Vorwissenschaftliche Arbeit

Kurt Gödels Einfluss auf die Mathematik und die Unentscheidbarkeit formaler Systeme*

von Roman Dörner

Schüler der 8R Klasse des

Bundesgymnasiums und Bundesrealgymnasiums Lilienfeld
Klosterrotte 1
3180 Lilienfeld

Betreuer: Martin Nikodim
eingereicht am: 09.02.2017

*diese Version der Arbeit ist leicht abgeändert

Abstract

In der folgenden Arbeit sollen die wichtigsten Ergebnisse zur Unvollständigkeit von formalen Systemen, speziell mathematischer Theorien, und zu unentscheidbaren Sätzen der Mathematik präsentiert werden. Dabei ist insbesondere ein Schwerpunkt auf die Werke Kurt Gödels gesetzt, da er dieses Forschungsgebiet mit seinen Unvollständigkeitssätzen erst begründete. Es wird aber auch der Vollständigkeitssatz der Prädikatenlogik gezeigt und die Ideen und Ergebnisse von Alan Turing. Detailreich ist vor allem die Repräsentation von Prädikaten in der Peano Arithmetik gesetzt, weil dies neben der Gödelisierung der Schlüssel zum Beweis des Unvollständigkeitssatzes ist. Besonders hier, aber auch teilweise bei allgemeinen Anmerkungen sind gewisse Grundkenntnisse in Mathematik und mathematischer Logik erforderlich. Es finden sich aber dennoch kurze Erklärungen der Sätze in leicht verständlicher Sprache, fernab von formalen Methoden.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Obwohl man ihn ohne Zweifel als einen der brilliantesten Mathematiker des vergangenen Jahrhunderts und als den besten, den Österreich je hervorgebracht hat, bezeichnen kann, kennt kaum jemand seinen Namen - die Rede ist von Kurt Gödel. Diese Arbeit befasst sich mit ihm und seinem Hauptwerk, dem berühmten Unvollständigkeitssatz. Genauer ist dies ein Satz der mathematischen Logik, der, einfach ausgedrückt, die Grenzen der mathematischen Methoden aufzeigt. Doch auch andere bahnbrechende Arbeiten, die mit diesem Thema eng verbunden sind, etwa die Alan Turings, werden kurz erklärt. So soll ein Überblick über wichtige Erkenntnisse auf den Gebiet der mathematischen Logik und der Leistungsfähigkeit formaler Systeme geboten werden, klarerweise auf Literatur aufgebaut.

Zunächst wird kurz über Kurt Gödel selbst gesprochen, seine Jugend und auch Werdegang in aller Kürze dargelegt, um sich sogleich grundlegenden Begriffen sowie dem Zeitgeist zu Gödels Lebenszeit zuzuwenden. Damit kann nun auch eine kurze, einsteigende Zusammenfassung der Werke Kurt Gödels verstanden werden, wie sie in Kapitel 4 folgt. Kapitel 5 gibt dann einen Beweisgang des Vollständigkeitssatzes, das folgende Kapitel einen etwas umfangreicheren Beweis der Unvollständigkeitssätze, wobei beide Beweise nicht vollständig sind, da dies den Umfang dieser Arbeit überschreiten würde. Das vorletzte Kapitel beschreibt schließlich die Arbeit Alan Turings und gibt deren wichtigste Ergebnisse wieder.

Es ist unter anderem Ziel dieser Arbeit, die Ausführungen auf den Originalarbeiten aufzubauen, weshalb auch unter anderem die Werke von Kurt Gödel, zum einen „Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls“[1] und zum anderen „Über formal unentscheidbare Sätze der Principa Mathematica und verwandter Systeme“[2], verwendet wurden. Außerdem hat sich das Lehrbuch „Einführung in die mathematische Logik“[3] von Wolfgang Rautenberg als sehr hilfreich erwiesen, wenngleich die Darstellungen sehr knapp und durchaus anspruchsvoll sind. Auf diesem Buch bauen vor allem die Abschnitte über Gödelisierung und Repräsentierbarkeit auf. Außerdem wurde, gerade für das letzte Kapitel, die Arbeit „On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem“[4] vom englischen Mathematiker Alan Turing verwendet. Als hilfreich, besonders für all jene, die an den mathematischen Details nicht interessiert und vielmehr an der Lebensgeschichte Gödels interessiert sind, erweist sich auch die erste Ausgabe von „Spektrum der Wissenschaft“ aus dem Jahr 2002 mit dem Titel „Gödel: logische Paradoxien und mathematische Wahrheit“[5] von Gianbruno Guerrerio.

[1]vgl. Gödel, Kurt: Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. In: Monatshefte für Mathematik und Physik. 1930, 37: 349-360

[2]vgl. Gödel, Kurt: Über formal unentscheidbare Sätze der Principa Mathematica und verwandter Systeme. In: Monatshefte für Mathematik und Physik, 1931, 38. 173-198

[3]vgl. Rautenberg, Wolfgang: Einführung in die mathematische Logik. Ein Lehrbuch. 3. Auflage. Wiesbaden: Vieweg und Teubner 2008

[4]vgl. Turing, Alan: On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem. In: Proceedings of the London Mathematical Society, 1936, Ser. 2, Vol. 42. 230-265

[5]vgl. Guerrerio, Gianbruno: Gödel: logische Paradoxie und mathematische Wahrheit. Heidelberg: Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft 2002

Kapitel 2

Über Kurt Gödel

Zumal sich diese Arbeit fast ausschließlich mit Kurt Gödel befasst, soll hier ein kurzer Überblick über dessen Abstammung und frühe Jahre gegeben werden.

2.1 Herkunft und Ausbildung

Gödel wurde am 28. April 1906 in Brünn, damals noch Teil des Habsburgerreiches, geboren[6]. Seine Familie war wohlhabend, sein Vater besaß eine Textilfabrik[7], war allerdings kein Akademiker, sondern hatte die Mittelschule sogar abgebrochen. Schon als Kind fiel Kurt durch die Angewohnheit auf, ständig Fragen zu stellen, weswegen er von seiner Familie auch „Herr Warum“ genannt wurde[8]. Als er acht Jahre alt war, erkrankte er an, wie er glaubte, rheumatischem Fieber, weshalb er Zeit seines Lebens davon überzeugt war, an Herzproblemen zu leiden[9]. Gödel besuchte ein staatliches Gymnasium und hatte stets nur Einsen - mit einer Ausnahme, einer Zwei, ausgerechnet in Mathematik. Obwohl in Böhmen lebend, lernte Gödel nie Tschechisch, sondern sprach Deutsch, wohl auch, weil er sich Zeit seines Lebens als Österreicher fühlte. Gödel folgte im Jahr 1924 seinem Bruder Rudolf nach Wien, wo er

[6] vgl. Guerrerio, 2002, S. 16

[7] vgl. Sigmund, Karl; Dawson, John; Mühlberger, Kurt: Kurt Gödel, Das Album. Wiesbaden: Friedr. Vieweg Verlag 2006, S.16

[8] vgl. ebd., S. 17

[9] vgl. Guerrerio, 2002, S. 16

sich an der Universität zunächst für theoretische Physik einschrieb, jedoch bald zur reinen Mathematik überging[10].

2.2 Studienende und wissenschaftliche Höchstleistungen

Gegen Ende der 1920er Jahre - Gödels Talent war damals schon bekannt - nahm Gödel regelmäßig an Treffen des „Wiener Kreises“ teil, wobei er durch seine Zurückhaltung und Wortkargheit auffiel[11]. Er leistete den Diskussionen kaum Beiträge, hörte aber aufmerksam zu und durch den Wiener Kreis wurde auch sein Interesse an den Grundlagen der Mathematik geweckt - dem Teilgebiet der Mathematik, das Gödel nur kurze Zeit später um zwei fundamentale Ergebnisse erweitern sollte[12]. Gödel schrieb nämlich sowohl in seiner Dissertation als auch seiner Habilitationschrift über Fragen zu den Grundlagen der modernen Mathematik. Dies geschah in den Jahren 1929 und 1931, diese Arbeiten werden später ausführlich erklärt.

2.3 Professor, erste Amerikareisen und psychische Probleme

Nach seiner Habilitaition 1933 wurde Gödel Privatdozent an der Universität Wien[13]. Doch schon bald wurde er an das relativ junge „Institute for Advanced Study“ in Princeton eingeladen, wohin er auch einige Male in den nächsten Jahren reiste. Allerdings wurde der Logiker in dieser Zeit von schweren psychischen Problemen geplagt, sodass er zeitweise sogar in Sanatorien musste. Sein Bruder musste ihn einmal gar aus Paris abholen, da er die eigenständige Rückreise nicht mehr schaffte[14].

[10] vgl. Guerrerio, 2002, S. 23 f.
[11] vgl. Sigmund/Dawson/Mühlberger, 2006, S. 24
[12] vgl. Guerrerio, 2002, S. 33
[13] vgl. Sigmund/Dawson/Mühlberger, 2006, S. 43
[14] vgl. ebd., S. 48 f.

2.4 Auswanderung und Spätwerk

Mit dem Aufkommen des Nationalsozialismus hatte auch der politisch uninteressierte Gödel seine Mühe. So wurde es für ihn schwierig seine Professur zu behalten, auch wurde er einmal für einen Juden gehalten und angepöbelt. Seine Frau Adele, die er 1938 geheiratet hatte, vertrieb die Angreifer allerdings[15]. In diesen Jahren gelang Gödel ein weiterer Durchbruch bei seiner Forschung, diesmal im Gebiet der Mengenlehre, auch dies wird später noch erklärt. Gödel wurde kurz nach Kriegsbeginn für „tauglich“ zum Fronteinsatz befunden und entschied, Österreich, das nun zum Deutschen Reich gehörte, zu verlassen. Nach einigen Problemen mit der Erteilung des Visums für die Vereinigten Staaten konnte Gödel schließlich im Jänner 1940 nach Amerika reisen, was allerdings, wie von den deutschen Behörden verlangt, durch Russland zu erfolgen hatte. So reiste Gödel mit seiner Frau mit der Transsibirischen Eisenbahn und wegen eines versäumten Schiffes in Japan dauerte es bis Anfang März, bis das Ehepaar in den USA ankam[16].

2.5 Zeit in Princeton und späte Jahre

Gödel zog in das ihm vertraute Princeton, wo auch Einstein lebte und arbeitete. Er verfasste noch eine Arbeit zur Relativitätstheorie, doch sonst blieben weitere wissenschaftliche Erfolge aus. Gödel und Einstein befreundeten sich, sonst aber lebte der Mathematiker sehr isoliert mit seiner Frau, hatte kaum Freunde[17]. Ebenso verschlechterte sich, speziell nach dem Tod Einsteins, Gödels gesundheitlicher Zustand. Er hielt eine strikte Diät, obwohl er sehr dünn war und aß nur, was vor seinen Augen gekocht und vorgekostet worden war, weil er panische Angst hatte, vergiftet zu werden. Das war auch Grund dafür, dass Gödel am 14. Jänner 1978, nach einem zweiwöchigen Krankenhausaufenthalt, an Unterernährung starb. Er wog zu diesem Zeitpunkt etwa 36 kg. Seinem Tod war ein Schlaganfall seiner Frau vorrausgegangen, die daraufhin

[15] vgl. Sigmund/Dawson/Mühlberger, 2006, S. 59
[16] vgl. Guerrerio, 2002, S. 74
[17] vgl. ebd., S.85

längere Zeit im Krankenhaus bleiben musste. Deshalb konnte sie ihren Mann nicht pflegen und umsorgen. So kam es, dass sich einer der brilliantesten Menschen des 20. Jahrhunderts selbst zu Tode hungerte[18].

[18]vgl. Guerrerio, 2002, S. 101 f.

Kapitel 3

Formale Systeme und Hilberts Programm

3.1 Formale Systeme

Um die Werke - oder auch nur deren Bedeutung - von Kurt Gödel zu verstehen, muss man zunächst verstehen, wovon diese handeln. Und hier kommen formale Systeme, auch Axiomensysteme oder (mathematische) Theorie genannt, ins Spiel. Ab hier werden grundlegende Begriffe der Mathematik notwendig sein, um die folgenden Ausführungen nachvollziehen zu können, für Erklärungen ist kein Platz.

Ein Axiomensystem, dies sei synonym für oben genannten Begriffe verwendet (obwohl die Definition einer Theorie etwas von dieser zu unterscheiden ist), ist nun eine Menge an Aussagen, das heißt an „Sätzen", genauer eine Menge an Formeln in der verwendeten, vorab festegelegten, Sprache des Systems, das heißt eine Menge an Folgen von Zeichen. Diese Zeichen sind wohldefiniert. Dann gibt es noch Regeln für das Bilden von neuen Aussagen, also Formeln, die ebenfalls vorher verabredet sind. Dabei ist zu beachten, dass die Elemente der Menge, die Axiome, als „wahr" hingenommen werden, sie werden also nicht hinterfragt und nicht überprüft - was in dem System auch nicht möglich wäre. Kann man nun mit Hilfe der Regeln aus den gegebenen Formeln eine neue Formel erzeugen, so sagt man, die Formel - oder

der Satz - ist ableitbar oder beweisbar. In der Praxis werden bei Beweisen meist auch Worte verwendet, um die Anschauung und die Verständlichkeit zu fördern. Dies ist aber nicht nötig. Hier ein Beispiel:

Es soll bewiesen werden, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist:

Es wird ein Widerspruchsbeweis verwendet, d.h. man fügt dem Axiomensystem die Negation der zu beweisenden Aussage hinzu und zeigt, dass dann sowohl eine Aussage B als auch die Negation von B folgt, was wegen der Konsistenz des Systems, die immer angenommen wird, nicht sein kann.

Also angenommen, $\sqrt{2}$ ist rational, d.h. es existieren zwei teilerfremde Zahlen (erste Folgerung) m, n, sodass $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Also auch $2 = \frac{m^2}{n^2}$, was aber bedeutet, dass sich im Bruch $\frac{m^2}{n^2}$ alle Primfaktoren wegkürzen, außer einer 2 im Zähler. Da aber $m^2 = m \cdot m$, also im Quadrat einer Zahl die selben Primfaktoren vorkommen, wie in der Zahl selbst (Eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung), können m, n nicht teilerfremd (zweite Folgerung - Negation der ersten Folgerung) sein. Das ist ein Widerspruch, also ist $\sqrt{2}$ nicht rational.

Formal könnte man diesen Beweis so darstellen:

$(\exists a, b \in \mathbb{N} : \sqrt{2} = \frac{a}{b}) \rightarrow (\exists m, n \in \mathbb{N} : \sqrt{2} = \frac{m}{n} \wedge \exists p \in \mathbb{P} : (m = \prod_{i=1}^{n} p_i \wedge n = \prod_{i=1}^{k} p_i) \wedge \neg \exists p_j \in \mathbb{P} : (p_j \cdot \prod_{i=1, i \neq j}^{n} p_i = m \wedge p_j \cdot \prod_{i=1, i \neq j}^{k} p_i = n)) \rightarrow (2 = \frac{m^2}{n^2}) \rightarrow (\exists p_j \in \mathbb{P} : (p_j \cdot \prod_{i=1, i \neq j}^{n} p_i = m \wedge p_j \cdot \prod_{i=1, i \neq j}^{k} p_i = n)) \rightarrow (\neg \exists m, n \in \mathbb{N} : \sqrt{2} = \frac{m}{n})$

3.2 Hilberts Programm

Bereits die Griechen erkannten, dass es nötig ist, mathematische Sätze zu beweisen. So bewiesen diese zum Beispiel bereits die Tatsache, dass es unendlich viele Primzahlen gibt[19]. Nun gibt es die Begriffe der Widerspruchsfreiheit und

[19] vgl. Sigmund/Dawson/Mühlberger, 2006, S. 108

der Vollständigkeit. Widerspruchsfreiheit bedeutet, dass es nicht möglich ist, einen Satz A und seine Negation $\neg A$ zu beweisen. Vollständigkeit bedeutet, dass für jeden formulierbaren (mit den Zeichen des Systems) Satz entweder A oder $\neg A$ beweisbar ist[20].

Der große Mathematiker David Hilbert, zu Beginn des 20. Jarhhunderts der größte seines Fachs und richtungsgebend für die mathematische Forschung, wollte unbedingt die Vollständigkeit der Mathematik beweisen. Dazu begründete er das sogenannte „Hilbert-Programm“, durch das die Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit der Mathematik mit Hilfe von Axiomensystemen bewiesen werden sollte. Es sollte, unabhängig vom Inhalt der einzelnen Sätze, ein Satz allein durch Anwendung von Regeln auf die Axiome bewiesen werden können - insbesondere sogar jeder wahre Satz der Theorie[21]. Damit verlangte Hilbert gewissermaßen eine „Reduzierung“ der Mathematik auf das Ausführen von bestimmten Regeln.

Dem gegenüber standen die Intuitionisten, mit ihrem führenden Vertreter Brouwer, die dem Programm Hilberts ablehnend begegneten, jedoch in der Unterzahl waren. Diese vertraten etwa die Ansicht, dass der Widerspruchsbeweis unzulässig sei und hatten sehr strenge Ansprüche an die Korrektheit von Beweisen, besonders wenn das Unendliche ins Spiel kam[22].

So entwickelte sich in den 1920er Jahren ein Grundlagenstreit in der Mathematik, vor allem zwischen Hilbert und Brouwer, auf welche Grundlagen sich die Mathematik nun stützen könne. Ein „Sieger“ ging dabei nicht hervor, jedoch hat sich heute die Axiomatische Betrachtung der Mathemaitk, der Formalismus durchgesetzt.

[20]vgl. Sigmund/Dawson/Mühlberger, 2006, S. 109
[21]vgl. Guerrerio, 2002, S. 44
[22]vgl. ebd., S. 44 f.

Kapitel 4

Die Bedeutung von Gödels Werk

4.1 Der Vollständigkeitssatz

In seiner Dissertation zeigte der erst 23-jährige Kurt Gödel die Vollständigkeit der Prädikatenlogik, das heißt, er zeigte, dass für das Axiomensystem jener Logik, die es erlaubt über Individuenvariablen (Variablen für Zahlen zum Beispiel) mittels Quantoren („für alle" und „es gibt") zu sprechen, die Ableitbarkeit äquivalent zur Allgemeingültigkeit ist. Ableitbarkeit einer Formel bedeutet dabei, dass die Formel bewiesen werden kann, Allgemeingültigkeit bedeutet, dass die Formel für alle Zuweisungen von Werten für die darin vorkommenden Variablen „wahr" ist[23].

Damit beförderte sich Gödel aus dem Nichts zu einem der besten Logiker seiner Zeit, zumal viele andere große Mathematiker am Beweis des Vollständigkeitssatzes gescheitert waren. Auch war mit der Arbeit ein wichtiger Schritt für das Hilbert-Programm getan worden, denn nun hatte man ein geeignetes Instrument, die Prädikatenlogik (erster Stufe) um die Vollständigkeit der Arithmetik zu untersuchen.

Ein weiteres, jedoch kaum erkanntes[24] Ergebnis von Gödels Dissertation war der Kompaktheitssatz [25], der später noch wichtig für viele Gebiete der

[23] vgl. Sigmund/Dawson/Mühlberger, 2006, S. 112
[24] vgl. Guerrerio, 2002, S. 45
[25] vgl. Gödel, 1930, S. 358

mathematischen Logik werden sollte[26].

4.2 Der Unvollständigkeitssatz

Im Jahr 1930 entdeckte Gödel dann jenen Satz, für den er weltberühmt werden sollte - den Unvollständigkeitssatz. Gödel berichtete erstmals auf einer Tagung von Mathematikern in Königsberg über seine Entdeckung[27], wo jedoch nicht viele deren Tragweite verstanden. Der Unvollständigkeitssatz besagt, dass es in jeder mathematischen Theorie, deren Axiomatisierung zumindest die Peano´schen Axiome der Arithmetik (d.h. die Arithmetik) enthält, Sätze gibt, die sich zwar in der Theorie formulieren lassen, jedoch nicht in dieser bewiesen werden können. Gödel bewies also die Existenz unbeweisbarer Sätze in der Arithmetik, die aber in sehr vielen mathematischen Theorien (die Unterscheidung zwischen Theorie und formalem System ist hier nicht so wichtig) enthalten ist, womit auch in dieser unbeweisbare Sätze vorkommen.

Dies allein war schon schlimm für das Hilbert Programm, doch es sollte noch schlimmer kommen. Denn Gödel bewies auch seinen sogenannten „Zweiten Unvollständigkeitssatz“, der besagt, dass die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik nicht bewiesen werden kann, sofern diese widerspruchsfrei ist[28]. Damit war die Durchführbarkeit des Hilbert´schen Programms nachweislich nicht möglich. Diese Erkenntnis stieß innerhalb der mathematischen Gesellschaft auch auf viel Unverständnis, zumal sie nicht erwartet worden war[29]. Insbesondere in der Philosophie über die Mathematik gab es damit einen radikalen Einschnitt und ein Umdenken[30]. Denn tatsächlich waren viele Mathematiker der Meinung Hilberts, dass sich alle wahren Sätze der Mathematik auch beweisen lassen. Diese Ansicht war aber mit Gödels Unvollständigkeitssatz nachweislich als falsch erwiesen.

[26]vgl. Gödel, 1930, S. 45
[27]vgl. Sigmund/Dawson/Mühlberger, 2006, S. 116
[28]vgl. Gödel, 1931, S. 196-198
[29]vgl. Guerrerio, 2002, S. 54 f.
[30]vgl. ebd, S. 54 f.

4.3 Weitere Leistungen Gödels: Kontinuumshypothese und Relativitästheorie

Gödels Leistungen waren jedoch nicht nur der Unvollständigkeitssatz und der Vollständigkeitssatz, auf die sich diese Arbeit beschränkt, sondern er lieferte auch Beiträge zur axiomatischen Mengenlehre und der Relativitätstheorie. Ein zu seiner Zeit wichtiges ungelöstes Problem der axiomatischen Mengenlehre war die Kontinuumshypothese. Sie wurde von Cantor aufgestellt und kann so formuliert werden[31]:

Verallgemeinerte Kontinuumshypothese: *Für eine unendliche Menge mit der Mächtigkeit* $\aleph_\alpha$ *gilt* $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

Das Zeichen $\aleph_\alpha$ steht dabei für die Mächtigkeit unendlicher Mengen, die in der Ordnung der Kardinalzahlen an der Stelle $\alpha+1$ steht (man beginnt bei $\aleph_0$). Insbesondere ist also auch $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, wobei $\aleph_0$ die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen und $\aleph_1$ die Mächtigkeit der reellen Zahlen bezeichnet. Gödel zeigte, dass die verallgemeinerte Kontinnumshypothese (abgk. CH für „generalized continuum hypothesis") relativ widerspruchsfrei zu den Axiomen der ZFC-Mengenlehre (eigentlich, im Original, zur NBG-Mengenlehre, die aber äquivalent zu ZFC ist[32]) ist, das heißt, dass ZFC+CH keine Widersprüche erzeugt, also die Kontinuumshypothese nicht in ZFC widerlegt werden kann. Der Beweis dazu ist allerdings alles andere als trivial[33]. Dabei konstruiert Gödel ein Modell von ZF (ohne Auswahlaxiom), L genannt, und zeigt, dass in L das sogenannte „Konstruierbarkeitsaxiom", geschrieben V=L, gilt. Mit dem Satz *„Ein Axiomensysstem ist konsistent genau dann, wenn es ein Modell besitzt"* folgt, dass ZF + V=L konsistent, dass heißt widerspruchsfrei, ist und damit kann man V=L verwenden um CH zu zeigen. Zunächst zeigt man aber, dass das Auswahlaxiom mit V=L folgt, also das auch das Aus-

[31] vgl. Gödel, Kurt: The Consistency of the Continuum Hypothesis by Kurt Gödel. New York: Ishi Press International, 2009, S.1

[32] vgl. ebd., S. 3-7

[33] vgl. ebd., S. 1-61

wahlaxiom relativ widerspruchsfrei von ZF ist. Dann kann man ebenso das Auswahlaxiom verwenden, um CH zu zeigen. Dies ist auch möglich und damit ist CH relativ widerspruchsfrei zu ZF, also ist die Kontinuumshypothese in ZF nicht widerlegbar.
Schließlich hat Paul Cohen im Jahr 1963 gezeigt, dass auch die Negation von CH relativ widerspruchsfrei zu ZFC ist, dass heißt, das die Kontinuumshypothese unabhängig von ZFC ist[34]. Damit ist die Kontinuumshypothese auch ein Satz im Sinne von Gödels Unvollständigkeitssatz.

Angetrieben durch die Freundschaft mit Albert Einstein in Princeton, forschte Gödel auch an der Relativitätstheorie, da er einen Beitrag für eine Festschrift anlässlich Einsteins 70. Geburtstag verfassen sollte[35]. Doch Gödel vertiefte sich so sehr in die Forschungen, dass er es schaffte, Lösungen für die Einstein´schen Feldgleichungen zu finden. Dies war ein beachtlicher Erfolg, wofür er 1951 auch den ersten „Einstein Preis“[36] von Albert Einstein selbst erhielt.

[34]vgl. Guerrerio, 2002, S. 77
[35]vgl. ebd., S. 88
[36]vgl. ebd., S. 92

Kapitel 5

Der Vollständigkeitssatz von Kurt Gödel

Zunächst sei an dieser Stelle das erste fundamentale Ergebnis der mathematischen Grundlagenforschung Kurt Gödels angeführt. Der Vollständigkeitssatz, den Gödel in seiner Dissertation formuliert und beweist, liefert die Gleichheit von Wahrheit und Beweisbarkeit, wobei der Begriff Wahrheit den mathematisch exakten Begriff der Allgemeingültigkeit intuitiv recht gut und anschaulich ersetzt. Dabei bezieht sich der Satz aber nur auf die Prädikatenlogik erster Stufe, das heißt auf ein formales System mit Quantoren, dies enthält also auch Aussagen wie „es gibt eine Formel ϕ für die gilt" oder „für alle Formeln α gilt". Man kann den Satz für verschiedene Systeme beweisen, die allerdings zumeist recht ähnlich sind. Man muss allerdings fein unterscheiden zwischen dem hier vorgestellten Vollständigkeitssatz und dem folgenden Unvollständigkeitssatz: Der Vollständigkeitssatz besagt, dass aus der Allgemeingültigkeit einer Formel, wobei allgemeingültig hier bedeutet, dass für jede Belegung (d.h. eine Zuweisung von Wahrheitswerten) der Variablen der Formel gilt, dass diese wahr wird, stets ihre Beweisbarkeit folgt[37]. Beim Unvollständigkeitssatz hingegen geht es um die Vollständigkeit einer Theorie, dabei heißt eine Theorie, die einfach eine Menge prädikatenlogischer Formeln ist, vollständig, wenn sie für jede Formel entweder diese selbst enthält (als

[37] vgl. Gödel, 1930, S. 350

Axiom oder aus ihrem Axiomensystem ableitbar) oder die Negation der Formel[38]. Die Theorie muss also im Stande sein, zu entscheiden, ob eine gegebene Formel eines ihrer Elemente ist oder nicht. Dabei ist eine Theorie deduktiv abgeschlossen, also gilt für alle Formeln, die aus der Theorie (beziehungsweise deren Axiomensystem) ableitbar sind, dass diese Formeln selbst zur Theorie gehören.

5.1 Das Axiomensystem und logische Regeln

Hier wird nun das Axiomensystem angegeben, für das die Vollständigkeit bewiesen werden soll, sowie einige Ableitungsregeln[39]. Dabei sei gesagt, dass man auch geringfügig andere Systeme und vor allem auch andere logische Grundzeichen (eine andere logische Signatur) wählen kann, sofern diese funktional vollständig ist. Dies bedeutet nichts anderes, als die Definierbarkeit der Booleschen Funktionen durch die gewählte Signatur.

Auch sei an dieser Stelle erwähnt, dass sich diese Arbeit auf den Beweis Kurt Gödels konzentriert, nicht, wie fast alle Lehrbücher[40] auf den Beweis von Leon Henkin.

Nun aber zum Axiomensystem:
logische Signatur: $\vee$ (oder), $\neg$ (nicht), $\forall$ (für alle)

Daraus definiert man:
$\alpha \ \wedge \ \beta := \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$[41]
$\alpha \to \beta := \neg\alpha \vee \beta$[42]
$\exists := \neg\forall : \neg$[43]
$\alpha \leftrightarrow \beta := (\alpha \to \beta) \ \wedge \ (\beta \to \alpha)$[44]
Die formalen Axiome seien gegeben durch die Folgenden (wobei α, β, γ be-

[38]vgl. Rautenberg, 2008, S. 83
[39]vgl. Gödel, 1930, S. 350
[40]vgl. etwa den Beweis in Rautenberg, 2008
[41]vgl. Rautenberg, 2008, S. 12
[42]vgl. ebd., S. 9
[43]vgl. von Bülow, Christopher: Der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz. Eine Darstellung für Logiker in Spe. Konstanz: 1992 http://www.uni-konstanz.de/philosophie/files/goedel.pdf , [Zugriff am 10.2.2015], S. 12
[44]vgl. Rautenberg, 2008, S. 12

liebige Aussagen sind):
Q1: $\alpha \vee \alpha \rightarrow \alpha$
Q2: $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$
Q3: $\alpha \vee \beta \rightarrow \beta \vee \alpha$
Q4: $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\gamma \vee \alpha) \rightarrow (\gamma \vee \beta))$
Q5: $\forall x : f(x) \rightarrow f(y)$
Q6: $\forall x : (\alpha \vee f(x)) \rightarrow \alpha \vee \forall x : f(x)$
Hier steht f für eine Funktion. Auch bezieht sich ein Präfix (d.h. der Allquantor $\forall$ und der Existenzquantor $\exists$) nie auf Funktionen.

Die logischen Folgerungsregeln seien die Folgenden:
D1: Aus α und $\alpha \rightarrow \beta$ kann man β ableiten.
D2: $\forall x : \alpha(x) \rightarrow \alpha(t)$
D3: $\alpha \rightarrow \forall x : \alpha$
D4: Individuenvariable dürfen beliebig durch andere ersetzt werden, solange die ersetzte Individuenvariable dadurch nicht in den Wirkungsbereich eines Quantors kommt, indem sie vorher nicht war.

Weiters werden gewisse Abkürzungen vereinbart, so steht eine Individuenvariable (etwa x, y, z) ab jetzt in diesem Kapitel für ein n-Tupel von Individuenvariablen, also eine „geordnete Menge von Variablen" aus I^n, wobei I die Menge der Individuenvariablen darstellt.

5.2 Einige Hilfssätze

Für eine halbwegs genaue Beweisskizze des Vollständigkeitssatzes benötigt man einige Hilfssätze[45].

Hilfssatz 1. *Es gilt:*
a) $\forall x : f(x) \rightarrow \exists y : f(y)$
b) $\forall x : f(x) \ \wedge \ \exists x : g(x) \rightarrow \exists x : (f(x) \ \wedge \ g(x))$
c) $\forall x : \neg f(x) \leftrightarrow \neg(\exists x : f(x))$

Hilfssatz 2. *Wenn sich x und y nur durch die Reihenfolge der Variablen*

[45] vgl. Gödel, 1930, S. 350 f.

unterscheiden, so gilt
$\exists x : f(x) \to \exists y : f(y)$

Hilfssatz 3. *Besteht x aus verschiedenen Variablen und hat y die gleiche Stellenzahl wie x (d.h. enthält gleich viele Individuenvariable, also $x, y \in I^n$ mit demselben n) so gilt*
$\forall x : f(x) \to \forall y : f(y)$

Hilfssatz 4. *Es stehe hier h_i für einen Quantor der x_i bindet, und j_i für einen Quantor der y_i bindet, dann gilt*
$h_1, h_2, h_3, ..., h_n \ : \ f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \ \wedge \ j_1, ..., j_n \ : \ g(y_1, ..., y_n) \ \to \ (P) \ : (f(x_1, ..., x_n) \ \wedge \ g(y_1, ..., y_n))$
für ein Präfix (P), dass aus den h_i und j_i aufgebaut ist. Analoges gilt, wenn $\wedge$ durch $\vee$ ersetzt wird.

Hilfssatz 5. *Jede Formel kann man auf eine Normalform (d.h. eine Formel die eine gewisse Form zumeist im Bezug auf ihre Quantoren hat) bringen, sodass gilt*
$\alpha \leftrightarrow (P)\alpha$, wobei $(P)\alpha$ die Normalformel von α ist.

Hilfssatz 6. *Ist $\alpha \leftrightarrow \beta$, so ist auch $F(\alpha) \leftrightarrow F(\beta)$, wobei F eine Formel mit α als Teil darstellt; $F(\beta)$ dementsprechend dieselbe Formel mit β.*

Hilfssatz 7. *Es gilt der Vollständigkeitssatz für die Aussagenlogik, das heißt jede allgemeingültige Aussage ist beweisbar.*

5.3 Die Klasse R

Nun wird eine Klasse, was nichts anderes als ein verallgemeinerter Mengenbegriff ist, also eine Zusammenfassung von Objekten (ihren Elementen), die aber nicht alle Axiome der axiomatisierten Mengenlehre erfüllt, definiert. Von dieser Klasse aus wird festgestellt werden, dass sie vollständig ist und daraus wird folgen, dass das oben erklärte Axiomensystem (folgend mit Q bezeichnet) vollständig ist.

Für die Klasse R gelten die folgenden Festsetzungen:
1. Jede Formel aus R ist Normalformel.
2. Jede Formel aus R enthält keine freien Individuenvariablen.
3. Das Präfix jeder Formel aus R beginnt mit dem Allquantor und endet mit dem Existenzquantor.

Nun kann man bereits einen wichtigen Satz über R formulieren:

Satz 1.[46] *Wenn jede R-Formel entweder widerlegbar oder erfüllbar ist, so gilt das für jede Formel.*

Beweis. Es sei α eine Formel, die kein Element von R ist und die freien Variablen x_n enthält. Wenn α widerlegbar ist, d.h. $\neg\alpha$ gilt, folgt nach D3 $\forall x : \neg\alpha$ und Hilfssatz 1c $\neg\exists x : \alpha$. Dasselbe gilt für die umgekehrte Richtung. Weil die Allgemeingültigkeit von α gleichbedeutend mit der Nicht-Erfüllbarkeit von $\neg\alpha$ ist, gilt obiger Schluss auch für die Erfüllbarkeit. Nun sei $(P)\alpha$ die Normalform von $\exists x : \alpha$, sodass nach Hilfssatz 5 gilt $\exists x : \alpha \leftrightarrow (P)\alpha$. (P) ist dabei ein Präfix.
Nun setzt man $B = \forall x : (P)\exists y : (\alpha \ \wedge \ (f(x) \vee \neg f(y)))$, dann ist wegen der Beweisbarkeit von $\forall x : \exists y : (f(x) \vee \neg f(y))$ und Hilfssatz 4 auch $(P)\alpha \leftrightarrow B$ beweisbar.
B ist aber ein Element von R, also entweder widerlegbar oder erfüllbar. Ist aber B erfüllbar, so auch $(P)\alpha$ und damit auch $\exists x : \alpha$, also auch α nach dem gerade gezeigten. Ebenso gilt dies für die Widerlegbarkeit. Also ist α entweder widerlegbar oder erfüllbar. □

Nun ist es Ziel, zu zeigen, dass jede R-Formel entweder erfüllbar oder widerlegbar ist. Dazu zunächst folgende Definition[47]:

[46] vgl. Gödel, 1930, S. 353
[47] vgl. ebd., S. 352

Definition. Man sagt, der Grad einer R-Formel ist die Anzahl der durch einen Existenzquantor getrennten Ansammlungen von mindestens einem Allquantor des Präfixes der Formel.

Nun beweist man

Satz 2.[48] *Jede Formel ersten Grades ist entweder erfüllbar oder widerlegbar.*

Beweis.[49] Zunächst seien einige Abkürzungen und Schreibweisen gegeben. Es sei $\forall x : \exists y : \alpha(x, y)$ eine beliebige Formel ersten Grades, sie wird in Folge mit $(G)\alpha$ abgekürzt. Außerdem sei x ein r-Tupel und y ein s-Tupel von Variablen.
Nun ordne man die r-Tupel, die aus der Folge $x_1, x_2, x_3, ..., x_i, ...$ aufgebaut sind, in eine Folge der Form
$r_1 = (x_0, x_0, ..., x_0), r_2 = (x_1, x_0, ..., x_0), r_3 = (x_0, x_1, x_0, ..., x_0)$, und so weiter, die nach steigender Indexsumme geordnet ist. Dann definiert man eine Folge $(\alpha)_n$ aus von $(G)\alpha$ abgeleiteten Formeln wie folgt:
$(\alpha)_1 = \alpha(r_1, x_1, x_2, ..., x_s)$
$(\alpha)_2 = \alpha(r_2, x_{s+1}, x_{s+2}, ..., _{2s}) \ \wedge \ (\alpha)_1$
$(\alpha)_n = \alpha(r_n, x_{(n-1)s+1}, x_{(n-1)s+2}, ..., x_{ns}) \ \wedge \ (\alpha)_{n-1}$

Das s-Tupel, welches die x_i mit Index $(n-1)s+1 \leq i \leq ns$ darstellt wird mit y_n identifiziert, sodass
$(\alpha)_n = \alpha(r_n, y_n) \wedge (\alpha)_{n-1}$
Weiters sei $(G_n)(\alpha)_n = \exists x_0 : \exists x_1 : \exists x_2 : ...\exists x_{ns} : (\alpha)_n$
Es werden also alle in $(\alpha)_n$ vorkommenden Variablen durch das Präfix (G_n) gebunden. Außerdem sieht man, dass die in r_{n+1} vorkommenden Variablen schon in (G_n) vorkommen und damit auch von den Variablen in y_{n+1} verschieden sind. In weiterer Folge wird das, was übrigbleibt, wenn man aus (G_n) die Variablen entfernt, die in r_{n+1} enthalten sind, mit (G_n') bezeichnet werden.

[48] vgl. Gödel, 1930, S. 353
[49] vgl. ebd., S. 353-356

Für den weiteren Beweis von Satz 2 benötigt man zunächst die Tatsache

$$(G)\alpha \to (G_n)(\alpha)_n \tag{5.1}$$

Man beweist durch Induktion:
Induktionsanfang: Zunächst ist $(G)\alpha = \forall x : \exists y : \alpha(x, y) \to \forall r_1 : \exists y_1 : \alpha(r_1, y_1)$ nach Hilfssatz 3 und D 4. Dann folgt mit Hilfssatz 1a $\forall r_1 : \exists y_1 : \alpha(r_1, y_1) \to \exists r_1 : \exists y_1 : \alpha(r_1, y_1) = (G_1)(\alpha)_1$, womit der Induktionsanfang abgeschlossen ist.
Induktionsschritt: Es soll $(G)\alpha \ \wedge \ (G_n)(\alpha)_n \to (G_{n+1})(\alpha)_{n+1}$ bewiesen werden.
Zunächst ist

$$(G_n)(\alpha)_n \to \exists r_{n+1} : (G'_n)(\alpha)_n \tag{5.2}$$

nach Hilfssatz 2. Außerdem gilt

$$(G)\alpha = \forall x : \exists y : \alpha(x, y) \to \forall r_{n+1} : \exists y_{n+1} : \alpha(r_{n+1}, y_{n+1}) \tag{5.3}$$

nach Hilfssatz 3 und D4.
Setzt man nun in Hilfssatz 1b für $f(x)$ die Formel $\exists r_{n+1} : \alpha(r_{n+1}, y_{n+1})$ ein und $(G'_n)(\alpha)_n$ für $g(x)$, so erhält man

$$\forall r_{n+1} : \exists y_{n+1} : \alpha(r_{n+1}, y_{n+1}) \wedge \exists r_{n+1} : (G'_n)(\alpha)_n \to \exists r_{n+1} : (\exists y_{n+1} : \alpha(r_{n+1}, y_{n+1}) \wedge (G'_n)(\alpha)_n) \tag{5.4}$$

Nun ist das Vorderglied der Implikation in (5.4) gerade die Konjunktion der Hinterglieder in (5.2) und (5.3). Es folgt also, dass beweisbar ist

$$(G)\alpha \ \wedge \ (G_n)(\alpha)_n \to \exists r_{n+1} : (\exists y_{n+1} : \alpha(x_{n+1}, y_{n+1}) \ \wedge \ (G'_n)(\alpha)_n) \tag{5.5}$$

Weiters folgt aus der Definition der $(\alpha)_n$ und nach schrittweisem Anwenden der Hilfssätze 4, 6 und 2 die Beweisbarkeit von

$$\exists r_{n+1} : (\exists y_{n+1} : \alpha(r_{n+1}, y_{n+1}) \ \wedge \ (G'_n)(\alpha)_n) \leftrightarrow (G_{n+1})(\alpha)_{n+1} \tag{5.6}$$

Und aus (5.5) und (5.6) folgt der Induktionsschritt wie oben beschrieben.
Nun können in der Formel α Funktionsvariable der Form $g_1, g_2, g_3, ...$ oder Aussagenvariablen $C_1, C_2, C_3, ...$ vorkommen. Weiters findet man Individuenvariablen $x, y, x_n, ...$ Dann ist auch $(\alpha)_n$ aus diesen aufgebaut, mit Hilfe der logischen Signatur.
Nun ordnet man jedem $(\alpha)_n$ eine Aussageformel zu, nämlich B_n. Dies geschieht, indem man die oben genannten Grundbestandteilen durch Aussagevariablen ersetzt, und dabei immer verschiedene Zeichen (selbst wenn nur andere Individuenvariablen, d.h. $x, x_n, ...$ vorkommen) durch verschiedene Aussagenvariablen ersetzt. Nun definiert man ein von Gödel[50] als „Erfüllungssystem n-ter Stufe" bezeichnetes System in den Ganzen Zahlen, $0 \leq z \leq ns$, von Funktionen $f_1, f_2, ...$ und von Wahrheitswerten für die Aussagenvariablen $X_1, X_2, ...$, diese Wahrheitswerte seien $w_1, w_2, ...$ Das Erfüllungssystem muss der Forderung genügen, dass die Formel B_n wahr wird, sofern man die X_i durch das entsprechende w_i ersetzt, die g_i durch die f_i sowie die x_i durch die ganze Zahl i.
B_n ist nun aber eine Aussageformel und damit nach Hilfssatz 7 entweder widerlegbar oder erfüllbar. Es gibt nun zwei mögliche Fälle:
1. Es ist mindestens ein B_n widerlegbar. Dann ist aber auch das entsprechende $(G_n)(\alpha)_n$ widerlegbar, wie aus D2, D3 und Hilfssatz 1c folgt. Da außerdem gilt, dass $(G)\alpha \rightarrow (G_n)(\alpha)_n$, folgt, dass auch $(G)\alpha$ widerlgbar ist.
2. Keines der B_n ist widerlegbar, d.h. alle sind erfüllbar. Es existieren also Erfüllungssysteme für alle Stufen. Da nun jedes Erfüllungssystem endlich ist (denn die Grundbestandteile von $(\alpha)_n$ sind ja endlich), sowie ein Erfüllungssystem der Stufe $n+1$ ein Erfüllungssystem der Stufe n als Teil enthält (es sei dieser Begriff intuitiv verwendet mit dem Hinweis auf die Definition der $(\alpha)_n$), so kann man eine Folge von Erfüllungssystemen finden. Diese Folge,

[50] vgl. Gödel, 1930, S. 355

mit $(E)_n$ als Erfüllungssystem n-ter Stufe hat die Eigenschaft, dass ein Folgenglied $(E)_{n+1}$ die Folgenglieder $(E)_i$ mit $1 \leq i \leq n$ als Teil enthält; anders gesagt, dass jedes Folgenglied das vorherige als Teil enthält.
Nun definiert man in den natürlichen Zahlen ein System $S = \{j_1, j_2, ..., j_p; k_1, k_2, ..., k_l\}$ durch:
1. Es gilt $j_i(a_1, a_2, ..., a_m)$ nur dann, wenn für mindestens ein $(E)_n$ gilt, dass für die f_i von $(E)_n$ gilt $f_i(a_1, ..., a_m)$.
2. Es gilt für mindestens ein $(E)_l$, dass $k_t = w_t$ mit den w_t aus $(E)_l$ und $1 \leq t \leq l$.
Insgesamt erhält man also ein Erfüllungssystem für $(G)\alpha$, denn setzt man nun die j_i für die g_i in $(G)\alpha$ ein und macht dasselbe mit den k_t, so ist $(G)\alpha$ sicher wahr, denn man erhält alle Einsetzungen von a_n für die die f_i zuvor die $(\alpha)_n$ wahr gemacht haben und damit auch eine Erfüllung von α darstellten. Weiters erhält man alle w_i für die die eben genannten Eigenschaften gelten. Außerdem lässt sich einfach feststellen: Da alle B_n erfüllbar sind, so auch alle $(\alpha)_n$. Diese sind aber nichts anderes als die Konjugation der Formel α mit verschiedenen Einsetzungen der Individuenvariablen. Da nun alle $(\alpha)_n$ erfüllbar sind, und damit auch für alle möglichen Kombinationen der r-Tupel gilt, dass ein s-Tupel existiert mit $\alpha(r, s)$, denn genau dass war ja die Definition der $(\alpha)_n$, so folgt, dass gilt $\forall x_r : \exists y_s : \alpha(x_r, y_s)$, die Formel $(G)\alpha$, die damit klarerweise erfüllbar ist. □

Satz 3.[51] *Ist jede R-Formel vom Grad k entweder widerlegbar oder erfüllbar, so ist auch jede R-Formel vom Grad k+1 entweder widerlegbar oder erfüllbar.*

Beweis. Es sei $(H)\gamma$ eine R-Formel vom Grad k+1 und $(H) = \forall x_n : \exists y_m : (J)$ sowie $(J) = \forall z_k : \exists u_l : (R)$ mit (J) vom Grad k und (R) vom Grad $k-1$. In weiterer Folge stehe $\forall x, y, z$ für $\forall x : \forall y : \forall z$ und entsprechendes für $\exists$. Es bezeichne f eine in γ nicht vorhandene Funktionsvariable.
Nun setzt man:
$T = \forall x'_n : \exists y'_m : f(x'_n, y'_m) \ \wedge \ \forall x_n, y_m : (f(x_n, y_m) \rightarrow (J)\gamma)$

[51] vgl. Gödel, 1930, S. 352 f.

sowie
$S = \forall x'_n, x_n, y_m, z_k : \exists y'_m, u_l : (R)(f(x'_n, y'_m) \ \wedge \ (f(x_n, y_m) \rightarrow \gamma))$

Man erhält nun nach doppelter Anwendung von Hilfssatz 4 sowie Hilfssatz 6 die Äquivalenz
$T \leftrightarrow S$ und weiters gilt
$T \rightarrow (H)\gamma$.
Die Formel S hat Grad k, ist also nach Annahme entweder erfüllbar oder widerlegbar. Ist S erfüllbar, so auch T und damit auch $(H)\gamma$. Ist aber S widerlegbar, so ist T widerlegbar, also $\neg T$ beweisbar.
Man setzt nun in $\neg T$ für f $(J)\gamma$ ein, sodass folgender Ausdruck beweisbar wird:
$\neg\forall x'_n : \exists y'_m : (J)\gamma \ \wedge \ \forall x_n, y_m : (J)\gamma \rightarrow (J)\gamma)$
Damit ist auch der vordere Teil der Konjugation beweisbar, nämlich $\neg\forall x'_n : \exists y'_n : (J)\gamma$, also ist auch $(H)\gamma$ widerlegbar. $\square$

5.4 Die Vollständigkeit

Da nun aus den Sätzen 2 und 3 quasi induktiv folgt, dass jede Formel aus R entweder widerlegbar oder beweisbar ist, gilt dies auch für alle Formeln gemäß Satz 1. Nun zeigt man, dass dies schon die Vollständigkeit des Axiomensystems bedeutet.
Zunächst formuliert man den Vollständigkeitssatz Kurt Gödels:

Satz 4[52]. Vollständigkeitssatz. *Jede allgemeingültige Formel des Axiomensystems Q ist beweisbar.*

Beweis. Der Beweis wird geführt, indem man auf eine äquivalente Formulierung verweist, nämlich:

[52] vgl. Gödel, 1930, S. 350

Satz 4b. Vollständigkeitssatz[53]**.** *Jede Formel des Axiomensystems Q ist entweder widerlegbar oder erfüllbar.*

Offensichtlich ist Satz 4b bereits bewiesen. Die Äquivalenz folgt so:
Aus Satz 4b folgt Satz 4: Sei α eine allgemeingültige Formel, dann ist $\neg\alpha$ nicht erfüllbar, also nach Satz 4b widerlegbar, was heißt, dass $\neg\neg\alpha = \alpha$ beweisbar ist.
Aus Satz 4 folgt Satz 4b: Sei α eine Formel. Ist α beweisbar, das heißt allgemeingültig, so ist α sicher erfüllbar, aber nicht widerlegbar, sonst wäre ja $\neg\alpha$ beweisbar. Damit ist aber $\neg\alpha$ durch α widerlegbar und nicht erfüllbar. $\square$
Damit ist also die Gleichheit von Allgemeingültigkeit und Beweisbarkeit gezeigt. Gödel bewies diesen Satz in seiner Dissertation, es war sein erster mathematischer Erfolg. Gödel war damals gerade erst 23 Jahre alt und brauchte in der veröffentlichten Arbeit gerade einmal 8 Seiten für den eben dargestellten Beweis.

[53] vgl. Gödel, 1930, S. 351

Kapitel 6

Der erste und zweite Gödel´sche Unvollständigkeitssatz

6.1 Allgemeines

In diesem Teil des Textes wird eine möglichst genaue Skizze des Beweises zur Unentscheidbarkeit formaler Systeme gegeben. Dabei ist eine enge Orientierung am Beweis von Gödels Original vorhanden[54], aber es findet sich auch ein moderner Beweis am Ende dieses Abschnittes. Zunächst müssen aber grundlegende Begriffe definiert und fundamentale logische Sätze, die für das Verständnis des Beweises notwendig sind, angegeben werden. Teilweise werden die Sätze auch bewiesen oder ein kurzer Gedankengang durch den Beweis gegeben, teilweise müssen Sätze naiv verwendet werden.

6.2 Das verwendete System

Wenn im folgenden von einem System die Rede ist, dann wird es sich immer um das folgend beschriebene handeln[55]

[54] vgl. Gödel, 1931, S. 176-191
[55] vgl. Bülow, 1992, S. 10-14

Es bezeichne N die *Nachfolgefunktion*, definiert durch:

$N(x) = x + 1$

$Subst(x, v, a)$ ist jene Formel, die dadurch entsteht, dass man in x alle v (wobei v eine Variable darstellt) durch a ersetzt. Dabei muss a natürlich vom selben Typ sein wie v. Der Typ bezeichnet dabei, ob es sich bei v um natürliche Zahlen bzw. Individuen (1. Typ), eine Klasse von Individuen (2. Typ) oder etwa eine Variable höheren Typs handelt[56]. Es handelt sich bei $Subst(x, v, a)$ also um die *Substitution* von v durch a in x.

Der Beweis baut auf das System der *Principa Mathematica* auf, im Folgenden mit PA bezeichnet.
Dieses wird mit den *Peano´schen Axiomen* kombiniert, das entstandene System bezeichne man mit P. In diesem System sind die natürlichen Zahlen als Individuen dargestellt, die in Formeln oder ähnlichem durch Variable repräsentiert werden.

6.2.1 Zeichen

Die Grundzeichen des Systems sind:

1. Logische Zeichen: $\neg$ (nicht), $\rightarrow$ (impliziert), $\forall$ (für alle), 0 (Null)
   Die übrigen logischen Zeichen seien definiert durch[57]
   $\alpha \wedge \beta := \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$
   $\alpha \vee \beta := \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
   $\alpha \leftrightarrow \beta := (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$
   $\exists x := \neg\forall x : \neg$

2. Variable: x, y, z (gehen aus dem Kontext eindeutig hervor)

3. Hilfszeichen: (,) , : (gilt)

[56] vgl. Gödel, 1931, S. 176
[57] vgl. Bülow, 1992, S. 12

6.2.2 Die Axiome

Die Axiome des Systems P sind dargestellt durch die folgenden Axiomenschemata[58]

Aussagenlogische Axiome

A1: $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$ stellt *ex quolibet verum* dar

A2: $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \wedge \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$ ähnlich des *Modus-Ponens*

A3: $\alpha \wedge \neg\alpha \rightarrow \beta$ *ex falso qoud liberet*

A4: $(\alpha \vee \neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$

Quantorenlogische Axiome

Q1: $\forall x : \alpha \rightarrow Subst(\alpha, x, a)$ (hier muss natürlich x vom selben Typ sein wie a)

Q2: $\forall x : (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x : \beta)$ (wenn x in α nicht frei vorkommt)

Identitätslogische Axiome (R als *Relation*; f als *Funktion*)

I1: $x = x$

I2: $x = y \wedge x = z \rightarrow y = z$

I3: $x = y \wedge Subst(R_k(h_1, h_2, \ldots, h_k), h_j, x) \rightarrow Subst(R_k(h_1, h_2, \ldots, h_k), h_j, y)$

I4: $x = y \rightarrow Subst(f_i(k_1, k_2, \ldots, k_i), k_j, x) = Subst(f_i(k_1, k_2, \ldots, k_i), k_j, y)$

Peano-Axiome der Arithmetik

P1: $x + 1 \neq 0$

P2: $x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y$

P3: $x + 0 = x$

P4: $x + (y + 1) = (x + y) + 1$

P5: $x \cdot 0 = 0$

P6: $x \cdot (y + 1) = x \cdot y + x$

P7: $Subst(\alpha, x, 0) \wedge \forall x : (\alpha \rightarrow Subst(\alpha, x, x + 1)) \rightarrow \alpha$ *(Induktion)*

[58] vgl. von Bülow, 1992, S. 12-14

6.2.3 Die logischen Regeln

Natürlich gibt es im System P auch logische Regeln, allerdings reichen hiervon zwei aus, nämlich der *Modus Ponens* und die *Generalisierungsregel*[59].

Modus Ponens: $\frac{\alpha \wedge \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$

Generalisierungsregel: $\frac{\alpha}{\forall x{:}\alpha}$

Hier sind die Darstellungen nicht als Bruch zu lesen, sondern als logische Regeln des Ableitens. Der Strich, der als „Bruchstrich“ gedeutet werden könnte, ist vielmehr die Trennlinie zwischen der *Prämisse* (Vorgabe) und der daraus folgenden *Konklusion* (Folgerung). So besagt der *Modus Ponens* etwa, dass wenn man weiß, dass α und $\alpha \rightarrow \beta$ gültig sind, klarerweise auch β gilt[60].

6.3 Gödelisierung

In diesem Abschnitt wird den Grundzeichen des Systems P in eindeutiger Weise jeweils eine natürliche Zahl zugewiesen. Dadurch lassen sich Zeichenfolgen als Folge natürlicher Zahlen angeben, dass heißt Zeichenfolgen können im System, denn man betrachtet das System der Arithmetik, formuliert und untersucht werden[61].

Sei eine Klasse oder Relation $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gegeben, die zwischen Grundzeichen oder Reihen von solchen existiert. Dann ordnet man dieser die Klasse oder Relation zwischen natürlichen Zahlen $N(n_1, n_2, \ldots, n_n)$ zu, für die gilt:
$N(n_1, n_2, \ldots, n_n) \leftrightarrow \exists (x_1, x_2, \ldots, x_n) : n_i = \lceil x_i \rceil (i \in [1; n]) \wedge R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
Dadurch lassen sich Klassen und Relationen von natürlichen Zahlen definieren, die metamathematischen Ausdrücken wie etwa *beweisbare Formel* ent-

[59]vgl. Bülow, 1992, S. 14
[60]vgl. Rautenberg, 2008, S. 18
[61]vgl. Gödel, 1931, S. 175

sprechen[62]. Dies wird dann auch dazu führen, dass der unentscheidbare Satz hergeleitet werden kann. Nun aber zur Zuordnung, wobei ϕ immer für ein Grundzeichen und $\ulcorner \phi \urcorner$ immer für dessen *Gödelnummer*, also die zugeordnete Nummer steht.

$\ulcorner 0 \urcorner = 1 \mid \ulcorner \neg \urcorner = 3 \mid \ulcorner \rightarrow \urcorner = 5 \mid \ulcorner \forall \urcorner = 7 \mid \ulcorner\ (\ \urcorner = 9 \mid \ulcorner\ )\ \urcorner = 11$
$\mid \ulcorner N \urcorner = 13 \mid$

Den Variablen ordnet man die Zahlen p^n zu, wobei $p > 13$ eine Primzahl ist und n der Typ der Variable.
Man kann nun also Reihen von natürlichen Zahlen bilden, die für Reihen von Grundzeichen stehen, diese sozusagen „codieren“. Nun bildet man diese Reihen folgendermaßen auf die natürlichen Zahlen ab:
Sei die Reihe von codierten Grundzeichen $a = n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ gegeben. Nun bildet man die *Gödelnummer* dieser Reihe von natürlichen Zahlen:

$$\ulcorner a \urcorner = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{n_k}$$

Dabei steht p jeweils für eine Primzahl, die Indizes geben die „Nummer“ der Primzahl an. So ist etwa $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_5 = 11$ usw[63].

6.4 Rekursionstheorie

In diesem Abschnitt werden rekursive Funktionen behandelt. Dies mag auf den ersten Blick nichts mit dem System P zu tun haben, es wird sich aber herausstellen, dass rekursive Funktionen eine wichtige Rolle bei der Angabe von Klassen natürlicher Zahlen spielen, die metasprachliche Ausdrücke darstellen.

[62]vgl. Gödel, 1931, S. 179
[63]vgl. ebd., S. 179

6.4.1 Rekursivität und Berechenbarkeit

Eine n-stellige Funktion $f \in F_n$, wobei F_n die Menge aller n-stelligen Funktionen darstellt, deren Definitionsbereich und Werte natürliche Zahlen beziehungsweise n-Tupel solcher sind, heißt nach Gödel[64] eine *zahlentheoretische Funktion.*
Dabei ist eine solche Funktion berechenbar, wenn man einen Algorithmus angeben kann, der bei der Eingabe von $a_n \in \mathbb{N}^n$ den Wert $f(a_n)$ in endlich vielen Schritten berechnet[65]. So ist etwa die Funktion $h(x) = x^2$ im einfachsten Sinne berechenbar. Diese Funktionen haben nun offensichtlich die folgenden Eigenschaften (nach Rautenberg[66])

Oc : Wenn $f \in F_k$ und $j_1, j_2, j_3, \dots, j_k \in F_n$ berechenbar sind, dann auch $h = f(j_1, j_2, j_3, \dots, j_k)$.

Dies ist intuitiv klar, denn wenn ein Computer einen Algorithmus hat, der für jede Einsetzung $a_k \in \mathbb{N}^k$ den Wert von $f(a_k)$ berechnet, so berechnet er auch h. Dies setzt natürlich voraus, dass $j_1, j_2, \dots, j_k$ berechenbar sind, was auch der Fall ist.

Op : Wenn zwei Funktionen $j \in F_n$ und $k \in F_{n+2}$ berechenbar sind, so ist dies auch $h \in F_{n+1}$. Die Funktion h ist dabei bestimmt durch:
$h(x, 0) = j(x)$ und $h(x, N(a)) = k(x, a, h(x, a))$ wobei $x \in \mathbb{N}^n$ und $N(a)$ wie gehabt die Nachfolgefunktion.

Auch dies ist nach einer kurzen Überlegung klar, denn $k(x, a, h(x, a))$ lässt sich darstellen als
$k(x, a, h(x, N(a-1)) = k(x, a, k(x, a-1, h(x, a-1)))$
$=k(x, a, k(x, a-1, h(x, N(a-2))))$
$=k(x, a, k(x, a-1, k(x, a-2, k(x, a-3, \dots, k(x, a-(a-1), k(x, 0, j(x))))) \dots))$

[64] vgl. Gödel, 1931, S. 179
[65] vgl. Rautenberg, 2008, S. 169
[66] vgl. ebd., S. 169

Die Funktion $h(x, N(a))$ lässt sich also auf eine k-Funktion zurückführen, die sich selbst a mal enthält und einmal die Funktion j. Da beide berechenbar sind, kann $h(x, N(a))$ berechnet werden.

Oε : Wenn $h \in F_{n+1}$ berechenbar ist und gilt $\forall x \exists b : h(x, b) = 0$, ist auch g berechenbar. Wobei $g(x) = \varepsilon b[h(x, b) = 0]$ und $\varepsilon x[f(x)]$ die Bedeutung „das kleinste x für das $f(x)$ gilt“ hat.

Diese drei Punkte heißen im Folgenden *Erzeugungsoperationen*, die zum Erzeugen neuer rekursiver Funktionen nützlich sind.

Wichtig sind weiters die von Rautenberg als *Anfangsfunktionen* bezeichneten Funktionen[67]:

- die Konstante 0
- die Nachfolgefunktion N, wie oben definiert
- die Projektionsfunktion $I_v^n : x \mapsto x_v$ wobei $x \in \mathbb{N}^n$

Definition: Eine Funktion f ist *rekursiv*, wenn sie sich mit den *Erzeugunsoperationen* aus den *Anfangsfunktionen* erzeugen lässt.[68]

6.4.2 Einige rekursive Funktionen

Nun werden einige rekursive Funktionen definiert, die bestimmte metamathematische Ausdrücke darstellen. Diese Funktionen müssen allerdings naiv als rekursiv hingenommen werden, denn die Beweise zur Rekursivität dieser wären umständlich und würden viele neue Begriffe und Definitionen erfordern[69]. Bei Gödel[70] sind es insgesamt 45 rekursive Funktionen, die ausgehend

[67] vgl. Rautenberg, 2008, S. 169
[68] vgl. ebd., S. 169
[69] vgl. ebd. S. 178-181
[70] vgl. Gödel, 1931, S. 182-186

von gewissen offensichtlich rekursiven Funktionen, etwa $x+y$ oder $x \cdot y$, mittels vorher definierter Verfahren zur Erzeugung von rekursiven Funktionen, erzeugt werden. Diese Verfahren zur Erzeugung rekursiver Funktionen unterscheiden sich nicht grundlegend von den hier angegebenen, sind aber etwas von diesen zu unterscheiden[71]. Hier wurden die Erzeungsoperationen anders gewählt um einen Beweis des später folgenden Repräsentierbarkeitssatzes einfacher und korrekter geben zu können.
Die einzige Funktion, die hier nicht genau definiert wird, denn dies würde die Einführung von einigen neuen Funktionen verlangen[72], wäre sehr aufwendig und nicht unbedingt nötig um die wichtigsten Funktionen der Folgenden zu verstehen, ist $A(x)$. $A(x)$ hat die Bedeutung *x ist ein Axiom des Systems P oder durch Einsetzung in die Axiomenschemen des Systems P entstehend.* Intuitiv ist x eben einfach ein Axiom oder aus den Axiomenschemen entstehend, dies sei definiert als:

$$A(x) \equiv x \in A_P$$

dabei steht A_P eben für alle Axiome von P beziehungsweise alle aus Einsetzung in die Axiomenschemen von P entstehenden Formeln.

Nun aber zu den wichtigsten Funktionen, deren metamathematische Bedeutung in *Kursivschrift* angegeben ist[73].

1. : $xteily \equiv \exists z : z \leq y \ \wedge \ y = z \cdot x$
   x teilt y

2. : $Prim(x) \equiv (\neg \exists z : [z < x \ \wedge \ z \neq 1 \ \wedge \ zteilx]) \ \wedge \ x > 1$
   x ist eine Primzahl

[71] vgl. Gödel, 1931, S. 180
[72] vgl. Bülow, 1992, S. 17-21
[73] vgl. Gödel, 1931, S. 182-186

3. : $0Primx \equiv 0$
$(n+1)Primx \equiv \varepsilon z[z \leq x \ \wedge \ Prim(z) \ \wedge \ zteilx \ \wedge \ z > nPrimx]$
$nPrimx$ ist die n-te Primzahl in x

4. : $nGx \equiv \varepsilon z[z \leq x \ \wedge \ (nPrimx)^y teilx \ \wedge \ \neg\{(nPrimx)^{y+1} teilx\}]$
nGx ist das n-te Glied der Zahlenreihe die der Gödelzahl x zugeordnet wurde

5. : $L(x) \equiv \varepsilon z[z \leq x \ \wedge \ zPrimx > 0 \ \wedge \ (z+1)Primx = 0]$
$L(x)$ ist die Länge der Zahlenreihe, die x zugeordnet wurde, dabei bedeutet $(z+1)Primx = 0$, dass $z+1$ nicht mehr in x enthalten ist, also größer ist als die größte in x vorkommende Primzahl

6. : $0! \equiv 1$
$(n+1)! \equiv (n+1) \cdot n$
Fakultät

7. : $Pr(0) \equiv 0$
$Pr(n+1) \equiv \varepsilon z[z \leq Pr(n)! + 1 \ \wedge \ Prim(z) \ \wedge \ z > Pr(n)]$
$Pr(n)$ ist die, der Größe nach geordnet, n-te Primzahl

8. : $a * b \equiv \varepsilon z[z \leq \{Pr(L(a) + L(b))\}^{a+b} \ \wedge \ (\forall x : x \leq L(a) \to nGa = nGz) \ \wedge \ (\forall x : 0 < x \leq L(b) \to (x + L(b))Gz = xGb]$
Die Funktion $a * b$ ist äquivalent zum Aneinanderreihen von zwei Zahlenreihen

9. : $Num(x) \equiv 2^x$
ist die nur aus x bestehende Zahlenreihe

10. : $xVT_n \equiv (\exists z : 13 < z \leq x \ \wedge \ Prim(z) \ \wedge \ x = z^n) \ \wedge \ n \neq 0$
x ist eine Variable n-ten Typs

11. : $Var(x) \equiv \exists z : z \leq x \ \wedge \ xVT_n$
x ist eine Variable

12. : $Neg(x) \equiv Num(3) * Num(9) * x * Num(11)$
$Neg(x)$ ist die Negation, die Verneinung von x

13. : $xImpy \equiv Num(9) * x * Num(11) * Num(5) * Num(9) * y * Num(11)$
x impliziert y

14. : $xKony \equiv Neg(xImpl[Neg(y)])$
$xKony$ ist die Konjugation von x und y

15. : $xDisy \equiv Neg([Neg(x)]Kon[Neg(y)])$
$xDisy$ ist die Disjunktion von x und y

16. : $xFlgt(y, z) \equiv y = zImplx \vee z = yImplx \vee (\exists v : v \leq x \wedge Var(v) \wedge (x = \forall v : y \ \vee \ x = \forall v : z))$
x folgt aus y und z

17. : $Bew(x) \equiv \forall z : (0 < z \leq L(x) \rightarrow A(nGx) \vee [\exists a, b : 0 < a, b \leq n \ \wedge \ nGxFlgt(aGx, bGx]) \ \wedge \ L(x) > 0$
x ist eine endliche Folge von Formeln, die entweder ein Axiom sind oder aus zwei vorhergehenden folgen; x ist damit ein Beweis oder nach Gödel eine Beweisfigur

18. $: xBewy \equiv Bew(x) \ \wedge \ (L[x])Gx = y$
x ist ein Beweis für y

19. $: Bwb(x) \equiv \exists z : zBewx$
x ist eine beweisbare Formel

Mit Ausnahme von $Bwb(x)$ sind alle Funktionen rekursiv. Man könnte die Rekursivität der für die weiteren Betrachtungen wichtigen Funktionen, also vor allem von $xBewy$ zwar auch mahematisch beweisen, aber dies wäre, wie bereits angesprochen, zu aufwendig. Allerdings sieht man durch die oben geschriebenen Funktionen sehr schön, dass viele Funktionen andere, meist einfachere enthalten. Dies ist im Grunde auch das Prinzip hinter der Rekursivität, man gibt „rückbezügliche" Definitionen.

6.5 Repräsentierbarkeit rekursiver Funktionen

Hier werden die letzten Begriffe und Sätze erklärt beziehungsweise angegeben, die zum Beweis der Existenz des unentscheidbaren Satzes gebraucht werden. Doch zunächst noch kurz einige wichtige Begriffe, die für diesen Teil unabdingbar sind.

6.5.1 Prädikate und Prädikatenlogik

In der Folge wird häufig von Prädikaten die Rede sein. Ein Prädikat ist dabei eine Aussage mit freien Variablen. Die Deutung der Eigenschaften dieser Aussagen ist das Gebiet der Prädikatenlogik. Dabei werden auch zumeist Quantoren eingesetzt. Im Grunde ist ein Prädikat das, was oben mit *metamathematische Bedeutung* bezeichnet wurde. Damit ist jede rekursive Funktion im obigen Sinn auch ein Prädikat[74]. In der originalen Publikation Kurt Gödels findet sich das Wort „Prädikat" nicht[75]. Auch dort wurde der Begriff der

[74]vgl. Rautenberg, 2008, S. 190
[75]vgl. Gödel, 1931, S. 173-198

metamathematischen Bedeutung gewählt, was hier übernommen wurde, weil es intuitiv leichter fassbar ist als der Begriff des *Prädikats*.

6.5.2 Repräsentierbarkeit von Prädikaten

Nun versucht man, die Prädikate, die in der Arithmetik dank der Gödelisierung formulierbar sind, in dieser zu formalisieren[76]. Man ordnet ihnen also die Eigenschaft des *Repräsentierens* zu, woraus sich der Repräsentierbarkeitssatz und in weiterer Folge der Beweis des ersten Gödel´schen Unvollständigkeitssatzes ergeben wird. Dabei richtet sich dieser Abschnitt nach Rautenberg, ist allerdings vereinfacht und hier in dieser Form ohne Anspruch auf vollkommene Korrektheit[77].
Dafür werden folgende Folgerungseigenschaften natürlicher Zahlen n, m benötigt. Bei Rautenberg sind es mehr Eigenschaften, doch werden diese nicht unbedingt benötigt[78]. Das Zeichen $\vdash$ bedeutet dabei, dass das dahinter Folgende aus P ableitbar ist. Das Zeichen $\underline{\mathrm{a}}$ bedeutet dabei $N^a(0)$, also die Nachfolgefunktion a mal vor die Zahl 0 gesetzt.
Dabei stützt man sich auf das System P mit seinen Axiomen:

F1: $\vdash \underline{\mathrm{m}} \leq \underline{\mathrm{n}}$ wenn $m \leq n$

F2: $x \leq \underline{n} \vdash x = \underline{0} \vee \underline{1} \vee \ldots \vee \underline{n}$

F3: $\vdash \underline{m} \nleq \underline{n}$ wenn $m \nleq n$

F4: $\vdash x \leq \underline{n} \vee \underline{n} \leq x$

F5: $\vdash N(x) + \underline{n} = x + N(\underline{n})$

[76]vgl. Bülow, 1992, S. 8
[77]vgl. Rautenberg, 2008, S. 182-188
[78]vgl. ebd. S. 183

Die Beweise dazu seien kurz[79]:

F1: Zunächst betrachtet man $\vdash \underline{m}+\underline{n} = \underline{m+n}$. Dies wird mit Metainduktion bewiesen, dabei kann man die Metainduktion als „normale Induktion" in der Metatheorie verstehen[80]. Für $n = 0$ ist nach *P3* $\vdash \underline{m} + 0 = \underline{m}$. Weil $\underline{m} = \underline{m+0}$ folgt $\vdash \underline{m} + 0 = \underline{m+0}$. Aus der Induktionsannahme $\vdash \underline{m} + \underline{n} = \underline{m+n}$ folgt wegen *P4* $\vdash \underline{m} + \underline{n+1} = \underline{m+n} + \underline{1} = N(\underline{m+n}) = \underline{m + N(n)}$ was den Induktionsschritt beweist.
Nun gibt es wegen $m \leq n$ sicher ein k mit $k + m = n$. Also auch $\underline{k+m} = \underline{n}$. Nach dem oben bewiesenen gilt $\vdash \underline{k} + \underline{m} = \underline{n}$ und daraus folgt klarerweise $\vdash \underline{m} \leq \underline{n}$. □

F2: Für $n = 0$ muss $x = \underline{0}$ gelten, da, wenn dies nicht der Fall wäre, ein y existieren würde, für das gilt $N(y) = 0$, weil dann $x < 0$. Das ist aber nach *P1* nicht möglich. Mit der Induktionsbehauptung ist $x \neq 0, x \leq \underline{N(n)} \vdash x = \underline{1} \vee x = \underline{2} \cdots \vee x = \underline{n+1}$ äquivalent. Für den Induktionsschritt beginnt man mit $0 < x \leq \underline{N(n)} \vdash x = N(y) \wedge y \leq \underline{n}$. Dies ist klar, denn $x = N(y) \wedge y \leq \underline{n}$ ist eine schwächere Aussage als $0 < x \leq \underline{N(n)}$ Nach der Induktionsannahme gilt $0 < x \leq \underline{N(n)} \vdash x = N(y) \wedge y = \underline{0} \vee \underline{1} \vee \underline{2} \vee \ldots \vee \underline{n}$. Daraus wiederum folgt dann $0 < x \leq \underline{N(n)} \vdash x = N(y) \wedge N(y) = x = \underline{1} \vee \underline{2} \vee \ldots \vee \underline{N(n)}$, was den Induktionsschritt beweist. □

F3: Die Aussage $m \not\leq n$ impliziert, dass es ein k gibt, für das gilt $k + n = m$. Daraus folgt (vgl. Beweis von F1) $\vdash \underline{k} + \underline{n} = \underline{m}$ woraus wiederum $\vdash \underline{m} \not\leq \underline{n}$ folgt. □

F5: Für $n = 0$ ist es einfach $\vdash N(x) + 0 = N(x + 0) = x + N(0)$ folgt nach P4 (für $y = 0$ und einmal von rechts nach links gelesen). Aus der Annahme $\vdash N(x) + \underline{n} = x + N(\underline{n})$ folgt $\vdash N(x) + N(\underline{n}) = N(x + N(\underline{n})) = x + N(N(\underline{n}))$ nach P4. Das beweist $\vdash N(x) + N(\underline{n}) = x + N(N(\underline{n}))$ und deshalb den Induktionsschritt. □

[79] vgl. Rautenberg, 2008, S. 183
[80] vgl. ebd. S. 183

F4: Für $n = 0$ ist es klar, weil es nach P1 kein x gibt, für das gilt $N(x) = 0$, also $\vdash 0 \leq x$. Auch ist $\underline{n} < x \vdash \exists y : N(y) + \underline{n} = x \vdash N(\underline{n}) \leq x$ nach F5. Aus F2 ergibt sich $x \leq \underline{n} \vdash x \leq N(\underline{n})$, da F2 für alle n. So folgt der Induktionsschritt aus $x \leq \underline{n} \vee \underline{n} \leq x \vdash x \leq \underline{n} \vee \underline{n} < x \vdash x \leq N(\underline{n}) \vee N(\underline{n}) \leq x$, womit der Induktionsschritt gezeigt ist. $\square$

Nun wird eine Definition der Repräsentierbarkeit von Prädikaten gegeben[81]:

Definition. Ein Prädikat $P \subseteq \mathbb{N}^n$ heißt repräsentierbar in der Theorie (im System) P, wenn es ein $\alpha = \alpha(x)$ (wobei $x \in \mathbb{N}^n$) gibt, eine repräsentierbare Formel, sodass:
$R^+ : P(a) \to \vdash \alpha(\underline{a})$; $R^- : \neg P(a) \to \vdash \neg\alpha(\underline{a})$

Nun werden einige Lemmata nach Wolfgang Rautenberg gegeben und auch bewiesen, die für den Beweis des Repräsentierbarkeitssatzes notwendig sind. In der Folge bedeute x_n stehts $x \in \mathbb{N}^n$.

Lemma 1. *Es sei $P \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ repräsentiert durch $\alpha(x_n, y)$. Weiters sei z keine freie Variable in α. Dann repräsentieren $\exists z \leq y : \alpha(x_n, z)$ und $\forall z \leq y : \alpha(x_n, z)$ die Prädikate Q und R mit*

$$Q(a_n, b) \leftrightarrow \exists c \leq b : P(a_n, c) \;\; bzw. \;\; R(a_n, b) \leftrightarrow \forall c \leq b : P(a_n, c)$$

Das selbe gilt, wenn $\leq$ überall durch $<$ ersetzt wird[82].

Beweis Lemma 1. Zunächst beweist man für Q R^+. Es gelte $Q(a_n, b)$ also $P(a_n, c)$ für ein $c \leq b$. Nach F1 ist also $\vdash \alpha(\underline{a_n}, \underline{c}) \wedge \underline{c} \leq \underline{b}$. Es muss also ein z geben, für das gilt $\alpha(\underline{a_n}, z)$. Somit folgt daraus, dass $\vdash \exists z \leq \underline{b} : \alpha(\underline{a_n}, z)$, womit R^+ gezeigt ist.
Für R^- gelte $\neg Q(a_n, b)$, weshalb auch $\vdash \neg\alpha(\underline{a_n}, \underline{i})$ für alle $i \leq b$. Mit F2

[81]vgl. Rautenberg, 2008, S. 184
[82]vgl. ebd., S. 187

ergibt das $z \leq b \vdash z = \underline{0} \vee \underline{1} \vee \ldots \vee \underline{b} \vdash \neg\alpha(\underline{a_n}, z)$. Dies ist äquivalent mit $\vdash \forall z \leq \underline{b} : \neg\alpha(\underline{a_n}, z) \equiv \neg\exists z \leq \underline{b} : \alpha(\underline{a_n}, z)$, womit R^- auch schon gezeigt ist[83].
Nun beweist man für das Prädikat R. Man beginnt mit R^+, sei also $R(a_n, c)$. Nun ist aber $R(a_n, c) \leftrightarrow \neg\exists c \leq b : \neg P(a_n, c)$[84]. Es gibt also kein $c \leq b$ für das $\neg\alpha(a_n, c)$ gilt. Es folgt also nach F3 $\vdash \neg\alpha(\underline{a_n}, \underline{c}) \wedge \underline{c} \nleq \underline{b}$. Es existiert also kein $z \nleq b$ für das $\neg\alpha(a_n, z)$ gilt. Also $\vdash \neg\exists z \leq \underline{b} : \neg\alpha(\underline{a_n}, z) \equiv \forall z \leq \underline{b} : \alpha(\underline{a_n}, z)$, womit R^+ gezeigt ist.
Für R^- gelte $\neg R(a_n, b)$ also $\neg P(a_n, c)$ für ein $c \leq b$. Deshalb $\vdash \neg\alpha(\underline{a_n}, \underline{c})$ für ein $c \leq b$. Mit F2 ergibt sich daraus $z \leq \underline{b} \vdash z = \underline{0} \vee \underline{1} \vee \ldots \vee \underline{b} \vdash \neg\alpha(\underline{a_n}, z)$. Daraus folgt klar $\vdash \exists z \leq \underline{b} : \neg\alpha(\underline{a_n}, z)$ womit auch R^- gezeigt ist.
Der gegebene Beweis bleibt wortwörtlich der gleiche wenn überall $\leq$ durch $<$ ersetzt wird. $\square$

Nun folgt eine Definition des Begriffs einer repräsentatierbaren Funktion nach Gödel [85].

Definition. *Eine Funktion $f \in F_n$ heißt eine repräsentierbare Funktion in P, wenn es eine repräsentierende Formel $\varphi(x_n, y)$ gibt und für alle $a_n \in \mathbb{N}^n$*

$$R^+ \ :\vdash \varphi(\underline{a_n}, \underline{f(a_n)}) \qquad ; \qquad R^= : \varphi(\underline{a_n}, y) \vdash y = \underline{f(a_n)}$$

Im Folgenden bezeichne *graphf* immer die Abbildung, den „Graphen“ von f. Nun folgt ein wichtiges Lemma[86]

Lemma 2. *(a) Sei $P \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ repräsentiert durch $\alpha(x_n, y)$ und gelte $\forall a_n : \exists b : P(a_n, b)$. Dann wird $f : a_n \mapsto \varepsilon b[P(a_n, b)]$ repräsentiert durch $\varphi(x_n, y) := \alpha(x_n, y) \wedge \forall z < y : \neg\alpha(x_n, z)$*
(b)f ist repräsentierbar, wenn graphf repräsentierbar ist.

[83] vgl. Rautenberg, 2008, S. 187
[84] vgl. ebd., S. 187
[85] vgl. ebd., S. 187
[86] vgl. ebd., S. 187

Beweis Lemma 2. (a) Da nach Lemma 1 die Formel $\varphi(x_n, y)$ das durch sie definierte Prädikat repräsentiert (dieses ist offenbar $graphf$), bleibt der der Beweis von

$$R^= : \alpha(\underline{a_n}, y) \wedge \forall z < y : \neg\alpha(\underline{a_n}, z) \vdash y = \underline{f(a_n)}$$

Sei $b := f(a_n)$. Dann ist $\underline{b} < y \vdash \exists z < y : \alpha(\underline{a_n}, z)$, weil $\vdash \alpha(\underline{a_n}, \underline{b})$. Dazu liefert eine Kontraposition $\neg\exists z < y : \alpha(\underline{a_n}, z) \vdash \underline{b} \not< y$. Deshalb gilt $\forall z < y : \neg\alpha(a_n, z) \vdash \underline{b} \not< y$. Nach F2 gilt $y < \underline{b} \vdash y = \underline{1} \vee \underline{2} \vee \ldots \vee \underline{b-1}$. Da $y < \underline{b} = \underline{f(a_n)}$ und φ als Bedingung enthält, dass $\forall z < y : \neg\alpha(\underline{a_n}, z)$ und $y = \underline{f(a)}$ ist, folgt nach R^-, dass $y < \underline{b} \vdash \neg\alpha(\underline{a_n}, y)$. Deshalb gilt $\alpha(\underline{a_n}, y) \vdash y \not< \underline{b}$. Also gilt $\alpha(\underline{a_n}, y) \wedge \forall z < y : \neg\alpha(\underline{a_n}, z) \vdash y \not< \underline{b} \wedge \underline{b} \not< y \vdash y = \underline{b}$ nach F4. Damit ist $R^=$ und damit auch Lemma 2(a) bewiesen[87]. □
(b) Lemma 2(b) ist eine Anwendung von Lemma 2 (a) auf $P = graphf$. Dies ist deshalb so, weil $f(a) = \varepsilon b[P(\underline{a_n}, b)]$[88]. □

Lemma 3[89]. *(a) Sei $P \in \mathbb{N}^k$ repräsentiert durch $\alpha(y_k)$ und $g_i \in F_n$ für $i = 1, 2, \ldots, k$ repräsentiert durch $\gamma_i(x_k, y_i)$. Dann wird $Q := P[g_1, g_2, \ldots, g_k]$ durch $\beta(x_k) := \exists y_k : \alpha(y_k) \wedge \gamma_1(x_k, y_1) \wedge \gamma_2(x_k, y_2) \wedge \ldots \wedge \gamma_k(x_k, y_k)$ repräsentiert. Sind die γ_i und P repräsentierbar, dann auch das Prädikat Q.*
(b)Mit $h \in F_m$ und $g_1, g_2, \ldots, g_m \in F_n$ ist auch $f = h[g_1, g_2, \ldots g_m]$ repräsentierbar.

Beweis Lemma 3.[90] (a) Sei $b_i := g_i(a_k)$, sodass nach R^+ gilt $\vdash \gamma_i(\underline{a_k}, \underline{b_i})$ für $i = 1, \ldots, k$ sowie $b_k = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ und $\underline{b_k} = (\underline{b_1}, \ldots, \underline{b_k})$. Für R^+ gelte $Q(a_k)$ also auch $P(b_k)$, so ist sicher $\vdash \alpha(\underline{b_k})$. Also auch nach dem oben gezeigten $\vdash \alpha(\underline{b_k}) \wedge \gamma_1(\underline{a_1}, \underline{b_1}), \ldots, \wedge\gamma_k(\underline{a_k}, \underline{b_k})$, was äquivalent ist zu $\vdash \beta(\underline{a_k})$. Falls aber $\neg Q(a_k)$ also $\neg P(b_k)$ gilt, so ist $\vdash \neg\alpha(\underline{b_k})$. Mit $R^=$ von γ_i ergibt sich dann daraus $\gamma_1(\underline{a_k}, y_i) \wedge \ldots \wedge \gamma_k(\underline{a_k}, y_k) \vdash y_1 = \underline{b_1} \wedge \ldots \wedge y_k = \underline{b_k} \vdash \neg\alpha(y_k)$. Daher gilt auch $\vdash \forall y_k : [\gamma_1(\underline{a_k}, y_1) \wedge \ldots \wedge \gamma_k(\underline{a_k}, y_k) \rightarrow \neg\alpha(y_k)] \equiv \neg\beta(\underline{a_k})$. Damit ist auch R^- gezeigt.

[87] vgl. Rautenberg, 2008, S. 187f.
[88] vgl. ebd., S. 188
[89] vgl. ebd., S. 188
[90] vgl. ebd., S. 188

Für die zusätzliche Behauptung seien α und γ_i repräsentierbar, also auch β. Wird P nun zugleich auch durch die Formel $\alpha'(x_k)$ repräsentiert, so wird also (vergleiche oben) Q durch die Formel $\forall y_k : [\gamma_1(x_k, y_1) \wedge \gamma_2(x_k, y_2) \wedge \ldots \wedge \gamma_k(x_k, y_k) \rightarrow \alpha'(y_k)]$ repräsentiert.
(b) Es repräsentiere $\beta(x_k, z)$ die Funktion h. Dann kann man analog wie in (a) zeigen, dass $h[g_1, g_2, \ldots, g_m]$ durch $\exists y_k : \beta(y_k, z) \wedge \gamma_1(x_k, y_1) \wedge \ldots \wedge \gamma_k(x_k, y_k)$ repräsentiert wird. $\square$

6.5.3 Der Repräsentierbarkeitssatz

Nun wird das grundlegende Ergebnis für den Beweis der Unvollständigkeit von P geliefert, und dies ist der Repräsentierbarkeitssatz, oder auch Repräsentationssatz.
Dafür wird zunächst aber noch eine Funktion gebraucht, die sogenannte β-Funktion. Diese ist insofern sinnvoll, als dass ihre Werte mehr oder weniger vorgegeben sind. Ist eine Zahlenreihe $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ gegeben, so existiert ein c, für das die Funktion die Eigenschaft hat, dass $\beta(c, i) = c_i$ für alle $i \leq n$[91]. Es gibt zwar einige Funktionen, die im Stande sind dies zu leisten, etwa nGx, doch die Repräsentierbarkeit solcher Funktionen ist nur schwierig zu beweisen[92]. Nun wird die β-Funktion und ihre wichtigste Eigenschaft angegeben, um mit deren Hilfe den Repräsentierbarkeitssatz zu beweisen.
Zunächst sei die *Paarkodierung* definiert als[93]

$$\delta(a, b) := \varepsilon k \leq (3a + b + 1)^2[2k = 2a + (a + b)(a + b + 1)]$$

Dies folgt daraus, dass $\delta(a, b) = a + \frac{1}{2}(a + b)(a + b + 1)$.
Die Paarkodierung bildet also $\mathbb{N}^2$ auf $\mathbb{N}$ ab. δ ist dabei bijektiv, dass heißt es gilt $\delta(a_2) = \delta(x_2) \rightarrow a_2 = x_2$ und δ füllt mit seinem Bild ganz $\mathbb{N}$ aus [94]. Die Paarkodierung ist durch $\pi(x, y, z) \ \wedge \ \forall u < z : \neg\pi(x, y, z)$ repräsentiert,

[91]vgl. Rautenberg, 2008, S. 189
[92]vgl. ebd., S. 189
[93]vgl. ebd., S. 172
[94]vgl. ebd., S. 172

wobei π die Formel $(x+y)\cdot N(x+y)+\underline{2}\cdot x=\underline{2}\cdot z$ ist.
Weil nun δ bijektiv ist gibt es sicher Funktionen $\upsilon_1(x)$ und $\upsilon_2(x)$ für die gilt $\delta(\upsilon_1(k),\upsilon_2(k))=k$ für alle k[95].

Weiters sei
$\alpha(a,b,i):=rest(a,(1+(1+i)b))$
dabei ist $\alpha(a,b,i)=k\leftrightarrow\exists c\leq a: a=c\cdot(1+(1+i)b)+k \;\&\; k<1+(1+i)b$
Wobei $rest(a,b):=amodb$. Die Funktion α ist außerdem repräsentierbar, denn sie definiert offenbar *grapha* und nach Lemma 2 (b) ist α somit repräsentierbar[96].

Nun definiert man die Funktion β wie folgt[97]
$\beta:(c,i)\mapsto\alpha(\upsilon_1(c),\upsilon_2(c),i)$
Man kann also für β eine repräsentierende Formel angeben, denn für β gilt:
$\beta(c,i)=k\leftrightarrow\exists a,b\leq c:\delta(a,b)=c \;\&\; \alpha(a,b,i)=k$

Man benötigt nun einen sehr alten Satz der Zahlentheorie, den *Chinesischen Restsatz*. Durch diesen wird man die Eigenschaft, die man von der β-Funktion möchte, erkennen und diese ist dann auch nachweisbar.

Chinesischer Restsatz[98]**.** *Sei $c_i<d_i$ für $i=0,1,...,n$ und seien $d_0,d_1,...,d_n$ paarweise zueinander teilerfremd (das heißt sie besitzen keinen gemeinsamen Primteiler). Dann existiert ein $a\in\mathbb{N}$ mit $rest(a,d_i)=c_i$ für $i=0,1,...,n$.*
Dieser Satz wird hier naiv verwendet, wer sich für einen Beweis durch Induktion interessiert, sei auf Rautenberg, Seite 189 f. verwiesen.
Nun ist es aber auch hier möglich, die wichtigste Eigenschaft von β zu formulieren:

[95] vgl. Rautenberg, 2008, S. 189
[96] vgl. ebd., S. 189
[97] vgl. ebd., S. 189
[98] vgl. ebd., S. 189

Lemma 4[99]**.** *Zu jedem k und jeder Folge $c_0, c_1, \ldots, c_k$ gibt es ein c für das gilt $\beta(c,i) = c_i$ für $i = 0, 1, \ldots, k$.*

Beweis Lemma 4[100]**.** Man gibt die Werte a und b mit $\alpha(a,b,i) = c_i$ an. Dann ist die Behauptung erfüllt, weil wenn $c = \delta(a,b)$, dann $\beta(\delta(a,b),i) = \alpha(a,b,i)$. Nun sei $m = max(k, c_0, c_1, \ldots, c_k)$. Weiters sei $b = kgV(i{+}1 \,|\, i < m)$ also das kleinste gemeinsame Vielfache aller natürlichen (natürlich $\mathbb{N}$ ohne die Null) Zahlen $\leq i{+}1$. Nun wird behauptet, dass alle Zahlen $d_i := 1{+}(1{+}i)b > c_i (i \leq k)$ paarweise teilerfremd sind. Denn wäre dies nicht der Fall, so gebe es für d_i, d_j sicher einen Primteiler p für den $p \,|\, d_j - d_i$ gilt, wobei $i < j \leq k$. Nun ist $p \,|\, d_j - d_i = (j-i)b$, dass heißt es gilt $p \,|\, j - i$ oder $p \,|\, b$. Da nun aber wegen $j - i \leq k \leq m$ gilt $j - i \mid b$ aufgrund der Definition von b. Also gilt $p \,|\, b$ auf jeden Fall. Nun gilt aber auch $b \,|\, d_i - 1$ aufgrund der Definition von d_i, also auch $p \mid d_i - 1$. Dies ist aber ein Wiederspruch zu $p \mid d_i$, also ist die Teilerfremdheit bestätigt. Nach dem Chinesischen Restsatz gibt es also ein a mit $rest(a, d_i) = c_i$ für $i = 0, 1, \ldots, k$, das heißt $\alpha(a,b,i) = c_i$. $\square$

Nach diesen Vorbereitungen geht es nun an den Lohn all der mühseligen Ausführungen, an den Beweis des Repräsentierbarkeitssatzes. Der Satz wird hier sowohl nach Rautenberg als auch nach Kurt Gödel selbst gegeben werden. Zunächst die moderne Variante nach Wolfgang Rautenberg[101]:

Repräsentierbarkeitssatz. *Jede rekursive Funktion f - und somit auch jedes rekursive Prädikat P - ist im System P und damit in jeder Theorie $T \supseteq P$ repräsentierbar.*

Beweis Repräsentierbarkeitssatz[102]**.** Um den Repräsentierbarkeitssatz zu beweisen reicht es schon aus, eine Formel anzugeben, die f repräsentiert. Da alle rekursiven Funktionen aus den Anfangsfunktionen und den

[99]vgl. Rautenberg, 2008, S. 190
[100]vgl. ebd., S. 190
[101]vgl. ebd., S. 190
[102]vgl. ebd. S. 190

Erzeugungsoperationen enstehen, reicht es für diese eine repräsentierende Formel anzugeben.
Für die Anfangsfunktion 0 leistet dies $v_0 = 0$, für N leistet es die Formel $v_1 = N(v_0)$ und für I_v^n die Formel $v_n = v_v$.
Nun sei $h = f(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ für **Oc** und es seien $\alpha(y_k, z)$ und $\gamma_i(x_k, y_i)$ repräsentierende Formeln für f und j_i. Nach Lemma 3 ist dann $\varphi(x_k, z) := \exists y_k : \alpha(y_k, z) \wedge \gamma_1(x_{k,1}) \wedge \gamma_2(x_k, y_2) \wedge \ldots \wedge \gamma_k(x_k, y_k)$ eine f repräsentierende Formel.
Nun sei $f = \mathbf{Op}(g, h)$ und g un h seien beide repräsentierbar. Im Folgenden sei mit β stehts die oben definierte β-Funktion gemeint. Erklärt man nun das Prädikat P mit $P(a_n, b, c) \leftrightarrow \beta(c, 0) = g(a_n)$ & $\forall v < b : \beta(c, N(v)) = h(a_n, v, \beta(c, v))$, dann ist P nach Lemma 1 und Lemma 3 repräsentierbar. Nun ist $P(a_n, b, c)$ gleichwertig mit

$$(*) \quad \beta(c, i) = f(a_n, i)$$

für alle $i \leq b$. Nun gibt es nach Lemma 4 ein c, dass zu gegebenen a_n, b die Gleichung $(*)$ löst, also gilt $\forall a_n, b : \exists c : P(a_n, b, c)$. Deshalb ist $f* : (a_n, b) \mapsto \varepsilon c[P(a, b, c)]$ nach Lemma 2 repräsentierbar. Nun setzt man $i = b$ und erhält aus $(*)$ dann $\beta(f * (a_n, b), b) = f(a_n, b)$. Wie schon bei **Oc** gezeigt wurde ist f nun als Komposition zweier repräsentierbarer Funktionen wieder repräsentierbar.
Nun entstehe f durch $\mathbf{O}\varepsilon$, dass heißt $f(a_n) = \varepsilon b[P(a_n, b)]$, mit $P(a_n, b) \leftrightarrow g(a_n, b) = 0$, wobei g repräsentierbar ist. Nach Lemma 2 ist f repräsentierbar. $\square$

Nun sei noch die Formulierung des Repräsentierbarkeitssatzes nach Kurt Gödel angeführt[103], diese wird dann auch genutzt, um den Unvollständigkeitssatz zu beweisen.

> „Zu jeder rekursiven Relation R $(x_1 ...x_n)$ gibt es es ein n-stelliges *Relationszeichen* r (mit den *freien Variablen* $u_1, u_2, ...u_n$), so daß für alle Zahlen-n-tupel $(x_1 ...x_n)$ gilt:“
>
> $$R(x_1 ...x_n) \rightarrow Bwb(Subst(r, [u_1, ...u_n], [\underline{x_1}, ...\underline{x_n}])) \quad (6.1)$$
>
> $$\neg R(x_1, ..., x_n) \rightarrow Bwb(\neg Subst(r, [u_1, ...u_n], [\underline{x_1}, ...\underline{x_n}])) \quad (6.2)$$
>
> (Gödel, 1931, S. 186)

Man beachte, dass die Notationen der Folgerungen nicht mit denen im Original Gödels übereinstimmen, sondern in die hier gebrauchten Notationen übersetzt wurden.

6.6 Der erste Gödel´sche Unvollständigkeitssatz

Nach all diesen Vorbereitungen wird nun also der Unvollständigkeitssatz Kurt Gödels formuliert und bewiesen.
Doch ein letztes Mal muss allerdings eine Zwischenbetrachtung eingeschoben werden und zwar die der ω-Konsistenz beziehungsweise der ω-Widerspruchsfreiheit. Dabei sei im Folgenden mit $Flg(P)$ die Folgerungsmenge von P bezeichnet, das heißt die Menge der aus P ableitbaren Formeln[104]. Das System P heiße nun ω-widerspruchsfrei, wenn gilt[105]:

$$\neg\exists\alpha : [\forall n : Subst(\alpha, v, \underline{n}) \in Flg(P)] \;\&\; [\neg\forall v : \alpha \in Flg(P)]$$

[103] vgl. Gödel, 1931, S. 186
[104] vgl. ebd., S. 187
[105] vgl. ebd. S. 187

Dies sagt im Grunde nur aus, dass nicht abgeleitet werden kann, dass α zwar für alle n gilt und gleichzeitig abgeleitet werden kann, dass α nicht für alle v gilt. Denn dies würde einen Widerspruch im System erzeugen und die Betrachtung eines widerspruchsvollen Systems wäre hier schließlich sinnlos.

Nun aber zum Ziel, dem Beweis von Kurt Gödels erstem Unvollständigkeitssatz. Hier wird der Beweis sehr nahe am Original gehalten[106]. Die Formulierung ist auf das System P bezogen, denn dieses war Ziel der Betrachtungen. Von nun an stehe $\lfloor\alpha\rfloor$ für $\underline{\alpha}$. Dies entspricht dem *Gödelterm* von $\lceil\alpha\rceil$, also der Gödelzahl von α, allerdings *in P*.

Erster Gödel´scher Unvollständigkeitssatz[107]. *Zu jeder ω-widerspruchsfreien Theorie $T \supseteq P$ gibt es eine Aussage α, so weder α noch $\neg\alpha$ aus P ableitbar ist. Das bedeutet α ist unabhängig, also unentscheidbar in P und damit in T.*

Beweis Erster Gödel´scher Unvollständigkeitssatz[108]. Zunächst ist klar, dass gilt $\vdash \gamma \to Bwb(\gamma)$. Nun definiert man die Relation $Q(x, y) = \neg xBew[Subst(y, 19, \lfloor y\rfloor)]$ und erkennt, dass Q rekursiv ist, weil $xBewy$ und $Subst(a, b, c)$ dies sind. Also liefert der Repräsentierbarkeitssatz nach Gödel, dass es ein q gibt, sodass gilt:

$$\neg xBew[Subst(y, 19, \lfloor y\rfloor)] \to Bwb[Subst(q, 17/19, \lfloor x\rfloor/\lfloor y\rfloor] \tag{6.3}$$

$$xBew[Subst(y, 19, \lfloor y\rfloor)] \to Bwb[\neg Subst(q, 17/19, \lfloor x\rfloor/\lfloor y\rfloor] \tag{6.4}$$

Hier steht $Subst(q, 17/19, x/y)$ dafür, dass in q die zwei freien Variablen 17 und 19 durch x (für 17) und y (für 19) ersetzt werden. Also eine Substitution von 2 Variablen.

[106] vgl. Gödel, 1931, S. 187
[107] vgl. Rautenberg, 2008, S. 195
[108] vgl. Gödel, 1931, S. 187-189

Nun setzt man $p = \forall 17 : q$, wobei p eine Relation mit der freien Variable 19 ist. Weiters setzt man $r = Subst(q, 19, \lfloor p \rfloor)$, und deshalb gilt:
$Subst(p, 19, \lfloor p \rfloor) = Subst([\forall 17 : q], 19, \lfloor p \rfloor) = \forall 17 : Subst(q, 19, \lfloor p \rfloor)$
$= \forall 17 : r$

Außerdem gilt:
$Subst(q, 17/19, \lfloor x \rfloor / \lfloor p \rfloor) = Subst(r, 17, \lfloor x \rfloor)$

Setzt man nun in (6.3) und (6.4) für y p ein, so entsteht:

$$\neg x Bew[\forall 17 : r] \to Bwb[Subst(r, 17, \lfloor x \rfloor)] \tag{6.5}$$

$$x Bew[\forall 17 : r] \to Bwb[\neg Subst(r, 17, \lfloor x \rfloor)] \tag{6.6}$$

Nun ergibt sich hieraus, dass sowohl $\forall 17 : r$ als auch $\neg\forall 17 : r$ nicht in P beweisbar ist.
Denn wäre $\forall 17 : r$ beweisbar, so würde nach (6.6) gelten, dass die Negation der Substitution von irgendeiner Variablen der Form 17 in r beweisbar wäre. Denn wenn $\forall 17 : r$ beweisbar ist, so gibt es ein n, sodass $nBew[\forall 17 : r]$. Das würde allerdings gegen die ω-Widerspruchsfreiheit von P verstoßen, somit ist $\forall 17 : r$ nicht in P beweisbar. Es verstößt sogar gegen die Widerspruchsfreiheit von P, denn mit $\forall 17 : r$ ist trivialerweise auch $Subst(r, 17, \lfloor y \rfloor)$ beweisbar.
Auch $\neg\forall 17 : r$ ist nicht in P beweisbar. Denn wie eben gezeigt, ist $\forall 17 : r$ nicht in P beweisbar, also gilt $\forall n : \neg nBew[\forall 17 : r]$. Daraus folgt nach (6.5) dass $\forall n : Bwb[Subst(r, 17, \lfloor n \rfloor)]$ gilt. Dies stellt aber auch einen Widerspruch zur ω-Widerspruchsfreiheit von P.

Es gilt also, dass $\forall 17 : r$ in P nicht beweisbar ist, womit der Gödel´sche Unvollständigkeitssatz bewiesen ist. $\square$

6.6.1 Fixpunktlemma

In modernen Lehrbüchern über die mathematische Logik findet sich zumeist auch das Fixpunktlemma, auch Fixpunktsatz genannt. Dies wird dann zumeist auch beim Beweis des Ersten Gödel´schen Unvollständigkeitssatz angewendet, weil dieser dadurch verkürzt und vereinfacht wird. Hier soll nun auch ein Beweis mit Hilfe des Fixpunktsatzes gegeben sein, auch wenn Kurt Gödel seinen Satz im Original nicht mit diesem Lemma bewiesen hat[109].

Eine Aussage γ heißt dabei ein Fixpunkt von $\alpha(x)$ in P, wenn $\vdash \gamma \leftrightarrow \alpha(\lfloor\gamma\rfloor)$ gilt[110]. Dabei ist die „Bedeutung" beziehungsweise „Aussage" von γ in etwa *„α trifft auf mich zu"*, also γ ist dann, und nur dann ableitbar, wenn $\alpha(\lfloor\gamma\rfloor)$ gilt.

Fixpunktlemma[111]**.** *In P gibt es zu jedem $\alpha = \alpha(x)$ ein γ für das gilt:*

$$\vdash \gamma \equiv \alpha(\lfloor\gamma\rfloor)$$

Beweis Fixpunktlemma[112]**.** Sei zunächst $sb(a, c, x)$ eine Formel, die $Subst(a, b, c)$ repräsentiert. Dann gilt für alle Formeln $\phi = \phi(x)$ und alle n, dass $sb(\lfloor\phi\rfloor, \underline{n}, x) \equiv x = \lfloor\phi(\underline{n})\rfloor$. Setzt man noch $n = \lceil\phi\rceil$, also $\underline{n} = \lfloor\phi\rfloor$, so folgt
$sb(\lfloor\phi\rfloor, \lfloor\phi\rfloor, x) \equiv x = \lfloor\phi(\lfloor\phi\rfloor)\rfloor$.

Nun sei $\beta(x) := \forall y : sb(x, x, y) \rightarrow Subst(\alpha(x), x, y)$, so leistet $\gamma := \beta(\lfloor\beta\rfloor)$ das Verlangte.
Denn: $\gamma = \forall y : sb(\lfloor\beta\rfloor, \lfloor\beta\rfloor, x) \rightarrow Subst(\alpha(x), x, y)$
Weil nun $y = \lfloor\beta(\lfloor\beta\rfloor)\rfloor$ und wie aus der Definition von γ ersichtlich folgt nun:
$\gamma = \forall y : y = \lfloor\gamma\rfloor \rightarrow Subst(\alpha(x), x, y) \equiv \alpha(\lfloor\gamma\rfloor)$ □

[109] vgl. Gödel, 1931, S. 187 - 189
[110] vgl. Rautenberg, 2008, S. 194
[111] vgl. ebd. S. 194
[112] vgl. ebd. S. 194

Nun kann man den Gödel´schen Unvollständigkeitssatz auch mit Hilfe des Fixpunktsatzes beweisen.

Beweis Erster Gödel´scher Unvollständigkeitssatz[113]**.** Es sei $xBewy$ repräsentiert durch $xbeweisty$ und folglich $Bwb(x)$ repräsentiert durch $bewbar(x) = \exists y : ybeweistx$. Dann gilt (a) $\vdash \zeta \to \vdash bewbar(\lfloor\zeta\rfloor)$. Nun sei γ ein Fixpunkt von $\neg bewbar(x)$. Der Fixpunktsatz liefert nun (b) $\vdash \gamma \equiv \neg bewbar(\lfloor\gamma\rfloor)$.
Die Annahme $\vdash \gamma$ ergibt nach (a) $\vdash bewbar(\lfloor\gamma\rfloor)$, allerdings $\vdash \neg bewbar(\lfloor\gamma\rfloor)$ nach (b). Damit steht aber die Annahme $\vdash \gamma$ im Widerspruch zur verausgesetzten Konsistenz von P. Also $\nvdash \gamma$.
Nun nehme man an, es gelte $\vdash \neg\gamma$. Nach (b) gilt also $\vdash bewbar(\lfloor\gamma\rfloor)$, sodass also gelten muss $\vdash \exists y : ybeweist\lfloor\gamma\rfloor$. Wie oben gezeigt gilt aber $\nvdash \gamma$. Dies impliziert $\vdash \neg\exists y : ybeweist\lfloor\gamma\rfloor$. Dies widerspricht aber der ersten Folgerung der Annahme $\vdash \neg\gamma$, also muss $\nvdash \neg\gamma$ gelten.
Damit ist γ aber unabhängig und somit unentscheidbar in P. $\square$

Mit dem ersten Unvollständigkeitssatz Gödels ist also gezeigt, dass absolut jede Theorie, die zumindest das oben besprochene System als Teil enthält, entweder widersprüchlich oder unvollständig ist. Das heißt man kann in jeder mathematischen Theorie, die zumindest die Arithmetik, denn diese enthält das obige System beziehungsweise ist sogar weitgehend äquivalent, enthält auch Sätze beinhaltet, die unentscheidbar sind. Damit also auch und vor allem die Mengenlehre, hier vor allem die axiomatische Mengenlehre, zu der weiter unten sogar ein Beispiel eines unentscheidbaren Satzes angesprochen wird. Außerdem ist der erste Unvollständigkeitssatz bereits eine negative Antwort auf die Durchführbarkeit des Hilbert´schen Programmes, zu dem allerdings der zweite Unvollständigkeitssatz eine noch vernichtendere Antwort gibt.

[113] vgl. Rautenberg, 2008, S. 195

6.7 Zweiter Gödel´scher Unvollständigkeitssatz

Hier soll in aller Kürze der zweite Unvollständigkeitssatz Kurt Gödels erläutert werden. Auch hier soll möglichst nahe an der originalen Version des Satzes argumentiert werden. Für den Satz benötigt man nur noch minimale Vorarbeit, es wird hier, wie bei Gödel selbst, nicht streng bewiesen[114].

Zweiter Gödelscher Unvollständigkeitssatz[115]. *Das System P, das widerspruchsfrei ist, kann seine eigene Widerspruchsfreiheit nicht beweisen.*

Beweis. Um die Unbeweisbarkeit von $\forall 17 : r$ beim ersten Unvollständigkeitssatz zu beweisen, wurde nur die Widerspruchsfreiheit von P, nicht die *omega*-Widerspruchsfreiheit benutzt. Es gilt also, wenn man die Widerspruchsfreiheit von P mit $Widfr(P)$ abkürzt, dass

$Widfr(P) \to \neg Bwb(\forall 17 : r)$

und damit auch

$Widfr(P) \to \forall x : \neg x Bew[\forall 17 : r]$.

Nach dem Beweis des ersten Unvollständigkeitssatzes ist aber nun

$\forall 17 : r = Subst(p, 19, \lfloor p \rfloor)$ folglich auch

$Widfr(P) \to \forall x : \neg x BewSubst[(p, 19, \lfloor p \rfloor)]$

womit wiederum

$$Widfr(P) \to \forall x : Q(x, p) \tag{6.7}$$

weil ja $Q(x, p) = \neg x Bew[Subst(p, 19, \lfloor p \rfloor)]$.

Da man $Widfr(P)$ rekursiv definiert[116], ist sie in P formulierbar, diese Formel sei durch $wfr(P)$ dargestellt. Nun wird nach (6.3) die Relation $Q(x, y)$ durch q ausgedrückt und dementsprechend die Relation $Q(x, p)$ durch r, weil r nur q mit eingesetzter Variable ist. In diese könnte man noch etwas einsetzen,

[114] vgl. Gödel, 1931, S. 196
[115] vgl. ebd., S. 196
[116] vgl. ebd., S. 196

tut man dies, so ist die Ausdrückbarkeit von $Q(x,p)$ durch r klar nach (6.3). Wenn nun aber $Q(x,p)$ durch r ausgedrückt wird, so auch $\forall x : Q(x,p)$ durch $\forall 17 : r$.
Nach (2.7) folgt dann aber, dass

$$wfr(P) \to \forall 17 : r, \tag{6.8}$$

also $\forall 17 : r$ beweisbar wäre, was unmöglich ist. $\square$

Kapitel 7

Alan Turing und seine Turingmaschine

7.1 Die Turingmaschine

Ein weiterer Meilenstein in der Geschichte der formalen Logik, der Berechenbarkeitstheorie und vor allem der theoretischen Informatik darf die Arbeit „On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem“ vom britischen Mathematiker Alan Turing angesehen werden. In dieser Arbeit aus dem Jahr 1936 erklärt Turing das Prinzip einer Maschine, heute als „Turingmaschine“ in der Informatik und formalen Logik bekannt, die als die erste, zumeist als erste in weiten Kreisen der Mathematiker gelesene, Beschreibung jener Maschine angesehen werden kann, die heute als Computer in nahezu jedem westlichen Haushalt zu finden ist.
Turing beginnt dabei mit der Beschreibung einer Maschine[117], die mit einer endlichen Menge an Zuständen, den sogenannten „m-configurations“ κ_n und einem Band, das man sich als Papier vorstellen kann und in „sections“ unterteilt ist, ausgestattet ist. Jede „section“, die von an Kästchen genannt werden, kann ein Symbol beherbergen. Das Band läuft durch die Maschine und somit gibt es zu jedem Zeitpunkt genau ein Symbol, dass „in der Maschine“ ist, das als gescanntes Symbol oder $\varsigma(x)$, wobei x für das „$x-te$ Kästchen“ des Bandes

[117]vgl. Turing, 1936, S. 231

steht. Man kann das Verhalten der Maschine nun durch das Paar $(\kappa_n, \varsigma(x))$ vorraussagen, da κ_n das Verhalten bestimmt, welches aber von $\varsigma(x)$, dem gescannten Symbol, abhängt[118]. Das eben genannte Paar wird Konfiguration der Maschine genannt. Die Maschine kann dabei nur folgende Befehle ausführen[119]:

„L", wobei das bedeutet, dass das Band nach rechts gerückt wird und die Maschine damit das Kästchen links vom zuvor gescannten Kästchen scannt, also $\varsigma(x) \ggg L \to \varsigma(x-1)$, wobei $\varsigma(x)$ das gescannte Kästchen ist, $\ggg L$ bedeutet, dass der Befehl L ausgeführt wird, und $\to \varsigma(x-1)$ bedeutet, dass die Maschine übergeht in eine Position, in der das Kästchen links vom ursprünglichen Kästchen gescannt wird und zwar das direkt daneben liegende Kästchen.

„R", wobei R der entgegengesetzte Befehl von L ist.

„E", wobei dies der „Lösch-Befehl" ist, also das gescannte Symbol gelöscht wird.

„P", was für „print" steht, ist der Befehl zum Schreiben, so steht $P1$ dafür, dass die 1 auf das gescannte Symbol geschrieben wird.

Es ist außerdem noch wichtig zu unterscheiden zwischen *endlichen* und *unendlichen* Maschinen, wobei eine endliche Maschine nie mehr als eine endliche Anzahl von Zeichen niederschreibt.

Es sei hier noch darauf hingewiesen, dass einige Definitionen nicht denen in der Originalarbeit entsprechen[120], da genaue Definitionen nicht nötig sind und auch in Turings Arbeit kaum formal definiert wird, da alle Sätze intiutiv (und trotzdem richtig) relativ einleuchtend zu beweisen sind.

---

[118] vgl. Turing, S.231

[119] vgl. ebd., S 233

[120] vgl. ebd. S. 231-233

7.2 Unentscheidbarkeit der Erscheinung vorgegebener Symbole

Zunächst sei hier noch gesagt, dass es möglich ist, und auch von Turing getan wird[121], die berechenbaren Folgen zu nummerieren, indem die Maschine, die eben genau eine dieser Folgen ausgibt, nummeriert wird. Hier soll dieser Prozess nicht durchgeführt werden, zumal er nicht besonders interessant ist. Aber es sei mit S.D. (standard description) die Beschreibung einer Maschine durch eine Folge von Buchstaben und mit D.N. (description number) sei die Zahl, die durch Kodierung der S.D. entsteht, bezeichnet. Die Maschine mit D.N.=n sei mit $M(n)$ bezeichnet.
Man kann nun zeigen, dass es nicht möglich ist, allein anhand der D.N. einer Maschine zu entscheiden, ob diese endlich oder unendlich ist und dies in einer endlichen Anzahl an Schritten[122].
Wäre dies nämlich der Fall, so gäbe es diese Maschine, genannt D, und man könnte eine Maschine H mit folgenden Eigenschaften konstruieren:
1.: H testet die D.N.s aus ℕ bis zu einer bestimmten Zahl durch und markiert sie mit „e" bzw. mit „u" für endlich bzw. unendlich.
2.: Falls eine Zahl n als D.N. einer endlichen Maschine gefunden ist, so berechnet H die ersten F(n) Zahlen der Folge von Zahlen, die von $M(n)$ berechnet wird und schreibt die F(n)-te Zahl nieder. Dabei soll F(n) für die Anzahl der gefundenen endlichen Maschinen stehen. Das bedeutet also, falls eine Zahl k D.N. einer endlichen Maschine ist, so $F(k) \to F(k) + 1$ oder gleichbedeutend $F(k) = F(k-1) + 1$. Falls k nicht D.N. einer endlichen Maschine ist, bleibt $F(k) = F(k-1)$.
Nun ist die Maschine H endlich: Denn sie testet nur endlich viele natürliche Zahlen und jede Testung von D hat nach Annahme in endlich vielen Schritten ein Ergebnis. Also ist H endlich.
Sei weiters die D.N. von H selbst irgendeine Zahl K. Dann muss H im Fall, dass K getestet wird, K mit einem „e" markieren und die ersten F(K) Zahlen von H berechnen und die letzte schreiben. Doch dies ist nicht möglich: Denn

[121] vgl. Turing, 1936, S. 239ff.
[122] vgl. ebd., S. 246f.

die F(K)-te Zahl von H ist ja gerade die Zahl, die H bei der Testung der natürlichen Zahl K sucht. Dass heißt H müsste die Zahl zuerst schreiben, bevor sie berechnet wird, da H diese Zahl sonst nicht berechnen kann. Diese Zahl kann aber gerade deshalb nicht gefunden werden, ein Widerspruch, also kann es H und damit vor allem D nicht geben[123].
Daraus leitet sich ein wichtiges Resultat ab:
Es gibt keine Maschine E die allein anhand der S.D. einer beliebigen Maschine M entscheiden kann, ob M je eine bestimmte Zahl schreibt.
Wieder zeigt man indirekt:
Sei E eine Maschine mit den oben genannten Eigenschaften. Wenn man nun die Maschinen M_i, mit der Eigenschaft, dass M_i die selbe Folge an Zahlen wie M schreibt, aber die ersten i Vorkommen einer bestimmten Zahl (z. B. 0) auslässt bzw. mit irgendeiner anderen Zahl versieht. Lässt man nun E die S.D.´s von den M_i´s testen, so kann man sehen, ob M eine bestimmte Zahl unendlich oft schreibt. Wenn man nun dies für alle Zahlen die von M geschrieben werden, durchführt, so kann man entscheiden, ob M eine endliche oder unendliche Maschine ist. Dies ist aber unmöglich nach den obigem Ergebnis.

7.2.1 Unentscheidbarkeit des Entscheidungsproblems

David Hilbert ist eng verbunden mit dem Entscheidungsproblem, der Frage, ob es einen allgemeinen Prozess gibt, der entscheidet, ob eine gegebene Formel in einem Axiomensystem wahr oder falsch ist.
Dies ist aber nicht möglich[124]. Denn man kann eine Formel konstruieren, die eine sehr umständliche Form hat, mit vielen Abkürzungen und etwas verwirrend sein mag auf den ersten Blick, die nicht entscheidbar ist, da es sonst eine Möglichkeit gäbe, zu entscheiden, ob eine Maschine eine vorgegebene Zahl je schreibt, was aber nicht möglich ist.
Hier wird der Beweis nicht ausgeführt, da dies der Rahmen dieser Arbeit lei-

[123] vgl. Turing, 1936, S. 247
[124] vgl. ebd., S. 259ff.

der nicht zulässt, der Leser sei auf Turing, „On computable Numbers with an application to the Entscheidungsproblem“, Kapitel 11, Seite 261ff. verwiesen. Man muss noch anmerken, dass die Resultate Turings nicht äquivalent zu jenen von Gödel sind, denn Gödel hat die Existenz von Unentscheidbaren Sätzen gezeigt, Turing hingegen die Nichtexistenz einer allgemeinen (mechanischen) Methode zur Entscheidung dieser[125]. Das heißt im Speziellen, dass Computer nicht alle Probleme in mathematischen Systemen rein formal lösen können.

[125]vgl. Turing, 1936, S. 259

Kapitel 8

Fazit

Es ist dem Leser nun also ein kurzer Einblick in die komplexe Welt der mathematischen Logik gegeben worden. Jener Welt, in der die Mathematik selbst zum Objekt der Untersuchungen werden - und in der auch seltsame Resultate, wie etwa der Unvollständigkeitssatz oder die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese mit höchster mathematischer Korrektheit und Genauigkeit hergeleitet werden können. Auch wurde gezeigt, wie Alan Turing schon im Jahr 1936 ein theoretisches Modell des Computers konstruierte. Außerdem ergeben diese Ergebnisse, dass man das mathematische Beweisen nicht allein Computern überlassen kann - der Mathematiker also nicht durch den Computer ersetzt werden kann.

Interessanterweise gibt es noch nicht besonders viele Sätze, deren Unabhängigkeit von gewissen Axiomensystemen gezeigt ist - denn es gibt sehr wohl einige zum Teil prominente Anwärter. Ein Beispiel dafür ist die Goldbach´sche Vermutung, die besagt, dass jede gerade Zahl als Summe von zwei Primzahlen geschrieben werden kann. Die Zukunft wird zeigen, welche Rolle die mathematische Logik noch in der „echten Mathematik“ spielen wird.

Literaturverzeichnis

[1] Gödel, Kurt: Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. In: Monatshefte für Mathematik und Physik. 1930, 37: 349-360

[2] Gödel, Kurt: Über formal unentscheidbare Sätze der Principa Mathematica und verwandter Systeme. In: Monatshefte für Mathematik und Physik, 1931, 38. 173-198

[3] Gödel, Kurt: The Consistency of the Continuum Hypothesis by Kurt Gödel. New York: Ishi Press International, 2009

[4] Guerrerio, Gianbruno: Gödel: logische Paradoxie und mathematische Wahrheit. Heidelberg: Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft 2002

[5] Rautenberg, Wolfgang: Einführung in die mathematische Logik. Ein Lehrbuch. 3. Auflage. Wiesbaden: Vieweg und Teubner 2008

[6] Sigmund, Karl; Dawson, John; Mühlberger, Kurt: Kurt Gödel, Das Album. Wiesbaden: Friedr. Vieweg Verlag 2006

[7] Turing, Alan: On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem. In: Proceedings of the London Mathematical Society, 1936, Ser. 2, Vol. 42. 230-265

[8] von Bülow, Christopher: Der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz. Eine Darstellung für Logiker in Spe. Konstanz: 1992 http://www.uni-konstanz.de/philosophie/files/goedel.pdf , [Zugriff am 10.2.2015]