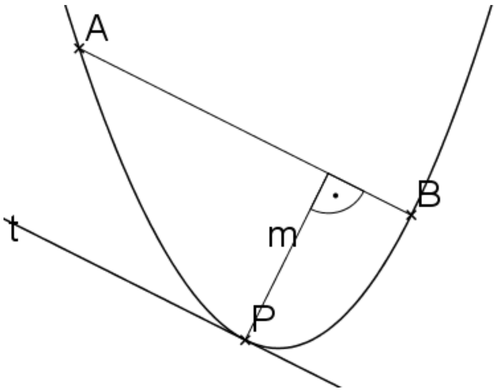
1. Die Parabeltangenten in A und B schneiden sich auf der Parallelen zur Parabelachse durch P im Punkt Z.
2. Die Parallele zur Parabelachse durch P halbiert $\overline{AB}$ in M.
3. Die Parabeltangente in P ist parallel zu $\overline{AB}$ (ebd.).

5.4.2 Satz 18

Archimedes gelingt es durch das Einbeschreiben von einfachen Figuren – die er berechnen kann – in komplexe Figuren bzw. Körper, die Fläche bzw. das Volumen dieser zu bestimmen. Diese Vorgehensweise verwendet Archimedes in vielen seiner Werke wie beispielsweise in seinen Schriften *Die Parabelquadratur* und *Über Kugel und Zylinder*. Um die Fläche eines Parabelsegments zu bestimmen, wird diesem ein Dreieck mit gleicher

Grundlinie und gleicher Höhe einbeschrieben (Aumann, 2013; Netz & Noel, 2010).

Die Grundlinie ist $\overline{AB}$. Um die Höhe zu ermitteln, muss jener Punkt berechnet werden, der den größten Normalabstand zu $\overline{AB}$ hat (Aumann, 2013, S. 60).



m : Normalabstand von $\overline{AB}$ zu P

t : Parabeltangente in P

A : Punkt der Parabel

B : Punkt der Parabel

P : Segmentscheitel

Abb. 16: Der Segmentscheitel

Beweis: Es ist bekannt, dass jener Punkt den größten Normalabstand zu $\overline{AB}$ besitzt, dessen Parabeltangente parallel zur Sehne $\overline{AB}$ ist. Laut den Eigenschaften eines Segmentscheitels trifft dies genau für jenen zu, wie in *5.4.1 Das Parabelsegment* nachzulesen ist (Aumann, 2013, S. 60). ■

Dieser Zusammenhang wird im folgenden Satz beschrieben.

Satz 18 aus *Die Parabelquadratur*:

> Gegeben sei ein Parabelsegment $\widehat{AB}$. Dabei hat der Segmentscheitel P den größten Normalabstand zur Sehne $\overline{AB}$ (Aumann, 2013, S.60).

5.4.3 Ein konkretes Zahlenverhältnis

Für die nachstehenden Berechnungen wird die Abbildung 17 betrachtet.

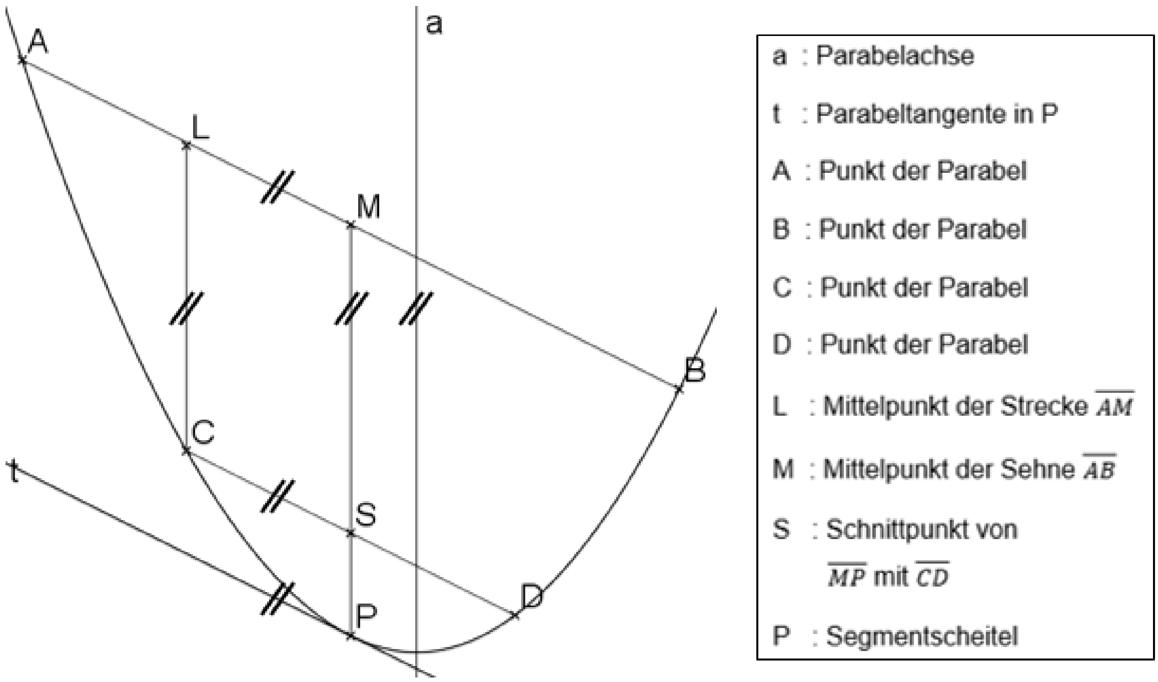


Abb. 17: Ein konkretes Zahlenverhältnis

Erhalten will man einen Zahlenwert für das Verhältnis der Strecke $\overline{LC}$ zur Strecke $\overline{MP}$ (Aumann, 2013, S. 60).

$$\frac{d(C,L)}{d(M,P)} = \frac{d(M,S)}{d(M,P)}$$

$$\frac{d(C,L)}{d(M,P)} = \frac{d(M,P) - d(S,P)}{d(M,P)}$$

$$\frac{d(C,L)}{d(M,P)} = \frac{d(M,P)}{d(M,P)} - \frac{d(S,P)}{d(M,P)}$$

$$\frac{d(C,L)}{d(M,P)} = 1 - \frac{d(S,P)}{d(M,P)} \qquad |Satz\ 3\ anw.$$

$$\frac{d(C,L)}{d(M,P)} = 1 - \frac{d^2(C,S)}{d^2(A,M)}$$

$$\frac{d(C,L)}{d(M,P)} = 1 - \left[\frac{d(C,S)}{d(A,M)}\right]^2$$

$$\frac{d(C,L)}{d(M,P)} = 1 - \left[\frac{d(L,M)}{d(A,M)}\right]^2 \qquad |siehe\ Abb.\ 17$$

$$\frac{d(C,L)}{d(M,P)} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{d(C,L)}{d(M,P)} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$ [23]

Mit diesem Ergebnis erhält man zum ersten Mal einen konkreten Zahlenwert für ein Verhältnis. Dieser Zusammenhang wird im 19. Satz aus *Die Parabelquadratur* beschrieben (Aumann, 2013, S. 60).

Satz 19 aus *Die Parabelquadratur*:

> Die Strecke $\overline{CL}$ verhält sich zur Strecke $\overline{MP}$ wie 3 zu 4 (Aumann, 2013, S. 60).

5.4.4 Ein erster Vergleich von Flächen

In der folgenden Abbildung ist das Dreieck $\triangle ABP$ zu sehen, welches in das Parabelsegment $\widehat{AB}$ einbeschrieben wird.

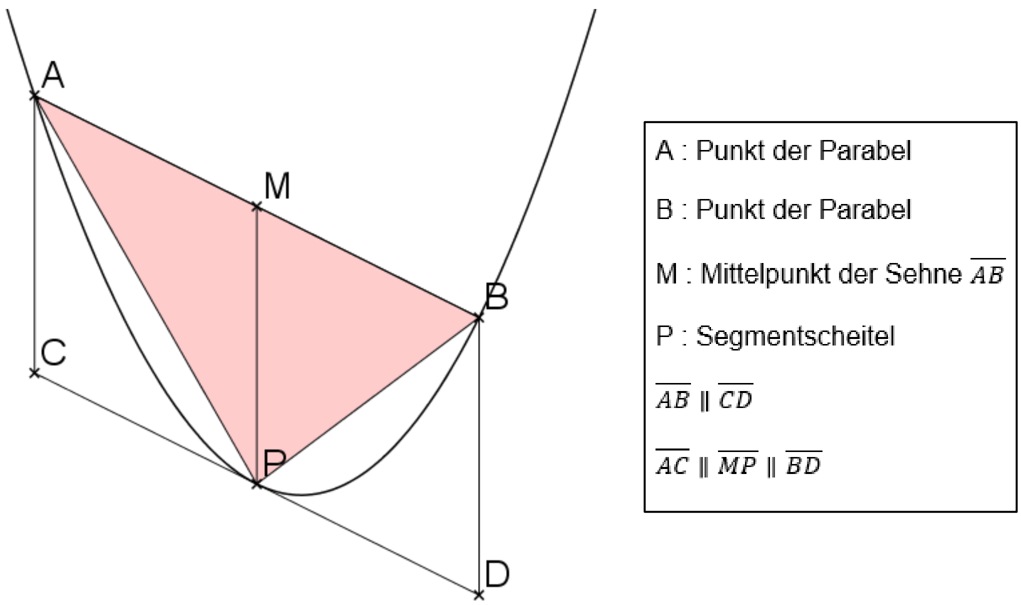


Abb. 18: Einbeschriebenes Dreieck △ABP

Im weiteren Verlauf soll der 20. Satz aus *Die Parabelquadratur* bewiesen werden.

Satz 20 aus *Die Parabelquadratur*:

> Die halbe Segmentfläche ist kleiner als das Dreieck $\triangle ABP$ (Aumann, 2013, S. 61).

---

[23] Aumann, 2013, S. 60

Beweis: Die Überlegungen werden in diesem Fall mit der Annahme begonnen, dass dieser Satz richtig ist.

$[APB] > \frac{1}{2} \cdot [\widehat{AB}]$ $\qquad |\cdot 2$

$2 \cdot [APB] > [\widehat{AB}]$ $\qquad |2 \cdot [APB] = [ABCD]$

$[ABCD] > [\widehat{AB}]$ [24]

Betrachtet man Abbildung 18, erkennt man, dass diese Aussage korrekt ist. $\frac{1}{2} \cdot [ABCD]$ entspricht dabei dem Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle APB$. Daraus folgt, dass die Annahme $[APB] > \frac{1}{2} \cdot [\widehat{AB}]$ richtig ist und damit ist Satz 20 bewiesen (Aumann, 2013, S. 61). ■

5.4.5 Satz 21

Archimedes vergleicht nun Flächen, welche in ein Parabelsegment einbeschrieben werden. Dazu wird Abbildung 19 betrachtet (Aumann, 2013, S. 62).

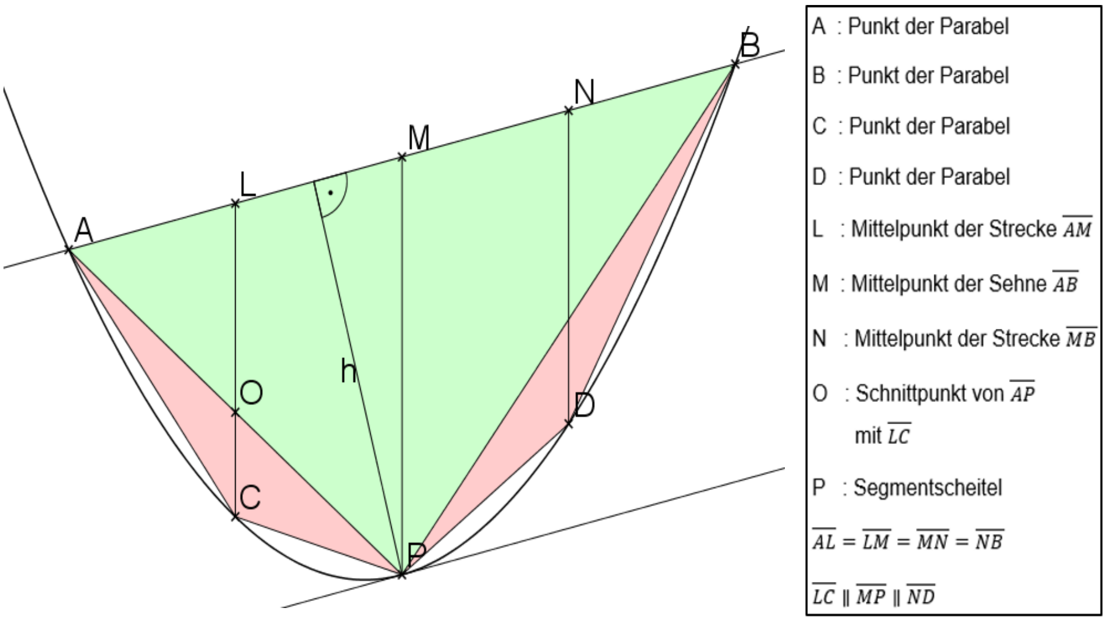


Abb. 19: Flächenverhältnisse

Im Anschluss soll bewiesen werden, dass das Dreieck $\triangle APB$ achtmal so groß wie das Dreieck $\triangle ACP$ ist (Aumann, 2013, S. 62).

---

[24] Aumann, 2013, S.61

Beweis: Nach Anwendung des Strahlensatzes mit Zentrum A gilt:

$$\frac{d(A,L)}{d(A,M)} = \frac{d(L,O)}{d(M,P)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d(L,O)}{d(M,P)} = \frac{1}{2} \qquad |\cdot d(M,P)$$

$$d(L,O) = \frac{1}{2} \cdot d(M,P) \qquad |\cdot \frac{1}{d(L,C)}$$

$$\frac{d(L,O)}{d(L,C)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot d(M,P)}{d(L,C)} \qquad |Satz\ 19\ anw.$$

$$\frac{d(L,O)}{d(L,C)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{d(L,O)}{d(L,C)} = \frac{d(L,O)}{d(L,O)+d(O,C)} \qquad |Kehrwert\ bilden$$

$$\frac{d(L,O)+d(O,C)}{d(L,O)} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{d(L,O)}{d(L,O)} + \frac{d(O,C)}{d(L,O)} = \frac{3}{2}$$

$$1 + \frac{d(O,C)}{d(L,O)} = \frac{3}{2} \qquad |-1$$

$$\frac{d(O,C)}{d(L,O)} = \frac{1}{2}$$ [25]

$$\frac{[ACO]}{[AOL]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot h \cdot d(O,C)}{\frac{1}{2} \cdot h \cdot d(L,O)} = \frac{d(O,C)}{d(L,O)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{[ACO]}{[AOL]} = \frac{1}{2} \qquad |\cdot [AOL]$$

$$[ACO] = \frac{1}{2} \cdot [AOL]$$ [26]

Dies bedeutet, dass die Fläche des Dreiecks $\triangle AOL$ doppelt so groß ist wie die Fläche des Dreiecks $\triangle ACO$. Auf dieselbe Weise kann man argumentieren, dass $[COP]$ halb so groß ist wie $[LOP]$, da beide

[25] Aumann, 2013, S. 62

[26] Aumann, 2013, S. 62

Dreiecke dieselbe Höhe besitzen. Zusammenfassend kann man daher sagen:

$[AOL] + [LOP] = 2 \cdot [ACO] + 2 \cdot [COP]$

$[APL] = 2 \cdot ([ACO] + [COP])$

$[APL] = 2 \cdot [ACP]$ ★ [27]

Die Dreiecke $\triangle\, LPM$, $\triangle\, MPN$ und $\triangle\, NPB$ sind gleich groß wie $\triangle\, APL$, da sie alle dieselbe Höhe h besitzen und $\overline{AL} = \overline{LM} = \overline{MN} = \overline{NB}$.

Daraus folgt: $[APB] = 4 \cdot [APL]$.

$\frac{[ACP]}{[APB]} = \frac{[ACP]}{4 \cdot [APL]}$ | ★

$\frac{[ACP]}{[APB]} = \frac{[ACP]}{4 \cdot 2 \cdot [ACP]}$

$\frac{[ACP]}{[APB]} = \frac{1}{8}$ $| \cdot [APB]$

$[ACP] = \frac{1}{8} \cdot [APB]$ [28] ■

Dieser Zusammenhang wird in Satz 21 beschrieben.

Satz 21 aus *Die Parabelquadratur*:

> Die Fläche des Dreiecks $\triangle\, APB$ ist achtmal so groß wie die Fläche des Dreiecks $\triangle\, ACP$ (Aumann, 2013, S. 62).

5.5 Die Quadratur der Parabel

5.5.1 Die Summe einbeschriebener Dreiecke

Im Folgenden wird die Fläche des Dreiecks $\triangle\, APB$, welche in Abbildung 20 zu sehen ist, mit f bezeichnet (Aumann, 2013, S. 63).

[27] Aumann, 2013, S. 63

[28] Aumann, 2013, S.62-63

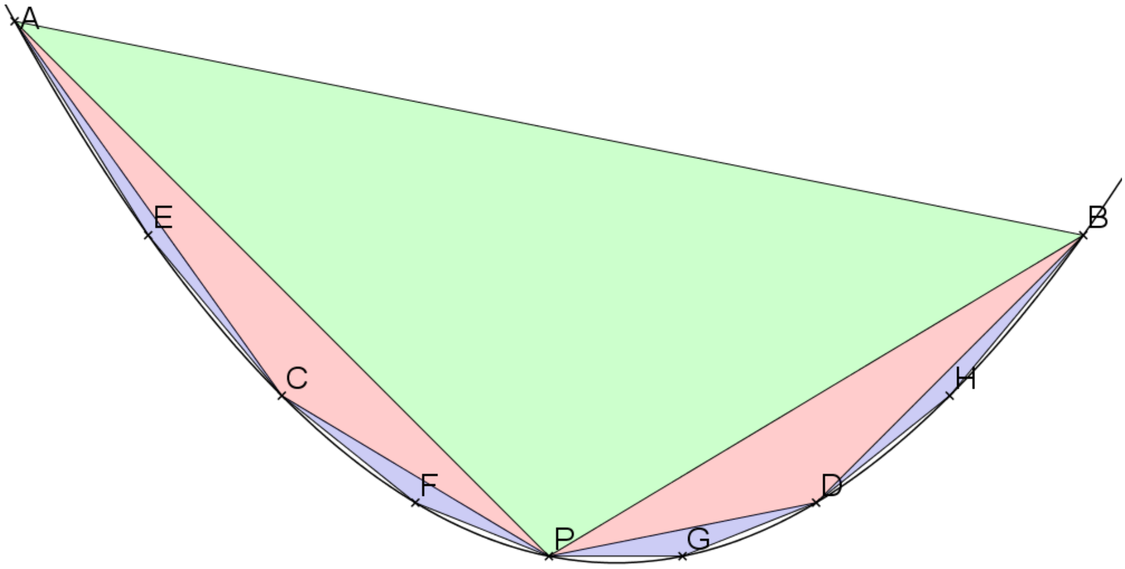


Abb. 20: Das Einbeschreiben von Dreiecken

Beweis: Nach Satz 21 gilt:

$$[APB] + [ACP] + [PDB] = f + \frac{1}{8} \cdot f + \frac{1}{8} \cdot f = f + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot f = f + \frac{1}{4} \cdot f.$$ [29]

Weiters kann man den Segmenten $\widehat{AC}$, $\widehat{CP}$, $\widehat{PD}$ und $\widehat{DB}$ auf dieselbe Weise Dreiecke einbeschreiben, wie in Abbildung 19 dem Segment $\widehat{AP}$ bzw. $\widehat{BP}$ das Dreieck $\triangle ACP$ bzw. $\triangle BDP$ einbeschrieben wurde. Die Fläche dieser vier neu erhaltenen Dreiecke lässt sich nach Satz 21 wie folgt berechnen:

$$[AEC] = \frac{1}{8} \cdot [\mathrm{ACP}] = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot f\right)$$

$$[CFP] = \frac{1}{8} \cdot [\mathrm{ACP}] = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot f\right)$$

$$[PGD] = \frac{1}{8} \cdot [\mathrm{BDP}] = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot f\right)$$

$$[DHB] = \frac{1}{8} \cdot [\mathrm{BDP}] = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot f\right)$$

$$[AEC] + [CFP] + [PGD] + [DHB] = 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot f\right) = \frac{4}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot f$$

[29] Aumann, 2013, S. 63

$$= \frac{4}{64} \cdot f = \frac{1}{16} \cdot f = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot f$$ [30]

Addiert man die grüne, die rote und die blaue Fläche, so erhält man bereits einen genaueren Näherungswert für die Fläche des Parabelsegments $\widehat{AB}$:

$$[APB] + [ACP] + [BDP] + [AEC] + [CFP] + [PGD] + [DHB]$$

$$= f + \frac{1}{4} \cdot f + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot f$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot f + \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot f + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot f$$ [31]

Der Vorgang des Einbeschreibens von Dreiecken lässt sich wiederholt durchführen. So können den Segmenten $\widehat{AE}$, $\widehat{EC}$, $\widehat{CF}$, $\widehat{FP}$, $\widehat{PG}$, $\widehat{GD}$, $\widehat{DH}$ und $\widehat{HB}$ nach Satz 21 insgesamt 8 gleich große Dreiecke mit einem Flächeninhalt von je $\frac{1}{8} \cdot [AEC] = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot f\right)\right) = \frac{1}{8^3} \cdot f$ einbeschrieben werden. Alle zusammen haben einen Flächeninhalt von $8 \cdot \frac{1}{8^3} \cdot f = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot f$. Schreibt man erneut Dreiecke ein, dann lässt sich die Summe S aller dem Segment $\widehat{AB}$ einbeschriebenen Dreiecke mit dem folgenden Ausdruck berechnen:

$$S = \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot f + \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot f + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot f + \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot f + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot f$$

$$S = f + \frac{1}{4} \cdot f + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot f + \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot f + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot f \quad mit\, n \in \mathbb{N} \quad \bigstar$$ [32] ■

Dadurch erhält man einen immer genaueren Näherungswert für die Fläche F des Parabelsegments $\widehat{AB}$. Nachvollziehbar erscheint auch der folgende Satz.

---

[30] Aumann, 2013, S. 63

[31] Aumann, 2013, S. 63

[32] Aumann, 2013, S. 63

Satz 22 aus *Die Parabelquadratur*.

> Die Summe S der dem Parabelsegment $\widehat{AB}$ einbeschrieben Dreiecke ist stets kleiner als die Fläche F des Parabelsegments, kurz $S < F$ (Aumann, 2013, S. 63).

Der Unterschied der Fläche F des Parabelsegments und der Summe S der einbeschriebenen Dreiecke wird Restfläche R genannt. Es gilt:

$F - S = R$

$F = S + R$ ★★ [33]

Die Formel für die Summe S der Dreiecksflächen lässt sich genauer bestimmen.

Beweis: $f + \frac{1}{4} \cdot f + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot f + \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot f + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot f$

$$= f \cdot \left[1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$$

$$= f \cdot \left[\left(\frac{1}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$$

$$= f \cdot [\Sigma]$$

$$\Sigma = \left(\frac{1}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\frac{1}{4} \cdot \Sigma = \qquad \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

$$\Sigma - \frac{1}{4} \cdot \Sigma = \left(\frac{1}{4}\right)^0 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \Sigma = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \qquad \Big| \cdot \frac{4}{3}$$

$$\Sigma = \frac{4}{3} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right] = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1^{n+1}}{4^{n+1}} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^n} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

[33] John, Persönliche Mitteilung,10.02.2017

$$f + \frac{1}{4} \cdot f + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot f + \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot f + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot f = f \cdot [\Sigma]$$

$$f + \frac{1}{4} \cdot f + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot f + \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot f + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot f = f \cdot \left[\frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$$

$$f + \frac{1}{4} \cdot f + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot f + \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot f + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot f = \frac{4}{3} \cdot f - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot f$$

$$\left| + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot f\right.$$

$$f + \frac{1}{4} \cdot f + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot f + \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot f + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot f + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot f = \frac{4}{3} \cdot f \qquad | \bigstar\ anw.$$

$$S + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot f = \frac{4}{3} \cdot f$$ [34] ■

Dieser Zusammenhang wird in Satz 23 beschrieben.

Satz 23 aus *Die Parabelquadratur*:

> Die Summe der einbeschriebenen Dreiecke lässt sich wie folgt genauer anschreiben: $S + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot f = \frac{4}{3} \cdot f$ (Aumann, 2013, S. 63).

5.5.2 Der indirekte Beweis

Mithilfe der zuvor gewonnen Erkenntnisse kann der entscheidende Satz bewiesen werden.

Satz 24 aus *Die Parabelquadratur*:

> „Die Fläche eines Parabelsegments ist $\frac{4}{3}$ der Fläche des Dreiecks mit gleicher Grundlinie und Höhe." (Archimedes zitiert nach Aumann, 2013, S. 64)

Archimedes bestätigt die Richtigkeit dieses Ergebnisses mit einem indirekten Beweis. Beim indirekten Beweis muss man das exakte Ergebnis bereits wissen. Um an dieses exakte Ergebnis zu kommen, hat Archimedes oftmals praktische Versuche angestellt und ist dabei auf eine Vermutung gestoßen. Diese versuchte er anschließend rechnerisch nachzuweisen. Dazu verwendete er den indirekten Beweis, welcher sich immer wieder in Archimedes Schriften finden lässt. Wie er dabei vorgeht, möchte ich im weiteren Verlauf anhand der

[34] John, Persönliche Mitteilung, 03.10.2016

Quadratur der Parabel zeigen. Wie der Begriff *indirekter Beweis* schon sagt, versucht man eine Annahme zu bestätigen, indem man annimmt, dass diese falsch ist und dies dann widerlegt. Daher startete Archimedes mit dem Ansatz, dass die Fläche F des Parabelsegments $\widehat{AB}$ nicht gleich $\frac{4}{3} \cdot f$ sei (Aumann, 2013; Netz & Noel, 2010).

Indirekter Beweis:

Zuerst nimmt Archimedes an, dass die Fläche F des Parabelsegments um eine Zahl z größer als $\frac{4}{3} \cdot f$ sei.

$F = \frac{4}{3} \cdot f + z \quad mit\ z > 0$ $\qquad |\bigstar\bigstar\ anw.$

$S + R = \frac{4}{3} \cdot f + z$ $\qquad |Satz\ 23\ anw.$

$S + R = S + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot f + z$ $\qquad |-S$

$R = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot f + z$ [35]

Die Restfläche kann man beliebig klein machen, indem man n so groß wählt, dass schließlich $R < z$. Dann ist $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot f > 0$ und R wäre immer noch ein wenig größer als z. Daher würde Folgendes gelten: $R > z$. Dies ist ein Widerspruch zur Behauptung, dass man die Restfläche beliebig klein machen kann, dass also $R < z$ gilt. Aufgrund dieses Widerspruchs kann F nunmehr nicht größer als $\frac{4}{3} \cdot f$ sein (John, Persönliche Mitteilung, 10.02.2017).

Nun nimmt Archimedes an, dass die Segmentfläche F um eine Zahl c kleiner als $\frac{4}{3} \cdot f$ sei.

$F + c = \frac{4}{3} \cdot f \quad mit\ c > 0$ $\qquad |\bigstar\bigstar\ anw.$

$S + R + c = \frac{4}{3} \cdot f$ $\qquad |Satz\ 23\ anw.$

[35] John, Persönliche Mitteilung, 10.02.2013

$S + R + c = S + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot f \qquad |-S$

$R + c = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot f$ [36]

Würde man n so groß wählen, dass gilt $c > \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot f$, so wäre

$R + c < \frac{1}{3} \cdot c \qquad |-c$

$R < -\frac{2}{3} \cdot c$

Da die Restfläche nie negativ sein kann, führt auch die Annahme, dass F kleiner als $\frac{4}{3} \cdot f$ sei, zu einem Widerspruch (John, Persönliche Mitteilung, 10.02.2016.)

Die Segmentfläche kann also weder kleiner noch größer als $\frac{4}{3} \cdot f$ sein.

Die logische Schlussfolgerung ist, dass die Segmentfläche gleich $\frac{4}{3}$ der Fläche des einbeschriebenen Dreiecks ausmacht (Aumann, 2013, S.64). ■

Die erhaltene Formel $F = \frac{4}{3} \cdot f$ erscheint auf den ersten Blick recht einfach, doch wie man allein an der Länge des Beweises sehen kann, ist sie in Wirklichkeit ein wahres Meisterwerk. Überraschenderweise beweist Archimedes Satz 24 insgesamt dreimal mithilfe unterschiedlicher Methoden. In *Die Methodenlehre* verwendet er bei der Argumentation beispielsweise das Hebelgesetz und gebraucht zum ersten Mal einen Ansatz der Infinitesimalrechnung, indem er Dreiecke als Summe winzig kleiner Streifen betrachtet (Aumann, 2013; Schneider, 2016).

Auch die genauere Betrachtung dieser Beweise wäre durchaus interessant und würde sich wie zahlreiche andere Erkenntnisse aus den Schriften von Archimedes zum genaueren Betrachten anbieten. Aufgrund des begrenzten Umfanges einer vorwissenschaftlichen Arbeit kann darauf leider nicht mehr eingegangen werden.

---

[36] John, Persönliche Mitteilung, 10.02.2013

6. Schluss

Genial ist wohl das passende Wort, um Archimedes zu beschreiben. Er war auf vielen Gebieten, wie beispielsweise der Mathematik, der Physik und dem Kriegswesen, ein Meister der seinesgleichen sucht. Mit dem Bau zahlreicher Kriegsmaschinen und der lange Zeit erfolgreichen Verteidigung der Stadt Syrakus bewies er, dass Wissenschaftler sehr wohl Theorie in Praxis umsetzen können. Einerseits haben ihm seine herausragenden Leistungen auf diesem Gebiet dazu verholfen, dass man heute noch so viel über ihn weiß; andererseits sind ihm diese Leistungen gewissermaßen zum Verhängnis geworden, da sie den Ausgangspunkt zahlreicher Legenden bildeten. So ist es heute oftmals schwierig, Legende vom tatsächlich Geschehenen auseinanderzuhalten.

Turbulent war die mehr als 2200-jährige Reise der archimedischen Schriften von damals bis in die heutige Zeit. Durch den kontinuierlichen Überlieferungsprozess überstanden die Schriften den Übergang von der Papyrusrolle zum Kodex und später den Übergang von der Majuskel- zur Minuskelschrift. Im 15. Jahrhundert wurde durch den einsetzenden Humanismus das Interesse an Archimedes Werken schließlich wieder vollauf geweckt und Wissenschaftler nützten die von Archimedes gewonnen Erkenntnisse. Durch das aufkommende Interesse der breiten Masse der Wissenschaftler war das Überleben von Archimedes Wissen gesichert.

Eines seiner Erkenntnisse, die Quadratur der Parabel, wurde in meiner Arbeit ausführlich behandelt. Damit sollte gezeigt werden, wie komplex die von Archimedes erfassten Zusammenhänge sind. Unzählige Verhältnisse und auf den ersten Blick nebensächlich erscheinende Zusammenhänge hatte Archimedes schon vor 2200 Jahre zu einem Ganzen zusammengefügt. Umso verblüffender ist das relativ einfache Ergebnis, welches besagt, dass die Fläche eines Parabelsegments $\frac{4}{3}$ der Fläche des einbeschriebenen Dreiecks aufweist. Das Erarbeiten dieses Zusammenhanges stellte sich als gar nicht so einfach heraus. Eine Frage ist dabei aufgekommen: Wenn schon die Quadratur der Parabel an manchen Stellen schwierig zum Verstehen ist, wie kompliziert wäre dann wohl der Beweis von Sätzen aus *Über Konoide und Sphäroide*? Generell wäre es sehr spannend der Frage nachzugehen, wie es Wissenschaftlern der Antike gelungen ist, derart komplexe Zusammenhänge zu erkennen. Denn eines darf man nicht vergessen, sie hatten noch keine modernen Taschenrechner zur Verfügung und konnten Zusammenhänge noch nicht mit Gleichungen ausdrücken. Außerdem wäre auch die Frage nach Entschlüsselungsmethoden eines Palimpsests, welche im Buch *Der Kodex des Archimedes* erwähnt werden, durchaus geeignet für eine weitere vorwissenschaftliche Arbeit.

Abschließend kann gesagt werden, dass neben vielen Fragen, die beim Verfassen der Arbeit geklärt wurden, gleichermaßen wieder neue, faszinierende Fragen aufgetaucht sind, die zum Weiterforschen anregen.

7. Literaturverzeichnis

Anderegg, J., 2014. Archimedes. In *Website von Jeremy Anderegg*. Verfügbar unter http://www.anderegg-web.ch/phil/archimedes.htm [01.02.2017].

„Archimedes und die Krone“, 2013. In *Leifiphysik*. Verfügbar unter http://www.leifiphysik.de/mechanik/auftrieb-und-luftdruck/geschichte/archimedes-und-die-krone [16.02.2017].

„Auftrieb“, 2013. In *Leifiphysik*. Verfügbar unter http://www.leifiphysik.de/mechanik/auftrieb-und-luftdruck/versuche [16.02.2017].

Aumann, G., 2013. *Archimedes: Mathematik in bewegten Zeiten*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Netz, R., Noel W., 2010. *Der Kodex des Archimedes: Das berühmteste Palimpsest der Welt wird entschlüsselt*. München: Deutscher Taschenbuch Verlag.

Rorres, C., 1995. Death of Archimedes: Sources. In *Archimedes*. Verfügbar unter http://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Death/Histories.html [01.02.2017].

Schneider, I., 2015 (1979). *Archimedes: Ingenieur, Naturwissenschaftler, Mathematiker*. München: Springer Spektrum.

Fußnoten:

Fronda, M., 2012. Diodorus of Sicily. In *The Encycolpedia of Ancient History*. Verfügbar unter http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/9781444338386.wbeah08049/abstract [01.02.2017].

Fronda, M. 2012. Hieron II of Syracuse, In *The Encycolpedia of Ancient History*. Verfügbar unter http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/9781444338386.wbeah09126/abstract [01.02.2017].

„Kodex“, n.d. In *Duden*. Verfügbar unter http://www.duden.de/suchen/dudenonline/Kodex [01.02.2017].

„Konoid“, n.d. In *Duden*. Verfügbar unter http://www.duden.de/rechtschreibung/Konoid [01.02.2017].

Lehmler, C., 2005. Syrakus unter Agathokles und Hieron II. *Die Verbindung von Kultur und Macht in einer hellenistischen Metropole*. Heidelberg: Verlag Antike.

„Messina”, n.d. In *Duden*. Verfügbar unter http://www.duden.de/rechtschreibung/Messina [01.02.2017].

„Palimpsest“, n.d. In *Duden*. Verfügbar unter http://www.duden.de/suchen/dudenonline/Palimpsest [01.02.2017].

„Sandzahl“, 2017, In *Kompaktes Wörterbuch des Unendlichen*. Verfügbar unter http://www.unendliches.de/german/index.htm?sandzahl.htm [01.02.2017].

„Sphäroid“, n.d. In *Duden*. Verfügbar unter http://www.duden.de/suchen/dudenonline/Sph%C3%A4roid [01.02.2017].

8. Abbildungsverzeichnis

Abb. 1: Schmidhofer, A., 2016. Machtverhältnisse im Mittelmeerraum nach dem Ersten Punischen Krieg.

Abb. 2: Skorpion, 2014. In „Die Griechen". Verfügbar unter https://www.zdf.de/dokumentation/terra-x/terra-x-grosse-voelker-griechen-kultur-erfindungen-100.html [16.02.2017].

Abb. 3: Rorres, C., 1995. Gemälde von Giulio Parigi. Verfügbar unter http://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Mirrors/Tzetzes.html [16.02.2017].

Abb. 4: Versuchsaufbau, 2013. In „Auftrieb". Verfügbar unter http://www.leifiphysik.de/mechanik/auftrieb-und-luftdruck/versuche [16.02.2017].

Abb. 5: Versuch, 2013. In „Auftrieb". Verfügbar unter http://www.leifiphysik.de/mechanik/auftrieb-und-luftdruck/versuche [16.02.2017].

Abb. 6: Überführung des Goldschmiedes, 2013. In „Archimedes und die Krone". Verfügbar unter http://www.leifiphysik.de/mechanik/auftrieb-und-luftdruck/geschichte [16.02.2017].

Abb. 7: Schmidhofer, A., 2016. Vergleich: Majuskeln (links) und Minuskeln (rechts).

Abb. 8: Schmidhofer, A. nach Aumann, G., 2016. Definition der Parabel.

Abb. 9: Schmidhofer, A. nach Aumann, G., 2016. Die Parabeltangente.

Abb. 10: Schmidhofer, A. nach Aumann, G., 2016. Halbierung der Sehne $\overline{AB}$.

Abb. 11: Schmidhofer, A. nach Aumann, G., 2016. Weitere Eigenschaften.

Abb. 12: Schmidhofer, A. nach Aumann, G., 2016. Vereinfachte Darstellung.

Abb. 13: Schmidhofer, A. nach Aumann, G., 2016. Allgemeine Darstellung.

Abb. 14: Schmidhofer, A. nach Aumann, G., 2016. Satz 3.

Abb. 15: Schmidhofer, A. nach Aumann, G., 2016. Das Parabelsegment.

Abb. 16: Schmidhofer, A. nach Aumann, G., 2016. Der Segmentscheitel.

Abb. 17: Schmidhofer, A. nach Aumann, G., 2016. Ein konkretes Zahlenverhältnis.

Abb. 18: Schmidhofer, A. nach Aumann, G., 2016. Einbeschriebenes Dreieck $\triangle ABP$.

Abb. 19: Schmidhofer, A. nach Aumann, G., 2016. Flächenverhältnisse.

Abb. 20: Schmidhofer, A., 2016. Das Einbeschreiben von Dreiecken.