

Inhalte des Mathematikunterrichts in der Oberstufe

Rudimente einer Diskussionsgrundlage

Michael Oberguggenberger
Institut für Technische Mathematik, Geometrie und Bauinformatik
Universität Innsbruck

17. 1. 2002

Vorbemerkungen

Die folgenden Überlegungen sind als die eines Didaktik-Amateurs zu werten. Meine Sicht und meine Erfahrungen stammen aus jahrelangem Unterricht in Mathematik, Statistik und Operations Research für Studenten aus den Studienrichtungen Architektur, Bauingenieurwesen, Physik, also für Anwender. Neben der Betreuung von zwei fachdidaktischen Diplomarbeiten [Sonnweber 1996, Schöpf 1999] habe mich auch sonst immer wieder der Frage gestellt, welche Mathematik und wie diese meinen Anwender-Studenten zu vermitteln ist. Grundprinzip meiner Stoffauswahl war dabei stets der Ansatz:

„Was ist der minimale Kern an mathematischen Wissen, den die betreffende Studentengruppe erlernen muss?“

Auch in diesem Diskussionsbeitrag zu den Inhalten des Mathematikunterrichts in der Oberstufe werde ich von dieser *Minimalforderung* ausgehen. Ich nehme an, dass - wie im Universitätsbereich - ihre Erfüllung bereits mehr Zeit und Kraft in Anspruch nimmt, als verfügbar ist.

Es gibt selbstverständlich unzählige Ansätze und Ansichten zum Thema des Inhalts und der Ziele des schulischen Mathematikunterrichts, siehe zum Beispiel [Tietze, Klika, Wolpers 1997]. Ich möchte mich hier auf drei relativ prosaische, minimale, aber zentrale Punkte beschränken, deren Analyse - so denke ich - eine ziemlich klare Richtungsvorgabe für den schulischen Mathematikunterricht ergeben wird.

In meinen Überlegungen geht es also darum, welche *Forderungen an den Mathematikunterricht der Oberstufe aus Sicht der Universitätslehre* zu stellen sind. Ausgeklammert bleiben dabei ausdrücklich die Anforderungen eines Mathematikstudiums an die schulische Vorbildung - das ist ja ein Minderheitenprogramm!

Ziele des Mathematikunterrichts in der Oberstufe

Als die wesentlichen Aufgaben unterscheide ich drei Punkte betreffend die Bildung, die im Mathematikunterricht erworben werden muss und für die eben das Fach Mathematik zuständig ist.

- a) Grundausbildung („was alle im Alltag brauchen“)
- b) Allgemeinbildung („Verständnis für die Bedeutung der Mathematik“)
- c) Spezialbildung („Grundlage späterer Hochschulstudien“)

Zur Erläuterung der Punkte zunächst ein paar Beispiele:

ad a) Es dürfte unumstritten sein, dass jeder Schulabsolvent gewisse mathematische Grundfertigkeiten braucht, etwa Addieren und Multiplizieren. Unten werde ich die Liste verlängern. Wenn vieles auch auf dem Volksschulstoff beruht, so muss es doch in unterschiedlichen Situationen bis zur Matura geübt werden - sonst wird die entsprechende Kompetenz nicht dauerhaft erworben!

ad b) Um H.-C. Reichel zu zitieren, „Mathematik ist verborgen und dennoch allgegenwärtig“. Vom CD-Spieler über die Inflationsraten, der Sicherheit von Kraftwerken, sämtlicher „High-Tech-Produkte“ bis zur volkswirtschaftlichen Gesamtrechnung - überall ist Mathematik. Ich denke, dass es zur Allgemeinbildung gehört, ein Bewusstsein dafür zu entwickeln - und auch einen partiellen Einblick, wie und warum Mathematik diese ihre Rolle spielt.

ad c) Aus meinen (naiven) Beobachtungen meiner Studenten weiß ich, dass eine Reihe von „höheren“ mathematischen Fertigkeiten bereits im jugendlichen Alter gelernt werden müssen, um hinreichende Kompetenz im Erwachsenenalter zu gewährleisten (wie es ja auch von Fremdsprachen bekannt ist). Das erstmalige Erlernen etwa im Alter von, sagen wir Mitte zwanzig Jahren, ist ungleich schwieriger und begleitend zu einem Hochschulstudium fast nicht mehr zu bewältigen. Es ist daher eine Notwendigkeit für unsere Gesellschaft, dass sie ihre zukünftigen Techniker, Wirtschaftler und Naturwissenschaftler rechtzeitig vorbildet, auch wenn zu diesem Zeitpunkt viele ihre Berufswahl noch nicht getroffen haben. Im Übrigen werden in immer mehr nicht-technischen Studienrichtungen nun in der Hochschullehre Mathematik und Statistik gefordert, so dass das Argument des zu kleinen Adressatenkreises eigentlich nicht mehr zutrifft (Medizin, Pharmazie, Psychologie ..., siehe Anhang).

Inhalte des Mathematikunterrichts an der Oberstufe

Aus dem Gesagten folgt, dass die Inhalte *keineswegs beliebig* sind, sondern vielmehr die in den Punkten a) bis c) geforderten Fertigkeiten vermitteln müssen. Dabei scheinen mir gewisse Themen aus Punkt a) und Punkt c) obligatorisch; bei der Vermittlung von b) gibt es naturgemäß größere Wahlfreiheiten. Die folgenden Listen sind also wieder Minimalforderungen, die unbedingt beachtet werden müssen.

ad a) Grundausbildung:

Meiner Ansicht nach sollte jeder Maturant folgendes beherrschen:

Grundrechnungsarten, Bruchrechnen, Dezimalzahlen

Prozentrechnen, Schlussrechnen

Gleichungen in einer Unbekannten aufstellen und lösen

Elementare Geometrie: Fläche von Rechteck, Dreieck und Kreis, Volumen, Winkel.

Ich betone, dass DIES KEINESWEGS SELBSTVERSTÄNDLICH IST!

Ein beträchtlicher Anteil unserer Architekturstudenten scheitert notorisch daran, das Volumen einer quaderförmigen Baugrube zu berechnen!

Ferner gehört zur Grundausbildung: Ein klein wenig Einblick in *Modellbildung, die Umsetzung von „Alltagsaufgaben“ in eine mathematische Sprache!*

ad b) Allgemeinbildung:

Ich denke, in der Unterstufe wird der Bezug zur „Außenwelt“ durch *Schlussrechnung, Textaufgaben, Gleichungen und elementare Geometrie* herzustellen sein.

In der Oberstufe ist nach meiner Ansicht nach wie vor der *Bezug zur Physik* zu fordern und zu entwickeln. Dazu gehören etwa Fallgesetze, Ballistik, Flüssigkeitsvolumen im liegenden Zylinder, radioaktiver Zerfall, Luftdruck, elementare Akustik usw.

Vermehrt bieten sich natürlich - wegen derer zunehmender Mathematisierung - *Wirtschaftsthemen* (Bereich Operations Research) an, etwa Graphentheorie, Input-Output-Analyse, Optimierung. Dann auch *Sportwissenschaften* (Bewegungsanalyse), Bevölkerungswachstum usw. Schließlich natürlich eine kritische Diskussion der weit verbreiteten *statistischen Analysen*.

Die Themenwahl scheint mir hier AD LIBIDUM zu sein. Es gibt so viele Themen, dass praktisch zu jedem Abschnitt des Lehrplanes solche Bezüge hergestellt werden können. Ich denke auch, dass Punkt b) stoffimmanent und integriert einfließen muss und nicht als getrennter Punkt zu sehen ist.

ad c) Spezialbildung:

Unter diesem Punkt fasse ich alle jene Fertigkeiten zusammen, die die Oberstufe vermitteln muss, um zukünftigen Studenten einen Einstieg in natur-, wirtschaftswissenschaftliche und technische Studienrichtungen zu ermöglichen. Zunehmend gilt dies auch für kulturwissenschaftliche Richtungen und Medizin. Im Übrigen können die Themen der folgenden Minimalliste durchaus auch zur „Allgemeinbildung“ gezählt werden. Im Gegensatz zu Punkt b) erscheinen mir diese Inhalte allerdings nicht als frei wählbar; vielmehr sehe ich sie als *obligatorisch*. Das ist Kanon und Standard der Oberstufenausbildung!

Ich unterscheide zwischen *algorithmischen Fertigkeiten* und *inhaltlichem Wissen*.

c1) Algorithmische Fertigkeiten: Neben den unter Punkt a) gelisteten gehören dazu:

Bruchrechnen, Kürzen; zum Beispiel sollte die Rechnung

$$2a/2b = a/b$$

ohne Nachdenken gekonnt werden.

Rechnen mit Termen: $x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$ sollte sofort erkannt werden; ebenso *Rechnen mit Wurzelausdrücken*, wie etwa Vereinfachungen:

$$\sqrt{(x^2 + b^2)^2} = x^2 + b^2 .$$

In einer meiner Übungsstunden für Bauingenieure habe ich heuer ungefähr fünf Minuten benötigt, um einen der besten Studenten, Gymnasialabsolvent, in Diskussion mit der gesamten Übungsgruppe, dazu zu bringen, diese Vereinfachungsmöglichkeit wahrzunehmen und nicht „auszuquadrieren“.

Ferner: *Sicherheit in den Rechenregeln mit Wurzeln und Potenzen*, wie etwa Vermeidung des Fehlers

$$\sqrt{3} + \sqrt{5} = \sqrt{8} .$$

Man muss jedoch zur Kenntnis nehmen, dass mit solchen Fehlern immer zu rechnen ist: es gibt dafür tief liegende und individuell schwer beseitigbare Gründe (vgl. Tietze, Klika, Wolpers 1997, Abschnitt 2.3: Lern- und Lehrschwierigkeiten).

Ich erwarte ferner, dass die *Lösungsformel für quadratische Gleichungen* in einer Unbekannten und der *Divisionsalgorithmus mit Rest für Polynome* gekonnt werden.

c2) Inhaltliches Wissen: Hier liste ich Themen, alle zusätzlich zu den bereits genannten, die aus den anfangs ausgeführten entwicklungspsychologischen Gründen obligatorische Inhalte des Oberstufenunterrichts sein müssen (und natürlich auch zentrale Themen einer mathematischen Allgemeinbildung darstellen!).

1. Mengenlehre: Rudimente der *Sprache der Mengenlehre*, wie „Mengenklammern“, Durchschnitt, Vereinigung, Teilmenge.

2. Algebra: *Lineare Gleichungssysteme in 2 bis 3 Variablen, Gaußsches Eliminationsverfahren* (systematisch!). Matrizen braucht man in der Schule nicht unbedingt zu unterrichten, denke ich; nach meiner Erfahrung ist die Matrizenrechnung leicht später erlernbar. *Endliche Gruppen und Restklassen* (?).

3. Geometrie: *Volumen und Oberfläche* von Kugel, Kegel, Zylinder, Pyramide u. ä. *Vektorrechnung* im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 (Pfeile!). *Geraden- und Ebenengleichung, Anstieg, Achsenabschnitte, Parameterdarstellung*.

4. Analysis: *Funktionsbegriff, Graph, kartesische Koordinaten. Alle elementaren Funktionen und ihre Eigenschaften: Polynome, Exponentialfunktion, Logarithmen, Wurzeln; Winkelfunktionen, zyklometrische Funktionen* und ihre Anwendungen.

Idee des Grenzwertes (bei Folgen und Funktionen). Intuitive Einsicht genügt, die Epsilonantik halte ich für entbehrlich.

Begriff der Ableitung. Kenntnis der *Ableitung der elementaren Funktionen* und der *Produkt-, Quotienten- und Kettenregel*.

Begriff des bestimmten und unbestimmten Integrals. Integrale der elementaren Funktionen. Dazu sollten hier einige Anwendungen geboten werden; Große Rechenfertigkeit ist nicht anzustreben, aber Grundintegrale sollten beherrscht werden. Zum Beispiel sollte das Integral

$$\int_1^2 x^3 dx$$

auf Anhieb berechnet werden können.

5. Statistik: *Elementare Begriffe der beschreibenden Statistik*, wie Histogramm, Mittelwert, Median (als Anwendungen eignen sich etwa Bevölkerungs- und Einkommensstatistiken u. Ä.; mehrdimensionale Größen, Korrelation (?)). *Idee der Wahrscheinlichkeit in ihrer frequentistischen Interpretation. Gaußsche Glockenkurve* und ihre Bedeutung. Ich denke, dass die kombinatorische (diskrete) Wahrscheinlichkeitstheorie in der Oberstufe entbehrlich ist (außer man will die Schüler mit Lotto locken - aber das würde ich eher zum optionalen Bereich b) zählen).

Damit schließe ich meine (nach Diskussion zu aktualisierende) Liste inhaltlicher Anforderungen an den Mathematikunterricht der Oberstufe. Das alles zu vermitteln bzw. lernen ist schwierig genug. Ich denke aber, dass man in allen Diskussionen um den Mathematikunterricht nicht unter diese Anforderungen gehen kann. **Mir scheint damit auch hinreichend begründet, dass eine Kürzung der Stundenzahl nicht akzeptabel ist.** Es kommt ja zu allem noch in zunehmendem Maß die zugehörige Informatik zum Lehrstoff.

Zitierte Literatur:

E. Schöpf, Didaktische Fragen zur Differentialrechnung in der Schule. Diplomarbeit, Universität Innsbruck 1999

V. Sonnweber, Fachdidaktische Aufbereitung der Fuzzy-Methoden in der Mathematik. Diplomarbeit, Universität Innsbruck 1996

U.-P. Tietze, M. Klika, H. Wolpers, Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 1: Didaktische Grundfragen - Didaktik der Analysis. Verlag Vieweg, Braunschweig 1997.

Anhang:

Mathematik in verschiedenen Studienrichtungen an der Universität Innsbruck

Selbstverständlich haben die Studenten in den Fächern

Mathematik
Physik
Informatik

jede Menge Mathematik zu lernen. Darauf gehe ich hier nicht ein. Zunehmend allerdings erfolgt eine vertiefte Mathematik- und/oder Statistik-Ausbildung auch in vielen anderen Fächern. Dies widerlegt die Behauptung, dass eine mathematische Bildung nur für „wenige“ Spezialbereiche benötigt wird und daher in den AHS bzw. BHS nicht gelehrt werden muss. In der folgenden Tabelle sind die Pflichtstunden aus Mathematik/Statistik (ohne Informatik!) einiger Studienrichtungen in Innsbruck aufgelistet. Die Liste ist keineswegs vollständig.

Studienrichtung	Fach	Stunden (Pflicht)
Geographie	Mathematik für Geographen	2
	Statistik für Geographen	2
Chemie	Mathematik I und II für Chemiker	4
Erdwissenschaften	Mathematik und Statistik für Erdwissenschaften	3
Meteorologie	Mathematik für Meteorologen I, II	6
	Mathematisches Praktikum I, II	6
	Mathematische Übungen für Meteorologen I, II	4
	Statistische Bearbeitungsmethoden in der Meteorologie, mit Übungen	3
Psychologie	Planung und statistische Auswertung psychologischer Untersuchungen I und II	6
	Planung und statistische Auswertung psychologischer Untersuchungen III (2. Abschnitt)	2
Pharmazie	Mathematik für Pharmazeuten	1
Zahnmedizin (ab Herbst auch Medizin)	Medizinische Statistik und Informationsverarbeitung	3
BWL, VWL, IWW	Mathematik/Statistik I (Pflicht)	5
	Mathematik/Statistik II (Wahlpflicht)	5
Bauingenieurwesen	Mathematik	10
	Numerische Mathematik	4
	Statistik	2
	Geometrie	2
Architektur	Mathematisches Denken	1
	Geometrie und Darstellungsmethoden, CAD	7