IMN

Internationale
Mathematische
Nachrichten
Nr. 243
April 2020

Österreichische
Mathematische
Gesellschaft

Automatic sequences

Density theorems for sampling

Roland Fischer

Roman Liedl

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Die IMN wurden 1947 von R. Inzinger als „Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien“ gegründet. 1952 wurde die Zeitschrift in „Internationale Mathematische Nachrichten“ umbenannt und war bis 1971 offizielles Publikationsorgan der „Internationalen Mathematischen Union“.

Von 1953 bis 1977 betreute W. Wunderlich, der bereits seit der Gründung als Redakteur mitwirkte, als Herausgeber die IMN. Die weiteren Herausgeber waren H. Vogler (1978–79), U. Dieter (1980–81, 1984–85), L. Reich (1982–83), P. Flor (1986–99), M. Drmota (2000–2007) und J. Wallner (2008–2017).

Herausgeber:

Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. email *imn@oemg.ac.at*, *http://www.oemg.ac.at/*

Redaktion:

C. Fuchs (Univ. Salzburg, Herausgeber)
H. Humenberger (Univ. Wien)
R. Tichy (TU Graz)
J. Wallner (TU Graz)

Bezug:

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen.

Jahresbeitrag: € 35,–

Bankverbindung:
IBAN AT83-1200-0229-1038-9200 bei der Bank Austria-Creditanstalt (BIC-Code BKAUATWW).

Eigentümer, Herausgeber und Verleger: Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr. Math. Gesellschaft. Druck: Weinitzendruck, 8044 Weinitzen.

ISSN 0020-7926

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Nr. 243 (74. Jahrgang) **April 2020**

Inhalt

Die Titelseite zeigt den Graphen der Funktion $f(x) = \sin(9x) + \sin(10x)$ im Intervall $[-5, 5]$ geplottet mit Wolfram MATHEMATICA 12. Bekanntermaßen werden solche Kurven verwendet, um Wellen mathematisch zu beschreiben. 2020 ist das "International Year of Sound", eine globale Initiative, um die Bedeutung des Schalls zu betonen. Mehr Informationen zu dieser Initiative findet man unter https://sound2020.org. Als Beispiel für mathematische Aspekte der Schallforschung sei an dieser Stelle auf den START-Preisträger von 2011 und jetzigen Direktor des Instituts für Schallforschung der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Doz. Dr. Peter Balazs, verwiesen, der Zeit-Frequenz-Analyse, Gabor-Analysen, Numerik, Frame-Theorie, Signalverarbeitung, Akustik und Psychoakustik zu seinen Forschungsinteressen zählt, sowie auf den START-Preisträger von 2019, José Luis Romero von der Universität Wien, der zu den Themen Zeit-Frequenz-Analyse, Zufälligkeit und Abtastung forscht.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 243 (2020), 1–20

Automatic sequences: Between determinism and randomness

Clemens Müllner
TU Wien

We present in this article an overview about results concerning automatic sequences, focusing on recent results about subsequences along primes, squares and $\lfloor n^c \rfloor$. Depending on the automatic sequence, the behaviour can vary drastically along these subsequences, and quite different methods apply. We will revisit the most influential results and techniques and, finally, discuss how to combine these different approaches.

1 Introduction and Motivation

Automatic sequences are sequences $(a(n))_{n\geq 0}$ on a finite alphabet that are the output of a finite automaton (where the input is the sequence of k-adic digits of n). These kind of sequences have got a lot of attention during the last 15 or 20 years (see for example the book by Allouche and Shallit [1] for a very nice and extensive survey). In particular there are very close relations to dynamical systems, to digital expansions and also to number theory. Some of the most prominent examples of automatic sequences are the Thue-Morse sequence $t(n)$, the Rudin-Shapiro sequence $r(n)$ and the regular paper-folding sequence $p(n)$.[1] We present the first few elements below (we write $\overline{1}$ instead of -1).

$$(t(n))_{n\geq 0} = 0,1,1,0,1,0,0,1,1,0,0,1,0,1,1,0,1,0,0,1,0,1,1,0,0,1,1,0,\dots$$
$$(r(n))_{n\geq 0} = 1,1,1,\overline{1},1,1,\overline{1},1,1,1,1,\overline{1},\overline{1},\overline{1},1,\overline{1},1,1,1,\overline{1},1,1,\overline{1},1,\overline{1},\overline{1},\overline{1},1,\dots$$

[1] The Thue-Morse sequence can be defined by $t(n) = s_2(n) \bmod 2$, where $s_2(n)$ denotes the number of 1's in the binary expansion of n, the Rudin-Shapiro sequence by $r(n) = (-1)^{B_{11}(n)}$, where $B_{11}(n)$ denotes the number of consecutive 11-blocks in the binary expansion of n and the regular paperfolding sequence by $p((4m+1)2^k) = 1, p((4m+3)2^k) = 0$.

ISSN 0020-7926

$$(p(n))_{n\geq 0} = 1,1,0,1,1,0,0,1,1,1,0,0,1,0,0,1,1,1,0,1,1,0,0,0,\ldots$$

We note that automatic sequences are far from being "random-like", however, the situation can change drastically when we start to consider subsequences. We mainly focus in this article on the subsequence along primes, squares and $\lfloor n^c \rfloor$, where $1 < c < 2$. The first two mentioned automatic sequences exhibit (pseudo-) random properties along these subsequences, while the last one does not.

Thus, we experience very different behaviors within the class of automatic sequences which also require very different methods to show the corresponding results.

In Section 2, we properly define automatic sequences and present classical properties of automatic sequences, which strongly imply deterministic behavior. In Section 3 we present recent results about the Thue-Morse sequence along squares, primes and $\lfloor n^c \rfloor$. We focus in particular on a method developed by Mauduit and Rivat which proved itself useful in this context. Here we encounter the first pseudorandom behavior of automatic sequences along (arithmetically easy) subsequences. It turns out that this method can be extended to deal with a whole class of automatic sequences, namely invertible automatic sequences. These are introduced and discussed in Section 4. In Section 5 we study a very different class of automatic sequences, so called synchronizing automatic sequences. They show a very different behavior and are usually much easier to deal with. In particular, we present a proof that any synchronizing automatic sequence along squares is deterministic.

In the final Section 6 we highlight a result that allows us to write a general primitive automatic sequence as a combination of a synchronizing automatic sequence and an automatic sequence that shares many properties of invertible automatic sequences. This description is very helpful and has been exploited in numerous articles. It allows us in particular to use a combination of the methods developed by Mauduit and Rivat and methods for synchronizing automatic sequences to study general automatic sequences. Thus, we are able to show a prime number theorem for any primitive automatic sequence and resolve Sarnak's conjecture for general automatic sequences.

1.1 Notation

In this paper we let $\mathbb{N}$ denote the set of positive integers, by $\mathbb{U}$ the set of complex numbers of modulus 1 and we use the abbreviation $\mathrm{e}(x) = \exp(2\pi i x)$ for any real number x. For two functions,f and g, that take only strictly positive real values such that f/g is bounded, we write $f = O(g)$ or $f \ll g$. Furthermore, if $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 0$, we write $f = o(g)$. Finally, we let $\lfloor x \rfloor$ denote the floor function.

2 (Deterministic) Properties of automatic sequences

We present in this section the relevant definitions and properties related to automata which can also be found in [1].

Definition 1. *A deterministic finite automaton, or DFA, is a quadruple* $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0)$*, where* Q *is a finite set of states,* Σ *is the finite input alphabet,* $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ *is the transition function and* $q_0 \in Q$ *is the initial state.*

We extend δ to a function $\delta : Q \times \Sigma^* \to Q$, in a natural way, by

$$\delta(q, ab) = \delta(\delta(q, a), b)$$

for all $a, b \in \Sigma^*$. By definition $\delta(q, \mathbf{w})$ consists of $|\mathbf{w}|$ "steps" for every $\mathbf{w} \in \Sigma^*$. We call an automaton *primitive*, if there exists $\ell \in \mathbb{N}$ such that for any $q_1, q_2 \in Q$ there exists $\mathbf{w} \in \Sigma^\ell$ such that $\delta(q_1, \mathbf{w}) = q_2$.
We usually work with $\mathbf{w} \in \Sigma^* = \{0, \ldots, k-1\}^*$, where we let Σ^* denote the set of all (finite) words over the alphabet Σ. We can view $\mathbf{w}$ as the digital representation of a natural number n in base k. We define for $\mathbf{w} = (w_0, \ldots, w_r)$ the corresponding natural number $[\mathbf{w}]_k := \sum_{i=0}^{r} k^{r-i} w_i$ (i.e., we assume that the first digit is the most significant). We denote for a natural number n the corresponding digit representation in base k (without leading zeros) by $(n)_k$. Moreover, we denote for any word $\mathbf{w} = (w_0, \ldots, w_r)$ the reverse word with $\mathbf{w}^{rev} := (w_r, \ldots, w_0)$.

Example 1. *We find* $(37)_2 = (1, 0, 0, 1, 0, 1)$ *and* $[(1, 0, 1, 1, 0)]_2 = 22$.

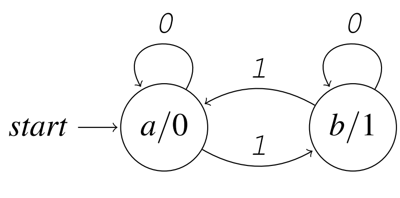
As already mentioned, we always read words from left to right i.e., for digital representations of numbers we start with the most significant digit.

Definition 2. *A DFAO* $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \Delta, \tau)$ *is a DFA with an additional output function* $\tau : Q \to \Delta$.

Definition 3. *We say that a sequence* $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *is a k-automatic sequence, if and only if there exists a DFAO* $A = (Q, \Sigma = \{0, \ldots, k-1\}, \delta, q_0, \Delta, \tau)$ *such that* $a_n = \tau(\delta(q_0, (n)_k))$.

We often use transition diagrams to visualize DFAO.

Example 2. *The Thue-Morse sequence is produced by the following automaton,*



.

The set of states is $\{a,b\}$, the initial state is a and the transition function is given by the labeled arrows. The output function maps a to 0 *and b to* 1.

One way to measure the complexity of a sequence $a(n)$ that takes only values in a finite set $\mathcal{A}$ is in terms of the subword-complexity, that is, the number of different subwords of length ℓ;

$$p_\ell(a) := \#\{(a_n,\dots,a_{n+\ell-1}) : n \in \mathbb{N}\}.$$

A random sequence over the alphabet $\mathcal{A}$ has subword complexity $\#\mathcal{A}^\ell$ with probability 1. Actually, one can even show that every subword occurs with the "correct" frequency, i.e. for every $(b_0,\dots,b_{\ell-1}) \in \mathcal{A}^\ell$ we have with probability 1,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{1 \le n \le N : (a_n,\dots,a_{n+\ell-1})}{N} = (b_0,\dots,b_{\ell-1})\} = \frac{1}{\#\mathcal{A}^\ell}. \tag{1}$$

Any sequence that fulfills (1) is called *normal* and constitutes one extreme behavior for the occurrences of subwords. The other extreme would be that only few words occur at all. We call a sequence *deterministic*, if the subword-complexity only grows sub-exponentially, i.e. $p_\ell(a) = \#\mathcal{A}^{o(\ell)}$. These are the phenomena we will discuss in this article: being deterministic on the one side and being normal on the other.

It is a classical result that the subword complexity of automatic sequences is at most linear in ℓ (which is the lowest possible growth order, if we exclude eventually periodic sequences, which have bounded subword complexity) [1, Theorem 10.3.1]. Thus, all automatic sequences are deterministic and one needs to pass to subsequences to find random phenomena/normality.

Moreover, we note that primitive automatic sequences are *uniformly recurrent*, i.e. every subword that appears, appears with bounded gaps. This is a very restrictive property which already prohibits the subword complexity from being maximal. Furthermore, the density of every subword of a primitive automatic sequence that appears at least once exists and is positive, i.e. let $(b_0,\dots,b_{\ell-1})$ be a subword of $(a(n))_{n\ge 0}$, then

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{0 \le n < N : a(n) = b_0,\dots,a(n+\ell-1) = b_{\ell-1}\}}{N}$$

exists and is positive.

Finally we discuss an interesting closure property of (primitive) automatic sequences. If $(a(n))_{n\ge 0}$ is a (primitive) automatic sequence, then for any $m,d \in \mathbb{N}$, $(a(mn+d))_{n\ge 0}$ is also a (primitive) automatic sequence. This shows immediately that the properties discussed above still hold, when we consider subsequences of (primitive) automatic sequences along arithmetic progressions. Thus, we switch to sparser subsequences and we first focus on one special automatic sequence, namely the Thue-Morse sequence. This specific sequence is a very good starting point as it already features most of the random properties known for automatic sequences and is much easier to work with compared to general automatic sequences.

Deterministic sequences have been intensively studied within the last few years in relation to the Sarnak conjecture [28] that says that deterministic sequences $d(n)$ are asymptotically orthogonal to the Möbius function $\mu(n)$:[2]

$$\sum_{n\leq x} d(n)\mu(n) = o(x) \qquad (x \to \infty). \tag{2}$$

This conjecture is in general open. There is, however, big progress on the logarithmic version of the Sarnak conjecture by Frantzikinakis and Host [12] which is highly related to breakthrough results by Tao [31] and Tao and Teräväinen [32]. For a relatively recent survey on the Sarnak conjecture see [11]. The Sarnak conjecture is closely related to the asymptotic properties of

$$\sum_{n\leq x} d(n)\Lambda(n), \tag{3}$$

where $\Lambda(n)$ denotes the von Mangoldt Λ-function[3] and asymptotic results for (3) can often be used to study the subsequence of $(d(n))_{n\geq 0}$ along primes.

3 Results for the Thue-Morse sequence

The Thue-Morse sequence $(t(n))_{n\geq 0}$ is defined as $t(n) = (s_2(n) \bmod 2)$, where $s_2(n)$ denotes the sum of digits of n in base 2; that is, one looks at the binary expansion of n. Then $t(n) = 0$, if there is an even number of 1's, and $t(n) = 1$, if there is an odd number of 1's,

$$s_2(n) = \sum_{j\geq 0} \varepsilon_j(n).$$

The Thue-Morse sequence was first introduced by Alex Thue as an example of a sequence that is *cube-free* [33]. This means that no subword appears consecutively three times. It was later independently rediscovered by Harold Marston Morse as an example of a non-periodic sequence that is uniformly recurrent [22]. In 1968 Gelfond gave a general result about the distribution of the sum of digits in base k – which we denote by $s_k(n)$ – in residue classes along linear subsequences. As $(s_k(n) \bmod m)_{n\geq 0}$ is an automatic sequence, this constitutes one of the first examples, where subsequences of automatic sequences have been studied.

[2] $\mu(n) = (-1)^k$, where k denotes the number of distinct prime factors of n, if n is squarefree, and $\mu(n) = 0$, otherwise.

[3] $\Lambda(n) = \log p$ for prime powers $n = p^k$ and $\Lambda(n) = 0$ else.

Theorem 1. Let $k,m > 1$ and r,l,a be integers and $(m,k-1) = 1$, then we have

$$\#\{1 \leq n \leq N : n \equiv l \bmod r, s_k(n) \equiv a \bmod m\} = \frac{N}{mr} + O(N^{\lambda}),$$

where $\lambda < 1$ is a positive constant depending only on k and m.

Remark 1. *The condition $(m,k-1) = 1$ is very natural in this context, as*

$$s_k(n) \equiv n \bmod k-1$$

holds for all $n \geq 0$, which imposes restrictions when $(k-1,m) > 1$.

3.1 Gelfond Problems

In his paper Gelfond also stated three open problems about the distribution of the sum of digits in residue classes along subsequences. These problems are nowadays known as Gelfond Problems (see [21] by Morgenbesser for more details about the Gelfond Problems):

1. If $k_1, k_2 \geq 2$ are co-prime integers and $\gcd(k_1-1,m_1) = \gcd(k_2-1,m_2) = 1$, then

$$|\{n < N : \mathrm{s}_{k_1}(n) \equiv \ell_1 \bmod m_1, \mathrm{s}_{k_2}(n) \equiv \ell_2 \bmod m_2\}| = \frac{N}{m_1 m_2} + O(N^{\lambda})$$

   holds for all ℓ_1, ℓ_2 and some $\lambda < 1$.

2. If $k \geq 2$ and $\gcd(k-1,m) = 1$, then

$$|\{p < N : p \in \mathbb{P} \wedge \mathrm{s}_k(p) \equiv \ell \bmod m\}| = \frac{\pi(N)}{m} + O(N^{\lambda})$$

   for all ℓ and some $\lambda < 1$. Here $\pi(x)$ denotes the number of primes $< x$.

3. If $k \geq 2$ and $\gcd(k-1,m) = 1$, then for each integer polynomial $P(x)$

$$|\{n < N : \mathrm{s}_k(P(n)) \equiv \ell \bmod m\}| = \frac{N}{m} + O(N^{\lambda})$$

   for all ℓ and some $\lambda < 1$.

In 1972, Bésineau was able to solve the first problem [2]. Kim was able to generalize this result to k-additive functions – i.e. functions which fulfill $f(ak^{\ell}+b) = f(a)+f(b)$ for $a \geq 1$, $\ell \geq 1, 0 \leq b < k^{\ell}$ – and was also able to formulate an explicit error term [14].

However, it took more than 20 years until any progress was made in this direction, although it was not on any of the posed problems. Instead, Mauduit and Rivat studied the subsequence along the Piatetski-Shapiro sequences, i.e. $\lfloor n^c \rfloor$ where $c > 1, c \notin \mathbb{Q}$, of k-multiplicative functions (a k-multiplicative function $f : \mathbb{N} \to \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ satisfies $f(ak^\ell + b) = f(ak^\ell) f(b)$ for nonnegative integers a, b, ℓ such that $b < k^\ell$). They obtained an asymptotic equi-distribution for $c < 4/3$. As the sequence $\left((-1)^{s_2(n)}\right)_{n\geq 0}$ [4] is 2-multiplicative, it follows in particular that the sub-sequence of the Thue-Morse sequence indexed by $\lfloor n^c \rfloor$ assumes each of the two values $0, 1$ with asymptotic frequency $\frac{1}{2}$, as long as $1 < c < 4/3$ [16].

It is classical to consider the subsequence along the Piatetski-Shapiro sequence of a given sequence instead of polynomial subsequences. One of the main advantages is that this subsequence is not as sparse as polynomials, especially for small values of c. For example, it is unknown whether there are infinitely many primes of the form $n^2 + 1$; therefore, it is of interest to consider primes of the form $\lfloor n^c \rfloor$ for $1 < c < 2$ and prove an asymptotic formula for the number of such primes. Piatetski-Shapiro [26] proved such a formula for $1 < c < 12/11$, and the currently best known bound is $1 < c < 2817/2426$ due to Rivat and Sargos [27].

Thereafter, it still took additional 15 years until the second and third problem were solved or came close to a solution. The second problem was finally solved by Mauduit and Rivat in 2010 [19]. In 2009, the third problem was solved for quadratic polynomials by Mauduit and Rivat [18]. Additionally, there is a solution by Drmota, Mauduit and Rivat [7] for k being a prime number that is sufficiently large with respect to the degree of $P(x)$. The treatment of exponential sums with Fourier-theoretic methods that has been developed by Mauduit and Rivat was a breakthrough in this field and opened the door for many similar results.

3.2 The method of Mauduit and Rivat

In this section we focus a bit more on the details involved in the aforementioned results, especially the ones by Mauduit and Rivat.

The starting point is usually that the following two statements are equivalent

$$\begin{gathered}\lim_{L\to\infty} \frac{\#\{\ell \leq L : b(n_\ell) \equiv 0 \bmod 2\}}{L} = \lim_{L\to\infty} \frac{\#\{\ell \leq L : b(n_\ell) \equiv 1 \bmod 2\}}{L} = \frac{1}{2}. \\ \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L} \sum_{\ell \leq L} (-1)^{b(n_\ell)} = 0.\end{gathered} \tag{4}$$

Thus, to determine the distribution of the Thue-Morse sequence along a subsequence $(n_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$, we often switch to show that the average of $(-1)^{s_2(n_\ell)}$ tends to zero instead.

[4] We note that $(-1)^{s_2(n)} = 2 * t(n) - 1$.

In [19] Mauduit and Rivat point out a certain property (which was later called "Carry property"), which asserts roughly speaking that the contribution of high and low digits can be separated. This can be illustrated for the Thue-Morse sequence. We find in particular

$$(-1)^{s_2(n)} = (-1)^{\sum_{j\geq 0}\varepsilon_j(n)} = (-1)^{\sum_{0\leq j\leq L}\varepsilon_j(n)} \cdot (-1)^{\sum_{j>L}\varepsilon_j(n)}.$$

Thus, one can separate the contribution of high and low digits of n. Mauduit and Rivat showed how this fact can be exploited to reduce the problem to some estimates of the discrete Fourier transform of $n \mapsto (-1)^{s_2(n)}$. By showing strong estimates for the L^1 and the L^∞ norm of the aforementioned Fourier transform, they were able to solve the second Gelfond Problem.

Their approach was further formalized and generalized in [20] (see also [13]), where the estimates on the L^1 norm were replaced by a so called "Fourier property" (uniform L^∞-bounds on the discrete Fourier transform). This was a very important step, as the estimates on the L^1 norm were especially good for the Thue-Morse sequence, so that there was no hope to use the original method for other automatic sequences, such as the Rudin-Shapiro sequence.

3.3 Subsequence along primes

The starting point is, as already mentioned, (4), which means that we aim to show

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi(N)} \sum_{p\leq N} (-1)^{s_2(p)} = 0,$$

where $\pi(N)$ denote the number of prime numbers smaller or equal to N. This is in turn equivalent to

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} \Lambda(n)(-1)^{s_2(n)} = 0,$$

where $\Lambda(n)$ denotes the von Mangoldt function.

Mauduit and Rivat proved in [19] among other results the following theorem.

Theorem 2. For every $k \geq 2$ and all $\alpha \in \mathbb{R}$ such that $\alpha(k-1) \notin \mathbb{Z}$ there exists $\sigma_k(\alpha) > 0$ such that

$$\left| \sum_{n\leq N} \Lambda(n) \mathrm{e}(\alpha s_k(n)) \right| \leq c_{k,\alpha} N^{1-\sigma_k(\alpha)}.$$

This shows in particular, that the Thue-Morse sequence is uniformly distributed along primes, i.e. it attains both possible values with asymptotic frequency $\frac{1}{2}$.[5]

[5] To obtain this corollary, it suffices to only consider $\alpha = \frac{1}{2}$.

As already mentioned above, Mauduit and Rivat already used among other ideas the Carry-Property and a particularly strong L^1-norm estimate for the Fourier-Transform, which is especially strong for the sum of digits function.

They later generalized and slightly altered their approach to achieve similar results under weaker assumptions, which are also fulfilled by the Rudin-Shapiro sequence in [20]. This constitutes a very important improvement. Mauduit and Rivat actually give explicit bounds that depend on the quality of the estimates for the Fourier Transform. We only present here a simplified version.

Theorem 3. Let $f : \mathbb{N} \to \mathbb{U}$ be a function satisfying the Carry-Property and the Fourier-Property. Then for any $\theta \in \mathbb{R}$ we have

$$\left| \sum_{n \leq N} \Lambda(n) f(n) \mathrm{e}(\theta n) \right| = o(N).$$

Moreover, we have for any $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\left| \sum_{n \leq N} \mu(n) f(n) \mathrm{e}(\theta n) \right| = o(N).$$

This result applies in particular to the Thue-Morse sequence and the Rudin-Shapiro sequence, or more precisely to $f_1(n) = 2 \cdot t(n) - 1, f_2(n) = r(n)$. They were, therefore, able to settle Sarnak's Conjecture for the Thue-Morse and the Rudin-Shapiro sequence.

3.4 Subsequence along squares

By using similar techniques, i.e. Van-der-Corput like inequalities and using the Carry-Property as well as L^1 and L^∞-norm estimates for the Fourier-Transform of $\mathrm{e}(\alpha s_k(n))$, Mauduit and Rivat were able to show the following result in [18].

Theorem 4. For every $k \geq 2$ and all $\alpha \in \mathbb{R}$ such that $\alpha(k-1) \notin \mathbb{Z}$ there exists $\sigma_k(\alpha) > 0$ such that

$$\left| \sum_{n \leq N} \mathrm{e}(\alpha s_k(n^2)) \right| \leq c_1(k) \left(1 + \frac{\log N}{\log k} \right)^{c_2(k)} N^{1-\sigma_k(\alpha)}.$$

In particular, this shows that the Thue-Morse sequence along squares attains both values with the same asymptotic frequency $\frac{1}{2}$. Recently, Mauduit and Rivat were also able to remove the need for a L^1-norm estimate. Thus, they were able to show the following theorem, where we only present a simplified version as for Theorem 3.

Theorem 5. Let $f : \mathbb{N} \to \mathbb{U}$ be a function satisfying the Carry-Property and the Fourier-Property. Then for any $\theta \in \mathbb{R}$ we have

$$\left| \sum_{n \leq N} f(n^2) \mathrm{e}(\theta n) \right| = o(N).$$

This result is also applicable to the Rudin-Shapiro sequence. Thus they were able to show that the Rudin-Shapiro sequence attains both possible values with asymptotic frequency $\frac{1}{2}$.

For the subsequence along squares one was actually able to push these results further and compute how often a given block appears within $(t(n^2))_{n \geq 2}$. This was achieved by Drmota, Mauduit and Rivat in [8].

Theorem 6. For any $\ell > 0$ and any $(b_0, \ldots, b_{\ell-1}) \in \{0,1\}^\ell$, we have

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\#\{n < N : t(n^2) = b_0, \ldots, t((n+\ell-1)^2) = b_{\ell-1}\}}{N} = \frac{1}{2^\ell},$$

i.e. $(t(n^2))_{n \in \mathbb{N}}$ is a normal sequence.

They used again the Carry-Property, but the Fourier-Property needed to be replaced with two much more involved properties.

This is once again interesting as we started with a sequence that has very low subword-complexity and we take a subsequence along an arithmetically very easy sequence and the result suddenly shows random properties.

This result was later generalized by the author in [24] to so-called digital or strongly block-additive sequences instead of $s_2(n)$. This covers all functions that count the number of times a certain subword appears in the base k expansion of n modulo m and in particular the Rudin-Shapiro sequence.

3.5 Subsequence along $\lfloor n^c \rfloor$

We start by discussing the first paper by Mauduit and Rivat on k-multiplicative functions, which treats subsequences along $\lfloor n^c \rfloor$ for $1 < c < 4/3$, [16]. They already used many methods that are also playing important roles for the other problems. For example, they used exponential sums, a Van-der-Corput inequality and they also exploited in some sense a carry property that naturally follows for k-multiplicative functions. However, they do not use directly properties of the Fourier-Transforms, but used for example summation by parts as a main tool, that is in later results replaced by different methods.

In a series of papers [16, 17, 29, 25, 30] the range for c was extended to $1 < c < 2$ and we want to go into a bit more details for the two most recent ones. Spiegelhofer and the author show in [25] that $(t(\lfloor n^c \rfloor))_{n \geq 0}$ is a normal sequence for

$1 < c < 3/2$. This is particularly interesting as it is an instance of starting with a highly deterministic sequence, taking an arithmetically "easy" subsequence, which results in a normal sequence. We will shortly describe the methods used: First one approximates $\lfloor n^c \rfloor$ by a Beatty sequence $\lfloor n\alpha + \beta \rfloor$ and, thus, reduce the problem to a linear one. This was already used by Spiegelhofer in [29] and replaces the summation by parts argument used by Mauduit and Rivat. Finally, some quite technical estimates for special expressions involving the Fourier-Transforms of the Thue-Morse sequence are necessary to obtain the result.

In the latest article, Spiegelhofer was able to finally extend the range to $1 < c < 2$ for showing uniform distribution of $(t(\lfloor n^c \rfloor))_{n \geq 0}$. The main improvement was to find a way to effectively use the Van-der-Corput inequality multiple times. This also results in needing estimates for the Gowers-norm of the Thue-Morse sequence instead of estimates for the Fourier-Transforms.[6] However, they turn out to be highly related for k-multiplicative sequences via a result by Fan and Konieczny [10]. Finally, we would like to mention that this approach seems very promising to show normality of $(t(\lfloor n^c \rfloor))_{n \geq 0}$ for the full range $1 < c < 2$.

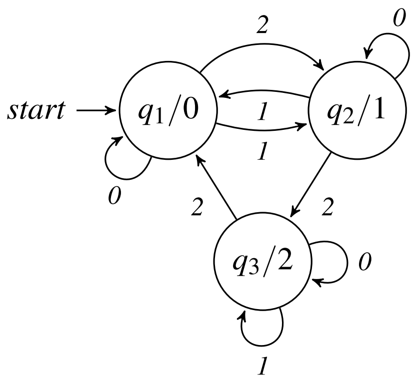
4 Invertible automatic sequences

The results from the previous section are very impressive and especially important as they developed a new method to solve problems concerning questions about the digital expansion of integers. However, these results cover so far almost exclusively questions concerning the sum of digits function or the Rudin-Shapiro sequence. In this section, we discuss how the developed methods can be used to deal with a whole class of automatic sequences, namely invertible automatic sequences.

First we want to give another description for the transition function of automatic sequences in terms of matrices. We assume without loss of generality that our states are labeled $q_1, \ldots, q_s$. Now we encode the transition by $0 \leq i \leq k-1$, i.e. $\delta(., i)$ by a matrix M_i: The entry at position (j_1, j_2) is 1, if $\delta(q_{j_2}, i) = q_{j_1}$, and 0, otherwise.

Example 3. *We consider the automaton given by the following transition diagram.*

[6] The Gowers-norm can be seen as a higher-order Fourier-analysis and generalizes in particular the discrete Fourier-Transform discussed above.



The corresponding transition matrices are

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

We find that $\delta(q_{j_1}, i) = q_{j_2}$, if and only if $M_i \cdot e_{j_2} = e_{j_1}$. Moreover, a simple inductive proof shows that for any word $w = w_1 \dots w_\ell$ we have that $\delta(q_{j_1}, w) = q_{j_2}$, if and only if $M_w \cdot e_{j_2} := (M_{w_\ell} \cdot \ldots \cdot M_{w_1}) \cdot e_{j_2} = e_{j_1}$. Thus, we are equivalently interested in studying $M_{(n)_k^{rev}}$ as $a(n)$. We note that in general $\{M_{(n)_k^{rev}} : n \in \mathbb{N}\}$ is a semi-group, as these matrices can be singular. This leads us to the definition of invertible automatic sequences.

Definition 4. *We call an automaton (the corresponding automatic sequence) invertible, if all the transition matrices are invertible, and M_0 is the identity matrix. In this case the transition matrices are permutation matrices and $\{M_{(n)_k^{rev}} : n \in \mathbb{N}\}$ is a group.*

The most prominent example of an invertible automatic sequence is the Thue-Morse sequence.

We note that in the previous section we were mostly interested in showing that $t(n_\ell)$ was uniformly distributed within the group $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. This was achieved by considering the only non-trivial unitary and irreducible representation of the group which maps $0 \mapsto 1, 1 \mapsto -1$. In the current setting, we aim to show that $M_{(n_\ell)_k^{rev}}$ is uniformly distributed within a general finite group. The standard method to study the distribution within a group, is to study representations $D : G \to U_{d\times d}$ which are homomorphisms from G to the set of unitary $d \times d$ matrices. This is one explanation, why we were interested in studying (4).

Thus we are interested in studying

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L} \sum_{\ell \leq L} D(M_{(n_\ell)_k^{rev}}).$$

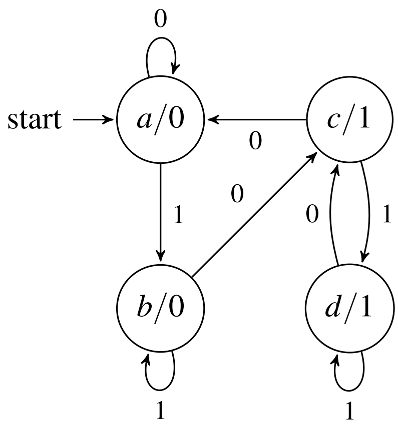
This connection was already developed and used by Drmota and Morgenbesser to study invertible automatic sequence along squares [9]. They used the methods developed by Mauduit and Rivat, i.e. Carry-Property and Fourier-Property, but needed to adapt the framework to be able to deal with matrix-valued functions instead of complex-valued ones. This causes some technical problems, as matrices don't commute, but they were able to solve them in this case. Naturally this method also solves Sarnak's Conjecture for invertible automatic sequences.

Later Drmota also sketched in [6] how the framework of Mauduit and Rivat for primes can be used for invertible automatic sequences.

5 Synchronizing automatic sequences

So far we have mainly focused on invertible automatic sequence and methods to study their distribution along subsequences. In particular one can encounter the remarkable situation where this produces a pseudo-random sequence. The distinguishing fact about invertible automata is that for any word w one can reverse the transition $\delta(., w)$.

In this section we discuss the completely opposite situation, i.e. if there exists a word w_0 such that all information is lost when applying $\delta(., w_0)$, i.e. $\delta(q, w_0) = q'$ for all $q \in Q$. Such a word is called a synchronizing word and the corresponding automatic sequence is called a synchronizing automatic sequence. One of the most prominent examples of a synchronizing automatic sequence is the paper-folding sequence. The corresponding transition diagram is given below



We see that 00 is a synchronizing word. This implies immediately that if $n \equiv 0 \bmod 4$, then $(n)_2$ ends with 00 and, therefore, $\delta(a, (n)_2) = a$ and $a(n) = 0$. Moreover, any word that contains a synchronizing word is itself synchronizing. Thus, most long enough words are synchronizing.

This implies that any synchronizing automatic sequence $(a(n))_{n\geq 0}$ can be uniformly approximated by periodic functions, i.e. for every $\varepsilon > 0$ there exists a periodic function f_ε such that

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{M\in\mathbb{N}} \frac{\#\{M \le n < M+N : a(n) \neq f_\varepsilon(n)\}}{N} \le \varepsilon.$$

Now the main idea is to approximate $a(n_\ell)$ by these periodic functions $f_\varepsilon(n_\ell)$. Therefore, we need that n_ℓ distributes not too erratic modulo k^λ. In particular, one finds that distributional results for the $n_\ell \bmod m$ imply distributional results for synchronizing automatic sequence along $(n_\ell)_{\ell\ge 0}$.

This method was used by Deshouillers, Drmota and the author in [4] to study the subsequence along primes and any integer valued polynomial. More precisely they showed that the frequency along any of these subsequences exists. Naturally this would also work for the subsequence along $\lfloor n^c \rfloor$ for any $c \ge 1$. Moreover, they also showed Sarnak's Conjecture for any synchronizing automatic sequence.

We prove now that any synchronizing automatic sequence along squares is deterministic. We start by stating the following lemma, which will also appear in more detail in an upcoming paper by Adamczewski, Drmota and the author.

Lemma 1. *Let $a(n)$ be a synchronizing k-automatic sequence. Then*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\#\{0 \le n < k^\lambda : (n^2 \bmod k^\lambda)_k \text{ is synchronizing}\}}{k^\lambda} = 1.$$

Proof. This follows directly from the fact that any word containing a synchronizing word is itself synchronizing combined with Hensel's lifting Lemma. □

Proposition 1. *Let $a(n)$ be a synchronizing k-automatic sequence. Then $(a(n^2))_{n\in\mathbb{N}}$ is a deterministic sequence.*

Proof. Let us fix any $\varepsilon > 0$ and take λ large enough, such that

$$\frac{\#\{0 \le n < k^\lambda : (n^2 \bmod k^\lambda)_k \text{ is synchronizing}\}}{k^\lambda} \ge 1 - \varepsilon.$$

We start by counting different blocks of the form

$$(a((nk^\lambda)^2), (a(nk^\lambda+1)^2), \ldots, a((nk^\lambda+k^\lambda-1)^2)).$$

If $(i^2 \bmod k^\lambda)_k$ is synchronizing, then $a((nk^\lambda+i)^2) = a(i^2)$ for all $n \in \mathbb{N}$. Otherwise, there are at most $|\Delta|$ different values that $a((nk^\lambda+i)^2)$ can take, as $a(n)$ takes values in Δ. Thus, there are at most $|\Delta|^{\varepsilon k^\lambda}$ different such blocks.

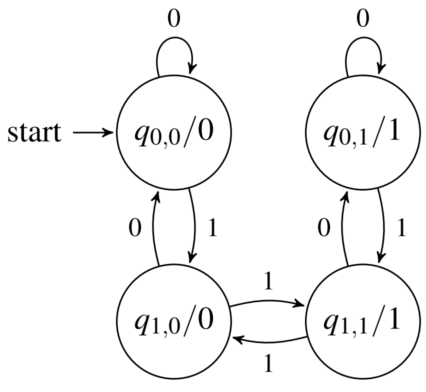
Now consider a subword of length L, i.e. $(a(n_0^2), a((n_0+1)^2), \ldots, a((n_0+L-1)^2))$. Any such subword can be covered by at most $\left\lfloor \frac{L}{k^\lambda} \right\rfloor + 2$ of the blocks, which we discussed above. Furthermore, we need to account for different possible starting positions, i.e. $n_0 \bmod k^\lambda$. Thus, we have in total at most $k^\lambda \cdot |\Delta|^{\varepsilon k^\lambda \cdot (\lfloor L/k^\lambda \rfloor + 2)} \leq k^{4\lambda} |\Delta|^{\varepsilon L}$ different subwords of length L. As $\varepsilon > 0$ was arbitrary, this shows that the subword complexity of $(a(n^2))_{n\in\mathbb{N}}$ grows subexponentially, i.e. $(a(n^2))_{n\in\mathbb{N}}$ is deterministic. $\square$

We would also expect a similar result along the subsequence $\lfloor n^c \rfloor$. However, this was so far only done for periodic sequences by Deshouillers, Drmota, the author and Spiegelhofer in [5].

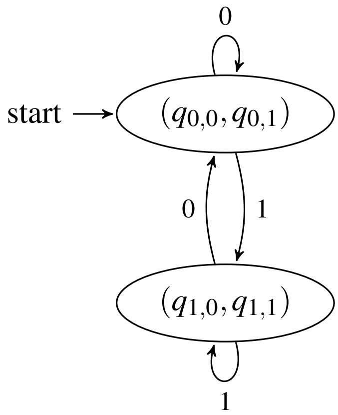
In conclusion we have a completely different situation for synchronizing automatic sequences compared to the invertible automatic sequences along squares and most likely also along $\lfloor n^c \rfloor$. Showing any distributional result along any of the mentioned subsequences is very easy as it just reduces to studying the distribution of the subsequence $\bmod m$. Moreover, we also do not find any pseudo-random properties compared to the invertible case.

6 Combining invertible and synchronizing aspects

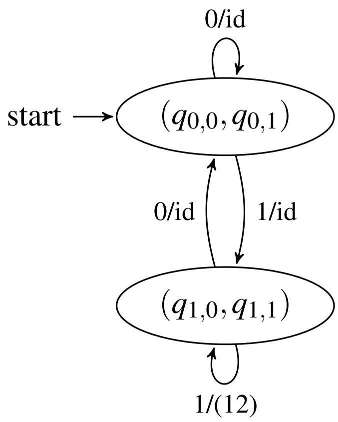
So far we have mainly studied two very different kinds of automatic sequences, namely invertible and synchronizing automatic sequences. However, many automatic sequences don't belong to one of the two categories and one of the most prominent example is the Rudin-Shapiro sequence. We display the transition diagram below.



One sees immediately, that this automaton is not invertible, but it still has some symmetry to it. We note that exchanging $q_{0,0}$ with $q_{0,1}$ and at the same time $q_{1,0}$ with $q_{1,1}$ does not change the automaton. This already shows, that it can not be synchronizing. So it is somewhere in between these two classes of automatic sequences. The aforementioned symmetry allows us to combine the two states $q_{0,0}, q_{0,1}$ into one new state $(q_{0,0}, q_{0,1})$ and the two states $q_{1,0}, q_{1,1}$ into one new state $(q_{1,0}, q_{1,1})$ and still have an automaton which is distinguished by an apostrophe (we do not specify the output function):



This new automaton is now synchronizing, but we have obviously lost some information about the transitions. Furthermore, we see that for any state $(q_{j,0}, q_{j,1})$ and $0 \leq i < 2$ that $(\delta(q_{j,0}, i), \delta(q_{j,1}, i))$ is either again a state of this new automaton or a permutation of one. We find for example for $j = 1, i = 1$ that $(\delta(q_{1,0}, 1), \delta(q_{1,1}, 1)) = (q_{1,1}, q_{1,0})$, so that this is the state $(q_{1,0}, q_{1,1})$ where the two states are exchange, i.e. we apply the permutation (12)[7] to it. Therefore, we associate to the transition $\delta'((q_{1,0}, q_{1,1}), 1) = (q_{1,0}, q_{1,1})$ the permutation (12). We can do this for all transitions and, thus, define a function $\lambda : Q' \times \{0, 1\} \to S_2$ which associates to each transition in the new automaton a permutation. We display this as follows.



This new structure is called a group extension of an automaton.[8] This particular

[7] We use the cycle notation for permutations.

[8] This structure was originally called (naturally induced) transducer in [23], but this changed recently to group extension of an automaton, see for example [3]. One main motivation for the new name is the fact that this construction corresponds to a group extension for the related dynamical systems, as was shown in [15].

one contains all the information of the original automaton, and thus, we are able to reconstruct the original automatic sequence. First we take a word $w = w_1 \dots w_\ell$ and a state $q_{i,j} \in Q$. Let us now consider the transition in the original automaton and compare it with the transition in the new automaton. First we find a state in the new automaton that contains $q_{i,j}$, i.e. $(q_{i,0}, q_{i,1})$. We consider now the transition $\delta'((q_{i,0}, q_{i,1}), w)$ and find directly that it has to be a permutation of $(\delta(q_{i,0}, w), \delta(q_{i,1}, w))$. Furthermore, this permutation is computable when knowing the corresponding permutations for each individual transition. We recall that for the invertible case we were only interested in the product of the transition matrices, and similarly we are here only interested in the concatenation of the permutations associated to the individual transitions.

We denote by

$$T(q', w_1 \dots w_r) := \lambda(q', w_1) \circ \lambda(\delta'(q', w_1), w_2) \circ \dots \\ \circ \lambda(\delta'(q', w_1 \dots w_{r-1}), w_r).$$

It is not very hard to see that we can actually express the transition in the original automaton in this new structure. We find that there exists some f such that

$$\delta(q_0, \mathbf{w}) = f(T(q_0', \mathbf{w}), \delta'(q_0', \mathbf{w}))$$

holds for all $\mathbf{w} \in \Sigma^*$.

Thus, we were able to reformulate the problem to studying a group extension of a synchronizing automaton, which gives us a description combining a synchronizing automatic sequence and $T(n) = T(q_0', (n)_k)$, which takes values in a group.

It turns out that we can write any automatic sequence produced by a primitive automaton as the output of a group extension of a synchronizing automaton.

Theorem 7 (Proposition 2.2 + Proposition 2.5 in [23])**.** Let $a(n)$ be an automatic sequence produced by a primitive automaton. Then, there exists a group extension of a synchronizing automaton and a function f such that

$$a(n) = f(T(n), s(n)),$$

where $T(n)$ is defined as above and $s(n)$ is a synchronizing automatic sequence.

One might hope that $T(n)$ is an invertible automatic sequence, which is not true in general. Nonetheless, we are interested in distributional results of $(T(n))_{n\geq 0}$ and switch once again to working with $(D(T(n)))_{n\geq 0}$, where D is a unitary and irreducible representation. It turns out that $(D(T(n))_{n\geq 0}$ shares many properties with invertible automatic sequences, or more specifically $(D(M_{(n)_k^{rev}}))_{n\geq 0}$. In particular it satisfies a weak Carry-Property and a Fourier-Property (except for very special representations). However, the proof for the Fourier-Property is much more involved than in the invertible case.

These were the key ingredients to show the following result.

Theorem 8 (Theorem 1.3 in [23])**.** Let $a(n)$ be a primitive automatic sequence. Then the frequency of any letter exists for the subsequence along primes and it can be computed.

Proof. The proof of this theorem is rather long and complicated, but we try to give a rough outline of important steps. First we rewrite $a(n) = f(T(n), s(n))$ via Theorem 7. Next we approximate the synchronizing automatic sequence $s(n)$ by a periodic sequence with period k^{λ}. This means, that we consider individually the primes that lie in a specific residue class modulo k^{λ}. For most of these residue classes we have that $s(n)$ is constant. Thus, we are left with dealing with $f'(T(n))$ along primes in a given residue class. Now we can apply a modified version of Theorem 3, to show a limiting distribution of $T(n)$ along primes in a given residue class. The result now follows by taking the limit for $\lambda \to \infty$. □

In an almost analogous way, the author was able to resolve in the same paper Sarnak's Conjecture for all automatic sequences.

Theorem 9 (Theorem 1.2 in [23])**.** Let $a(n)$ be a complex-valued automatic sequence. Then it is orthogonal to the Möbius function in the sense of (2), i.e. it fulfills Sarnak's Conjecture.

We note that this strategy seems to be a very promising approach to also study other subsequences of automatic sequence. For example the subsequence of automatic sequences along squares will be studied this way by Adamczewski, Drmota and the author in an upcoming paper.

References

[1] J.-P. Allouche and J. Shallit. *Automatic Sequences. Theory, Applications, Generalizations.* Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

[2] J. Bésineau. Indépendance statistique d'ensembles liés à la fonction "somme des chiffres". *Acta Arith.*, 20:401–416, 1972.

[3] J. Byszewski, J. Konieczny, and C. Müllner. Gowers norms for automatic sequences arXiv:2002.09509, Feb 2020.

[4] J.-M. Deshouillers, M. Drmota, and C. Müllner. Automatic Sequences generated by synchronizing automata fulfill the Sarnak conjecture. *Studia Mathematica*, 231:83–95, 2015.

[5] J.-M. Deshouillers, M. Drmota, C. Müllner, and L. Spiegelhofer. Randomness and non-randomness properties of Piatetski-Shapiro sequences modulo m. arXiv:1812.03036, Dec 2018.

[6] M. Drmota. Subsequences of automatic sequences and uniform distribution. In *Uniform Distribution and Quasi-Monte Carlo methods*, volume 15 of *Radon Series on Computational and Applied Mathematics*, pages 87–104. De Gruyter, Berlin, 2014.

[7] M. Drmota, C. Mauduit, and J. Rivat. The sum-of-digits function of polynomial sequences. *J. Lond. Math. Soc.*, 84(1):81–102, 2011.
[8] M. Drmota, C. Mauduit, and J. Rivat. Normality along squares. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 21(2):507–548, 2019.
[9] M. Drmota and J. F. Morgenbesser. Generalized Thue-Morse sequences of squares. *Israel J. Math.*, 190:157–193, 2012.
[10] A. Fan and J. Konieczny. On uniformity of q-multiplicative sequences. arXiv:1806.04267, Jun 2018.
[11] S. Ferenczi, J. Kułaga-Przymus, and M. Lemańczyk. Sarnak's conjecture: What's new. *Ergodic Theory and Dynamical Systems in their Interactions with Arithmetics and Combinatorics*, Jan. 2018.
[12] N. Frantzikinakis and B. Host. The logarithmic sarnak conjecture for ergodic weights. *Annals of Mathematics*, 187(3):869–931, 2018.
[13] G. Hanna. Sur les occurrences des mots dans les nombres premiers. *Acta Arith.*, 178(1):15–42, 2017.
[14] D.-H. Kim. On the joint distribution of q-additive functions in residue classes. *J. Number Theory*, 74(2):307–336, 1999.
[15] M. Lemańczyk and C. Müllner. Automatic sequences are orthogonal to aperiodic multiplicative functions. arXiv:1811.00594, Nov 2018.
[16] C. Mauduit and J. Rivat. Répartition des fonctions q-multiplicatives dans la suite $([n^c])_{n\in\mathbf{N}}$, $c > 1$. *Acta Arith.*, 71(2):171–179, 1995.
[17] C. Mauduit and J. Rivat. Propriétés q-multiplicatives de la suite $\lfloor n^c \rfloor$, $c > 1$. *Acta Arith.*, 118(2):187–203, 2005.
[18] C. Mauduit and J. Rivat. La somme des chiffres des carrés. *Acta Math.*, 203(1):107–148, 2009.
[19] C. Mauduit and J. Rivat. Sur un problème de Gelfond: la somme des chiffres des nombres premiers. *Ann. of Math. (2)*, 171(3):1591–1646, 2010.
[20] C. Mauduit and J. Rivat. Prime numbers along Rudin-Shapiro sequences. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 17(10):2595–2642, 2015.
[21] J. Morgenbesser. Gelfond's sum of digits problems. 2008.
[22] H. M. Morse. Recurrent geodesics on a surface of negative curvature. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 22(1):84–100, 1921.
[23] C. Müllner. Automatic sequences fulfill the Sarnak conjecture. *Duke Math. J.*, 166(17):3219–3290, 2017.
[24] C. Müllner. The Rudin-Shapiro sequence and similar sequences are normal along squares. *Canad. J. Math.*, 70(5):1096–1129, 2018.
[25] C. Müllner and L. Spiegelhofer. Normality of the Thue–Morse sequence along Piatetski-Shapiro sequences, II. arxiv:1511.01671, Nov. 2015.
[26] I. I. Piatetski-Shapiro. On the distribution of prime numbers in sequences of the form $[f(n)]$. *Mat. Sbornik N.S.*, 33(75):559–566, 1953.
[27] J. Rivat and P. Sargos. Nombres premiers de la forme $\lfloor n^c \rfloor$. *Canad. J. Math.*, 53(2):414–433, 2001.
[28] P. Sarnak. Three lectures on the Mobius function randomness and dynamics. https://www.math.ias.edu/files/wam/2011/PSMobius.pdf, 2011.
[29] L. Spiegelhofer. Normality of the Thue-Morse sequence along Piatetski-Shapiro

sequences. *Q. J. Math.*, 66(4):1127–1138, 2015.

[30] L. Spiegelhofer. The level of distribution of the Thue–Morse sequence. arXiv:1803.01689, Mar 2018.

[31] T. Tao. The logarithmically averaged Chowla and Elliott conjectures for two-point correlations. In *Forum of Mathematics, Pi*, volume 4. Cambridge University Press, 2016.

[32] T. Tao and J. Teräväinen. Odd order cases of the logarithmically averaged Chowla conjecture. *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, 30(3):997–1015, 2018.

[33] A. Thue. *Selected mathematical papers*. Universitetsforlaget, Oslo, 1977. With an introduction by Carl Ludwig Siegel and a biography by Viggo Brun, Edited by Trygve Nagell, Atle Selberg, Sigmund Selberg, and Knut Thalberg.

Authors' address:
Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie, TU Wien
Wiedner Hauptstraße 8-10
A-1040 Vienna
email clemens.muellner@tuwien.ac.at

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 243 (2020), 21–42

Density theorems for sampling

José Luis Romero
Universität Wien und Österreichische Akademie der Wissenschaften

A density theorem gives necessary or sufficient conditions to reconstruct a function in a given class from samples taken on a set of points. The conditions are formulated in terms of a notion of density. In this expository article, I present my recent work[1] *on density theorems and provide context.*

1 Sampling bandlimited functions

1.1 Classical theory

Classical sampling theory concerns *bandlimited functions*, that is, square integrable functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, whose Fourier transform

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx, \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

is supported on a given finite interval $[-B/2, B/2]$. The space of all such functions is called the *Paley-Wiener space*

$$\mathrm{PW}_B(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \mathrm{supp}(\hat{f}) \subseteq [-B/2, B/2]\},$$

and is also denoted by PW_B for short. The parameter B, called *bandwidth*, limits the oscillation or variability of the functions in PW_B. For example, the *cardinal sine*

$$\mathrm{sinc}_B(x) = \frac{\sin(\pi B x)}{\pi x}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

[1] J. L. R. gratefully acknowledges support from the Austrian Science Fund (FWF):P 29462-N35. Some of the research lines presented here will be further developed as part of the START project "Time-Frequency Analysis, Randomness, and Sampling" of the Austrian Science Fund (FWF): Y 1199.

ISSN 0020-7926

belongs to PW_B, because it is the Fourier transform of the indicator function $1_{[-B/2,B/2]}$.

Intuitively, a function f with bandwidth B varies only mildly at scales smaller than $1/B$, and, thus, a subset of its values $\{f(x_k) : k \in \mathbb{Z}\}$ taken on an increasing sequence $x_k < x_{k+1}$ should encode all the essential information of f, provided that $|x_k - x_{k+1}| < B$. To investigate this claim, let $f \in \mathrm{PW}_1$ have unit bandwidth. The function $\hat{f}$ can then be expanded into Fourier series:

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle \hat{f}, e^{-2\pi ik\cdot} \right\rangle_{L^2} e^{-2\pi ik\xi} 1_{[-1/2,1/2]}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

By the Fourier inversion formula, $\langle \hat{f}, e^{-2\pi ik\cdot} \rangle = f(k)$. Computing the inverse Fourier transform on both sides of (6) one obtains *Shannon's sampling formula*:

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) \frac{\sin(\pi(x-k))}{\pi(x-k)}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

where the series converges in $L^2(\mathbb{R})$. Moreover, since all the applied transformations are isometric, we conclude that the energy of a bandlimited function f is exactly carried by its samples:

$$\|f\|_2 = \|f_{|\mathbb{Z}}\|_2, \qquad f \in PW_1(\mathbb{R}).$$

A minor refinement of the above computations yields the following.

Theorem 1 (Shannon's sampling theorem, 1949)**.** Let $\eta, B > 0$. Then

$$\|f\|_2^2 \asymp \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(\eta k)|^2 \quad (f \in \mathrm{PW}_B) \qquad \Leftrightarrow \qquad B\eta \leq 1. \tag{8}$$

The symbol $\asymp$ in (8) means that the ratio between the two quantities is bounded above and below for all (non-zero) $f \in \mathrm{PW}_B$, while one quantity is zero, if and only if the other is. The implied constants may depend on η and β, but not on f. The *sampling estimate* (8) implies that each function $f \in \mathrm{PW}_B$ is determined by its equispaced samples $f(\eta k)$, and, moreover, that the sampling operation is stable in the sense that small perturbations of f translate into small perturbations of $f(\eta k)$, and vice versa. For $B\eta \leq 1$ a concrete reconstruction formula can by obtained from (7) by dilation.

Though mathematically straightforward, Shannon's sampling theorem is a foundational result in signal analysis and information theory. It validates the notion of bandwidth as a measure of information, by showing that it determines the *critical sampling rate* at which a signal can be acquired, also known as the *Nyquist rate*. While Shannon's work was pioneering in recognizing its importance in information theory [35], Theorem 1 is also attributed to Kotelnikov (1933); Whittaker (1929) and Gabor (1946) [38], and, indeed, Shannon describes Theorem 1 as "common knowledge in the communication art".

A far reaching generalization of Shannon's sampling theorem was developed in the 1950s by Beurling [7, 8], and Duffin and Schaeffer [11]. Instead of sampling on lattices $\eta\mathbb{Z}$, the results now apply to *separated sets* $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$, that is,

$$\inf\left\{\left|\lambda-\lambda'\right| : \lambda,\lambda' \in \Lambda, \lambda \neq \lambda'\right\} > 0.$$

The key notion is Beurling's *lower density*:

$$D^{-}(\Lambda) := \liminf_{R\to+\infty} \inf_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{R} \#\Big(\Lambda \cap [x-R/2, x+R/2]\Big).$$

This simple geometric quantity delivers an almost characterization of the possibility of stably recovering a bandlimited function from its samples.

Theorem 2 (Beurling, Duffin-Schaeffer, 1950s)**.** Each of the following implications holds for each separated set $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$:

$$\tfrac{1}{B}D^{-}(\Lambda) > 1 \quad \Rightarrow \quad \|f\|_2^2 \asymp \sum_{\lambda\in\Lambda} |f(\lambda)|^2 \quad (f \in \mathrm{PW}_B) \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{B}D^{-}(\Lambda) \geq 1. \tag{9}$$

Theorem 2 is known as *the sampling density theorem*, and is a landmark result in signal processing, as it further supports the interpretation of the bandwidth B as the information content of the class of bandlimited signals. A salient aspect of Theorem 2 is that it captures long-range effects: the density condition $D^{-}(\Lambda) > B$ can hold even if Λ has large gaps, provided that these are compensated by high-density clusters of points. Theorem 2 is also often invoked, beyond its formal scope, as heuristic support for many irregular sampling practices in engineering.

While Theorem 2 provides an almost characterization of the sampling estimate, the critical case $D^{-}(\Lambda) = B$ is left undecided. In this case, the sampling estimate may or may not hold. Indeed, as a consequence of Theorem (1), the set $\Lambda = \frac{1}{B}\mathbb{Z}$, which has density $D^{-}(\Lambda) = B$, does provide a sampling inequality for PW_B, while the subset $\Lambda' = \frac{1}{B}\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, which also has density $D^{-}(\Lambda') = B$, does not, because $\mathrm{sinc}_B \in \mathrm{PW}_B$ vanishes on Λ'. A complete, albeit not simple, characterization of the validity of the sampling estimate for bandlimited functions was given by Ortega-Cerdà and Seip [28].

While Theorem 1 follows from elementary Fourier analysis, the main tool behind Theorem 2 is complex analysis, as the Paley-Wiener Theorem implies that every function $f \in \mathrm{PW}_1$ admits an analytic extension:

$$f(z) := \int_{-B/2}^{B/2} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i z\xi} d\xi, \qquad z \in \mathbb{C},$$

enjoying the growth-estimate

$$|f(x+iy)| \leq Ce^{\pi B|y|},$$

for a constant $C > 0$, that depends on f [39, Theorem 2.18].

1.2 More general spectra

As a generalization of the Paley-Wiener spaces, we consider an arbitrary compact set $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, called *spectrum*, set

$$\mathrm{PW}_\Omega(\mathbb{R}) := \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \operatorname{supp}(\hat{f}) \subseteq \Omega\},$$

and write PW_Ω for short. Motivated by Theorem 2, we investigate for which sets $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ the sampling estimate

$$\|f\|_2^2 \asymp \sum_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)|^2, \qquad (f \in \mathrm{PW}_\Omega) \tag{10}$$

holds. Since the classical Paley-Wiener space PW_B corresponds to an interval $\Omega = [-B/2, B/2]$, the expectation is, that, for more general sets, the Lebesgue measure $B = |\Omega|$ should play the role of the bandwidth parameter in a density theorem analogous to Theorem 2.

Let us consider the following example: let $\Omega = [0,1/4] \cup [1,5/4]$, $\Lambda = \mathbb{Z}$, $f_1 \in \mathrm{PW}_{[0,1/4]}$ any non-zero function, and $f_2(x) := e^{2\pi ix} f_1(x)$. Then $f_2 \in \mathrm{PW}_{[1,5/4]}$, and, thus f_1 and f_2 are two different elements of PW_Ω for which $f_1 \equiv f_2$ on Λ. Hence, (10) fails even though $D^-(\Lambda) = 1 > 1/2 = |\Omega|$. On the other hand, based on the uncertainty principle, Beurling conjectured that $D^-(\Lambda) \geq |\Omega|$ should still be necessary for (10).

When Ω is the union of several disjoint intervals, functions in PW_Ω are known as *multi-band signals*. Originally posed out of mere mathematical curiosity, Beurling's question was to become relevant in telecommunications, as, in certain situations, one may only be able to transmit across a set of non-contiguous frequency bands. The question therefore arises, what is the capacity of such channels and which concrete sampling strategies achieve it.

Beurling's problem was solved by Landau, and published in two influential articles with similar content, one addressed to the mathematical [19] and the other to the engineering community [20].

Theorem 3 (Landau, 1967)**.** Let $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ be compact. Then the following implication holds for each set $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$:

$$\|f\|_2^2 \asymp \sum_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)|^2 \quad (f \in \mathrm{PW}_\Omega) \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{|\Omega|} D^-(\Lambda) \geq 1.$$

Under the assumption that (10) holds, to prove Theorem 3, the core task is to compare $\#\big(\Lambda \cap [a,b]\big)$ to $(b-a)$ up to errors of smaller order $o(b-a)$. Landau found a valid comparison point in the spectral profile of the following integral operator, known as the *concentration or Toeplitz operator*:

$$T_{[a,b]} f = \mathcal{F}^{-1}\left(1_\Omega \cdot \mathcal{F}\left(f \cdot 1_{[a,b]}\right)\right), \qquad f \in \mathrm{PW}_\Omega(\mathbb{R}),$$

where $\mathcal{F}$ denotes the Fourier transform and 1_E is the indicator function of E. Indeed, the eigenvalue counting function of $T_{[a,b]}$ satisfies

$$\#\big(\Lambda \cap [a,b]\big) \geq \#\{\mu \in \sigma(T_{[a,b]}) : \mu > 1/2\} \quad \geq (b-a) \quad (\bmod\, o(b-a)).$$

Landau's technique is so general and powerful that is has been distilled and adapted to many other function classes [4, 12].

While Theorem 3 generalizes the necessity of the density conditions for sampling in Theorem 2, it remains to be discussed how to produce sets Λ satisfying (10). Since Ω is compact, we can select $B > 0$ such that $\Omega \subseteq [-B/2, B/2]$, and then select any separated set Λ with density $D^-(\Lambda) > B$. So chosen, the set Λ satisfies (10) because, by Theorem 1, the sampling inequality holds in the larger space PW_B. The more challenging question is to produce sampling sets Λ with density close to the limit value prescribed by Theorem 3. For specific, practically relevant, spectra Ω, there is a significant literature on constructions of sampling sets tailored to specific spectra Ω. For general spectra, the following follows from more precise results of Lyubarskiĭ and Seip [21, 23].

Theorem 4 (after Lyubarskiĭ and Seip, 1997)**.** Let $\Omega \subset \mathbb{R}$ be compact, and $\varepsilon > 0$. Then there exists a separated set $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ satisfying the sampling estimates (10) and

$$\tfrac{1}{|\Omega|} D^-(\Lambda) \leq 1 + \varepsilon.$$

While Theorem 4 guarantees the existence of sampling sets for specific spectra Ω, a remarkable result from Olevskii and Ulanovskii provides *universal sampling sets* [25].

Theorem 5 (Olevskii and Ulanovskii, 2008)**.** There exists a separated set $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ such that the following implications hold for every compact set $\Omega \subseteq \mathbb{R}$:

$$\tfrac{1}{|\Omega|} D^-(\Lambda) > 1 \quad \Rightarrow \quad \|f\|_2^2 \asymp \sum_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)|^2 \quad (f \in \mathrm{PW}_\Omega) \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{|\Omega|} D^-(\Lambda) \geq 1. \tag{11}$$

Theorem 5 looks deceivingly similar to Theorem 2.[2] The difference lies however in the quantifiers: while the implications (9) apply to any set Λ, (11) applies to any compact set Ω, and one specific set Λ. As shown by Olevskii and Ulanovskii, a universal sampling set Λ can be constructed as a suitably small perturbation of a lattice [25].

Another construction of universal sampling sets is provided by Matei and Meyer [24]. The ingredients are:

[2] And, indeed, the unusual wording of most theorems in this article is meant to stress such similarities.

(a) a lattice $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ in general position, in the sense that the projections onto the first and second coordinates are injective maps with dense image when restricted to Λ;
(b) an interval $I \subseteq \mathbb{R}$.
The *simple quasicrystal* associated with Γ and I is defined as

$$\Lambda = \{x : (x, y) \in \Gamma, y \in I\}$$

and has density

$$D^-(\Lambda) = |I|/\mathrm{vol}(\Gamma).$$

The following density theorem holds for simple quasicrystals.

Theorem 6 (Matei-Meyer, 2010)**.** The following implications hold for every compact set $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ and every simple quasicrystal Λ:

$$\tfrac{1}{|\Omega|} D^-(\Lambda) > 1 \quad \Rightarrow \quad \|f\|_2^2 \asymp \sum_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)|^2 \quad (f \in \mathrm{PW}_\Omega) \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{|\Omega|} D^-(\Lambda) \geq 1.$$

1.3 Sampling on the plane

Classical sampling theory on the real line has an analog on the complex plane. In lieu of the class of bandlimited functions one considers the *Bargmann-Fock* space:

$$\mathcal{F}_B(\mathbb{C}) := \left\{ F : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ entire} : \|F\|^2_{\mathcal{F}_B(\mathbb{C})} := \int_{\mathbb{C}^2} |F(x+iy)|^2 e^{-B\pi(x^2+y^2)} dxdy < \infty \right\},$$

where the weight parameter B plays the role of bandwidth. The key quantity is again a two-dimensional version of Beurling's lower density, defined for $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ as

$$D^-(\Lambda) = \liminf_{R \to +\infty} \inf_{z \in \mathbb{C}} \frac{\#(\Lambda \cap B_R(z))}{|B_R(z)|}. \tag{12}$$

The following result, due to Wallstén and Seip [32, 34] in the general form, and Lyubarskiĭ [22] for lattices, is a planar analog of Theorem 2.

Theorem 7 (Lyubarskiĭ, Wallstén-Seip, 1992)**.** The following implications hold for each separated set $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$:

$$\|F\|^2_{\mathcal{F}(\mathbb{C})} \asymp \sum_{\lambda \in \Lambda} |F(\lambda)|^2 e^{-B\pi|\lambda|^2} \quad (F \in \mathcal{F}(\mathbb{C})) \qquad \Leftrightarrow \qquad \tfrac{1}{B} D^-(\Lambda) > 1.$$

A striking difference between Theorems 2 and 7 is that, in the latter case, Beurling's density completely characterizes the validity of the sampling inequality, the sampling estimate being impossible for configurations of points at critical density $D^-(\Lambda) = B$.

Analogs of Theorem 7 have been obtained with respect to general weights instead of the Gaussian factor, and for functions defined on the unit disk [33, 6, 27].

2 Sampling in shift-invariant spaces

2.1 Shift-invariant spaces

The shift-invariant space associated to a function $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ is

$$V(g) := \left\{ f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k g(\cdot - k) : c \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\}. \tag{13}$$

Shift-invariant spaces are classical in approximation theory. The function g is called the *generator* of the SIS, and mild decay and regularity conditions should be imposed, so that (13) is well-defined. While the specific choice $g(x) = \operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ recovers the space of bandlimited functions $V(g) = \mathrm{PW}_1$, in practice, one uses generators g that are smooth and fast-decaying. If g decays fast, the series

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k g(x - k) \tag{14}$$

enjoys good truncation errors, while smoothness of g implies that functions in $V(g)$ are approximately bandlimited:

$$\hat{f}(\xi) = \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2\pi i k \xi} \Big) \cdot \hat{g}(\xi).$$

Intuitively, functions in $V(g)$ have one degree of freedom per unit-length, and the space $V(g)$ is an analog of PW_1, where strict band-limitation is relaxed. For this reason, it is expected that sampling theorems similar to Theorem 2 should hold for shift-invariant spaces.

The necessity of the density conditions for sampling in Theorem 2 does indeed extend to shift-invariant spaces, as an application of Landau's technique. The following can be deduced, for example, from more abstract results in [4, 12].

Theorem 8 (after Landau)**.** Let $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ be continuous and satisfy

$$|g(x)| \leq C(1 + |x|)^{-s}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

for some $C > 0$ and $s > 1$. Then the following implication holds for any set $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$:

$$\|f\|_2^2 \asymp \sum_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)|^2 \quad (f \in V(g)) \qquad \Rightarrow \qquad D^-(\Lambda) \geq 1.$$

On the other hand, few results provide matching sufficient conditions for the sampling estimate, as the classical methods for bandlimited functions do not extend to general shift-invariant spaces.

2.2 Totally positive functions

An integrable function $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is called totally positive, if for all $x_1 < x_2 < \ldots < x_N$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_N$ the matrix

$$\Big(g(x_j - y_k)\Big)_{j,k=1,\ldots,N} \tag{15}$$

has non-negative determinant. The definition is naturally related to sampling in shift-invariant spaces because the system of equations

$$f(\lambda) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k g(\lambda - k), \qquad \lambda \in \Lambda$$

is represented by the infinite matrix

$$\Big(g(\lambda - k)\Big)_{\lambda \in \Lambda, k \in \mathbb{Z}}. \tag{16}$$

Totally positive functions have been extensively studied by Schoenberg in 1950s and even earlier [29, 30], leading to the following complete characterization [31].

Theorem 9 (Schoenberg, 1951)**.** An integrable function $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is totally positive, if and only if its Fourier transform extends analytically to a strip $S = \{z \in \mathbb{C} : \alpha < \operatorname{Im} z < \beta\}$, and can be written as

$$\hat{g}(\xi) = Ce^{-\gamma\xi^2 - i\delta\xi} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + 2\pi i \delta_\nu \xi)^{-1} e^{i\delta_\nu \xi}, \tag{17}$$

with real parameters $C, \gamma, \delta, \delta_\nu$ satisfying $C > 0, \quad \gamma \geq 0, \quad 0 < \gamma + \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu^2 < \infty$.

Totally positive functions are central in approximation theory. A key fact is their *variation diminishing property* [29, 30].

Theorem 10 (Schoenberg, 1947)**.** Let $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be totally positive. If $c_1, \ldots, c_N$ has K sign changes, then

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k g(x - k) \tag{18}$$

has at most K sign changes.

The variation diminishing property of totally positive functions may motivate one to conjecture that an analog of Theorem 2 is valid for the corresponding shift-invariant spaces. The heuristics are as follows: suppose that g is totally positive. A function of the form

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k g(x-k)$$

can be approximated on the interval $[n, n+N]$ as

$$f|_{[n,n+N]}(x) \approx \sum_{k=n}^{n+N-1} c_k g(x-k). \tag{19}$$

By Theorem 10, the function on the right-hand side of (19) has at most N sign changes, which generically should indicate that f has at most N zeros on $[n, n+N]$. On the other hand, if $D^-(\Lambda) > c > 1$, then Λ has at least cN points on any large interval $[n, n+N]$. Thus, under these heuristics, f takes a non-zero value on $\Lambda \cap [n, n+N]$, for each $n \in \mathbb{Z}$, and the set Λ sees a non-trivial part of f. The formalization of such argument remains a challenge, and, indeed, it cannot be expected to work for an arbitrary totally positive function. An important step forward in the exploration of this line would be the derivation of an infinite-dimensional version of Theorem 10, where the total number of sign changes is replaced by an adequate density.

2.3 A new density theorem

Together with Karlheinz Gröchenig and Joachim Stöckler we derived a density theorem for *totally positive functions of Gaussian-type*, which are those totally positive functions for which the product in (17) is finite and the Gaussian factor is present. Thus g is totally-positive of Gaussian type, if and only if

$$\hat{g}(\xi) = Ce^{-\gamma\xi^2 - i\delta\xi} \prod_{\nu=1}^{M} (1 + 2\pi i \delta_\nu \xi)^{-1}, \qquad \xi \in \mathbb{R}, \tag{20}$$

with $\delta, \delta_1, \ldots, \delta_M \in \mathbb{R}, C, \gamma > 0, M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; see Figure 1. For this class we proved the following analog of Theorem 2 [14].

Theorem 11 (Gröchenig, Romero, Stöckler, 2018)**.** Let g be a totally positive function of Gaussian-type. Then each of the following implications holds for each separated set $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$:

$$D^-(\Lambda) > 1 \quad \Rightarrow \quad \|f\|_2^2 \asymp \sum_{\lambda\in\Lambda} |f(\lambda)|^2 \quad (f \in V(g)) \quad \Rightarrow \quad D^-(\Lambda) \geq 1.$$

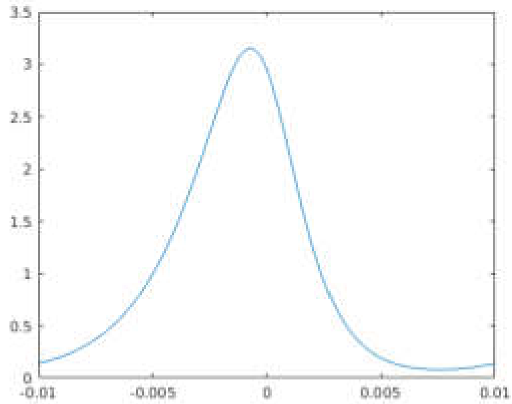


Figure 1: A plot of a function as in (20), with $C = \gamma = 1$, $\delta_1 = 0.25$, $\delta_2 = 0.75$, $\delta_3 = -1.25$, $\delta_4 = 0.55$.

In contrast to the sinc function (5), totally positive functions of Gaussian type decay exponentially, and the expansion (14) enjoys favorable truncation estimates. As with Theorem 2, at the critical density $D^-(\Lambda) = 1$, Λ may or may not be a sampling set.

2.3.1 Density of zeros

As the necessary conditions hold universally (Theorem 8), the contribution of Theorem 11 is in the sufficient conditions for sampling. For a shift-invariant space, a claim of the kind:

$$D^-(\Lambda) > 1 \qquad \Rightarrow \qquad \|f\|_2 \asymp \|f|\Lambda\|_2, \quad (f \in V(g)) \tag{21}$$

implies an upper bound on the density of the zero sets of all non-zero functions $f \in V(g)$:

$$D^-\{f = 0\} \leq 1, \tag{22}$$

since, if (22) should fail, then the set $\Lambda = \{f = 0\}$ would contradict (21)[3]. In fact, bounds on densities of zero sets amount to density theorems for *uniqueness*:

$$D^-(\{f = 0\}) > 1, \text{ for some } f \in V(g) \qquad \Rightarrow \qquad f \equiv 0. \tag{23}$$

Let us compare in this light the situation of bandlimited functions and shift-invariant spaces generated by totally positive functions of Gaussian type.

[3]The correct argument is slightly more technical, because, in the density theorems, (21) holds only for separated sets.

By the Paley-Wiener Theorem, the analytic extension of a bandlimited function $f \in \mathrm{PW}_1$ satisfies the growth-estimate

$$|f(x+iy)| \lesssim e^{\pi|y|}, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

A standard estimate for analytic functions shows that the number of zeros of f inside a complex disk $B_r(0)$,

$$n(r) := \#\{z \in B_r(0) : f(z) = 0\}$$

(approximately) satisfies $n(r) \approx 2r + O(1)$.[4] Thus, while the claim in (22) concerns the number of zeros of f in the real interval $[-r, r]$, one can afford to bound that quantity by the number of complex zeros in the disk $B_r(0)$, and still obtain a bound proportional to be length of the real interval. For bandlimited functions, complex variable methods yield precise estimates also on the real line.

On the other hand, the best possible bound for the analytic extension of a function in the shift-invariant space generated by the Gaussian function $g(x) = e^{-\pi x^2}$ is

$$|f(x+iy)| \leq Ce^{\pi y^2}, \qquad x, y \in \mathbb{R}, \tag{24}$$

as inspection of the analytic extension $g(x+iy) = e^{-\pi(x^2+2xyi-y^2)}$ shows. The best bound for the number of complex zeros that follows from (24) is approximately $n(r) \approx O(r^2)$, which is inadequate as a bound for the number of real zeros on $[-r, r]$. The proof of Theorem 11 involves deriving a relation between the real and complex zero set of a function in $V(g)$, approximately implying that $n(r) \approx 2r + O(1)$, as in the bandlimited case.

3 Sampling in higher dimension

Bandlimited functions in higher dimension are defined by replacing the interval $[-B/2, B/2]$ with a compact set $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ called *spectrum*:

$$\mathrm{PW}_\Omega(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) : \mathrm{supp}(\hat{f}) \subseteq \Omega\}.$$

Typical choices for Ω are rectangles or Euclidean balls. As in dimension 1, the main question is the validity of the sampling inequalities:

$$A\|f\|_2^2 \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)|^2 \leq B\|f\|_2^2, \qquad f \in \mathrm{PW}_\Omega, \tag{25}$$

with $A, B > 0$. Landau's necessary conditions apply mutatis mutandis in higher dimension.

[4] We use $\approx$ to indicate that the statement is not rigorous. The precise equation holds in an averaged sense.

Theorem 12 (Landau, 1967)**.** Let $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ be compact. Then the following implication holds for each set $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$:

$$\|f\|_2^2 \asymp \sum_{\lambda\in\Lambda} |f(\lambda)|^2 \quad (f \in \mathrm{PW}_\Omega) \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{|\Omega|} D^-(\Lambda) \geq 1.$$

In contrast to Theorem 2, for $d > 1$, the d-dimensional Beurling's lower density, defined with respect to Euclidean balls as in (12), does not provide sufficient conditions for sampling. Indeed, for $\Omega = [-1/2, 1/2]^2$ and $n \in \mathbb{N}$, the set $\Lambda_n = \frac{1}{n}\mathbb{Z} \times \big(\mathbb{Z} \setminus \{0\}\big)$ does not satisfy (25) because the function

$$f(x,y) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\frac{\sin(\pi y)}{\pi y}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

belongs to PW_Ω and vanishes on Λ_n, while the 2-dimensional Beurling density of Λ_n, defined by (12), can be arbitrarily large:

$$D^-(\Lambda_n) = n.$$

While for large n, the set Λ_n has large density, the diameter of its complement does not tend to zero, as in the vertical direction Λ_n has a non-shrinking *gap*. As we now explain, an effective criterion for higher dimensional sampling can be formulated by limiting the size of gaps.

A *convex body* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ is a compact convex set with non-empty interior. A convex body is called *centered*, if 0 is an interior point of Ω, and *symmetric*, if $\Omega = -\Omega$. The *polar set* of Ω is

$$\Omega^\circ = \Big\{ y \in \mathbb{R}^d : \forall y \in \Omega,\ x \cdot y \leq 1 \Big\}.$$

For the Euclidean ball we have $B_1^\circ = B_1$. The *gap* of a set $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$ with respect to Ω° is

$$\delta_{\Omega^\circ}(\Lambda) := \inf \Big\{ \delta > 0 : \Lambda + \delta\Omega^\circ = \mathbb{R}^d \Big\}. \tag{26}$$

In terms of the norm whose unit ball is Ω°,

$$|x|_{\Omega^\circ} = \inf\{a > 0 : x \in a\Omega^\circ\}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

the gap (26) can be written as

$$\delta_{\Omega^\circ}(\Lambda) = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \inf_{\lambda\in\Lambda} |x - \lambda|_{\Omega^\circ}. \tag{27}$$

We define the *gap density* of Λ with respect to Ω° by

$$D^{\mathrm{gap}}_{\Omega^\circ}(\Lambda) = \big(4\delta_{\Omega^\circ}(\Lambda)\big)^{-1}. \tag{28}$$

Since the polar set of the unit interval $[-1/2, 1/2]^\circ = [-2, 2]$ has length 4, the factor 4 in (28) guarantees that, in dimension 1, the Beurling and gap densities of lattices coincide. The first implication in the following density theorem is due to Beurling [7, 8]; see also [5, 26].

Theorem 13 (Beurling-Landau, 1960s)**.** Let $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ be a centered symmetric convex body. Then each of the following implications holds for each separated set $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$:

$$D^{\mathrm{gap}}_{\Omega^\circ}(\Lambda) > 1 \quad \Rightarrow \quad \|f\|_2^2 \asymp \sum_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)|^2 \quad (f \in \mathrm{PW}_\Omega) \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{|\Omega|} D^-(\Lambda) \geq 1.$$

Despite the visual similarities between Theorems 2 and 13, in the latter, the difference between the necessary and sufficient conditions for the sampling inequality is more significant, since some sets have large Beurling density but small gap density. Similar results have been proved for certain shift-invariant spaces on the real line [3, 16, 18].

While classical sampling literature is mostly concerned with the existence of a sampling estimate (25), computational problems require a quantitative description of the implicit bounds A,B, and how they depend on the geometry of Ω and Λ. Indeed, many applications demand very irregular sampling geometries, with some groups of points being very close together and other far apart. Such clustering of sampling points is known to lead to a larger ratio B/A of the sampling bounds, which indicates worse stability of a reconstruction algorithm. This challenge is normally addressed with the introduction of certain stabilizing weights. Specifically, consider a centered symmetric convex body Ω and the norm induced by its polar body. The Voronoi regions associated with a closed countable set $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$, and a point $\lambda \in \Lambda$ are defined as

$$V_{\lambda,\Omega^\circ} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \forall \lambda' \in \Lambda,\ \lambda' \neq \lambda,\ |\lambda - x|_{\Omega^\circ} \leq |\lambda' - x|_{\Omega^\circ} \right\}.$$

The Voronoi weight μ_λ is the Lebesgue measure of the Voronoi region V_λ:

$$\mu_{\lambda,\Omega^\circ} := |V_\lambda|.$$

Note that the Voronoi weights do depend on the convex body Ω.

The usefulness of Voronoi weights lies in that they lead to upper sampling bounds

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \mu_\lambda |f(\lambda)|^2 \leq B \|f\|_2^2, \qquad f \in \mathrm{PW}_\Omega, \tag{29}$$

that are robust in the sense that adding more points does not increase B. Indeed (29) holds uniformly, for example, for all sets Λ with $D^{\mathrm{gap}}_{\Omega^\circ}(\Lambda) \geq 1$. For concrete domains, the bound B can be computed explicitly. In contrast, without weights, a typical upper sampling bound depends on the *covering number*

$$n_\Lambda := \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \#\Big(\Lambda \cap \Big(\{x\} + [0,1]^d\Big)\Big)$$

and reads

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |f(\lambda)|^2 \le C_\Omega n_\Lambda \|f\|_2^2, \qquad f \in \mathrm{PW}_\Omega.$$

The analysis of the lower frame bound in the weighted setting is more challenging. To obtain tractable expressions, a common practice is to analyse a concrete approximation method, such as local Taylor expansions or piecewise splines, which is possible when the gap density conditions in Theorem 13 are further relaxed. The following is one such result due to Gröchenig [13][5].

Theorem 10 (Gröchenig, 1992)**.** Let $\Omega = [-1,1]^d$. Then the following implication holds for any closed countable set $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$:

$$D_{B_1}^{\mathrm{gap}}(\Lambda) > \frac{\pi d}{2\log(2)} \quad \Rightarrow \quad A\|f\|_2^2 \le \sum_{\lambda\in\Lambda} \mu_{\lambda,B_1} |f(\lambda)|^2, \quad f \in \mathrm{PW}_\Omega,$$

with $\sqrt{A} = 2 - \exp\left[\frac{1}{2}\pi d / D_{B_1}^{\mathrm{gap}}(\Lambda)\right]$.[6]

As a trade-off for the explicit sampling bound, the gap density required in Theorem 10 depends on the dimension d, while the one in Theorem 13 does not. Theorem 10 has found many applications, for example in the analysis of the numerical stability of non-equispaced fast Fourier transforms. With this motivation, Adcock, Gataric, Hansen proved the following improvement [1][7].

Theorem 11 (Adcock, Gataric, Hansen, 2016)**.** Let $\Omega = [-1,1]^d$. Then the following implication holds for any closed countable set $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$:

$$D_{B_1}^{\mathrm{gap}}(\Lambda) > \frac{\pi\sqrt{d}}{2\log(2)} \quad \Rightarrow \quad A\|f\|_2^2 \le \sum_{\lambda\in\Lambda} \mu_{\lambda,B_1} |f(\lambda)|^2, \quad f \in \mathrm{PW}_\Omega,$$

with $\sqrt{A} = 2 - \exp\left[\frac{1}{2}\pi\sqrt{d} / D_{B_1}^{\mathrm{gap}}(\Lambda)\right]$.

[5] The stated result is a reformulation of the original reference, and is quoted from [1].

[6] The theorem also provides the upper bound $\sqrt{B} = 2$. The Voronoi weights are calculated with respect to the Euclidean norm.

[7] The result in the cited reference applies also to spectra given by convex bodies.

Together with Ben Adcock and Milana Gataric, we proved the following theorem, which provides explicit lower sampling bounds valid for the complete range of gap densities allowed by Theorem 13 [2].

Theorem 12 (Adcock, Gataric, Romero, 2019)**.** Let $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ be a centered symmetric convex body. Then the following implication holds for any closed countable set $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$:

$$D^{\mathrm{gap}}_{\Omega^\circ}(\Lambda) > 1 \quad \Rightarrow \quad A\|f\|_2^2 \leq \sum_{\lambda\in\Lambda} \mu_{\lambda,\Omega^\circ}|f(\lambda)|^2, \qquad f \in \mathrm{PW}_\Omega.$$

with

$$A = |\Omega^\circ|\,|\Omega| \left(\frac{\kappa^2}{24D^{\mathrm{gap}}_{\Omega^\circ}(\Lambda)}\right)^d \cos^2\left[\frac{\pi(1+\kappa)^2}{2D^{\mathrm{gap}}_{\Omega^\circ}(\Lambda)}\right],$$
$$\kappa = \left(\sqrt{D^{\mathrm{gap}}_{\Omega^\circ}(\Lambda)} - 1\right)\left(1 - \frac{1}{d+2}\right).$$

The proof of Theorem 12 revisits Beurling's proof of Theorem 13, and also a recent simple and powerful approach due to Olevskii and Ulanovskii [26], and quantifies many of the qualitative arguments. Sampling bounds that are explicit in the geometry of Ω and Λ are essential to study the performance of numerical sampling schemes, as they help determine which finite portion of the samples Λ is required to approximate the target signal f within a certain accuracy [2].

4 Mobile sampling

In the applications modeled by the sampling theory described so far, the cost of acquiring a signal is given by the number of samples required for reconstruction. However, in certain applications such as magnetic resonance imaging (MRI), signals are acquired by sensors that move along continuous trajectories in space (determined by engineering constraints). In such situations, a sampling pattern can be modeled with the image of a curve $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^d$, called *trajectory*[8], and the continuity of reconstruction from samples is expressed by

$$A\|f\|_2^2 \leq \int_\Gamma |f(x)|^2 \, d\mathcal{H}^1(x) \leq B\|f\|_2^2, \qquad f \in \mathrm{PW}_\Omega, \tag{30}$$

where $A, B > 0$ are stability constants, and $\mathcal{H}^1$ is the one dimensional Hausdorff (length) measure. In such a setting, it has been argued that the acquisition cost is better modeled by the average *length* covered by the moving sensors, as a proxy

[8] We allow for discontinuous, but measurable, curves, so that Γ can have several branches.

for scanning times [36]. The question arises, whether a sampling theory can be formulated in terms of such more meaningful performance metrics.

When sampling a function bandlimited to a convex body $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ along equispaced parallel lines with direction $\vec{v} = (a,b) \in \mathbb{S}^1$,

$$L_{\vec{v},\eta} = \{t\vec{v} + \eta k(-b,a) : t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\}, \tag{31}$$

Unnikrishnan and Vetterli showed that the critical sampling rate is dictated by the separation between lines $\eta > 0$, and by the measure of the maximal cross section of Ω by hyperplanes perpendicular to $\vec{v}$ [36, 37][9].

Theorem 14 (Unnikrishnan and Vetterli, 2013)**.** Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a centered symmetric convex body and $\Gamma = L_{\vec{v},\eta}$ the collection of parallel lines defined in (31). Then

$$\|f\|_2^2 \asymp \int_\Gamma |f(x)|^2 \, \mathrm{d}\mathcal{H}^1(x) \quad (f \in \mathrm{PW}_\Omega) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{len}(\Omega \cap \vec{v}^\perp) \cdot \eta \leq 1, \tag{32}$$

where $\vec{v}^\perp$ is the orthogonal complement of $\{\vec{v}\}$ and len denotes the one-dimensional (length) measure. In particular, the choice for the sampling direction $\vec{v}$ that leads to the largest possible separation η – and, thus, to the shortest scanning times – is

$$\mathrm{argmin}_{\vec{v}} \quad \mathrm{len}(\Omega \cap \vec{v}^\perp).$$

Theorem 14 is an analog for curves of Shannon's sampling theorem (Theorem 1). Is there also an analog of Beurling's density theorem (Theorem 2)? While the parameter η plays an analogous role in Theorems 1 and 14 – namely, the separation between consecutive sampling points, or sampling lines –, it is less clear what should replace Beurling's lower density in the mobile context. Unnikrishnan and Vetterli proposed the following (lower) *path density*:[10]

$$\ell^-(\Gamma) := \liminf_{R \to +\infty} \inf_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{\mathrm{len}(B_R(x) \cap \Gamma)}{|B_R(x)|}. \tag{33}$$

The set of equispaced parallel lines $\Gamma = L_{\vec{v},\eta}$ has density

$$\ell^-(\Gamma) = \eta^{-1},$$

while an arbitrary collection of parallel lines on $\mathbb{R}^d$,

$$\Gamma = \{t\vec{v} + \lambda : t \in \mathbb{R}, \lambda \in \Lambda\}, \qquad \Lambda \subset \vec{v}^\perp, \tag{34}$$

[9] Theorem 14 is a reformulation of the result from Unnikrishnan and Vetterli, based on [17].

[10] (33) is a slightly modified version of the density, introduced in [15].

has density

$$\ell^-(\Gamma) = D^-(\Lambda),$$

where the density is calculated by identifying $\vec{v}^\perp \cong \mathbb{R}^{d-1}$. Using the results in [15], obtained in collaboration with Karlheinz Gröchenig, Jay Unnikrishnan and Martin Vetterli, one can show the following.

Theorem 15 (after Gröchenig, Romero, Unnikrishnan and Vetterli, 2015)**.** Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a centered symmetric convex body. Then each of the following implications holds for every collection of parallel lines Γ with direction $\vec{v} \in S^1$:

$$\begin{aligned} \frac{\ell^-(\Gamma)}{\mathrm{len}(\Omega \cap \vec{v}^\perp)} > 1 &\Rightarrow \|f\|_2^2 \asymp \int_\Gamma |f(x)|^2 \, \mathrm{d}\mathcal{H}^1(x) \quad (f \in \mathrm{PW}_\Omega) \\ &\Rightarrow \frac{\ell^-(\Gamma)}{\mathrm{len}(\Omega \cap \vec{v}^\perp)} \geq 1. \end{aligned}$$

Theorems 14 and Theorems 15 actually follow from Theorems 1 and 2 once one observes, as done in [15], that sampling along parallel lines with spectrum Ω reduces to simultaneous discrete sampling with spectra given by all possible cross-sections of Ω, provided that the corresponding bounds are uniform. Such uniformity questions are easy for two-dimensional convex bodies but may be quite subtle in higher dimension [15].

Many practically relevant sampling trajectories are not parallel lines but spiral-like, as these are known to cover space more efficiently. The main examples of such curves are the Archimedes spiral

$$A^\eta := \{(\eta\theta\cos 2\pi\theta, \eta\theta\sin 2\pi\theta) : \theta \geqslant 0\} \tag{35}$$

and the collection of concentric circles

$$O^\eta := \{(x,y) : x^2 + y^2 = \eta^2 k^2, k \in \mathbb{N}\}; \tag{36}$$

see Figure 2.

In each case, the path density is given by

$$\ell^-(A^\eta) = \ell^-(O^\eta) = \eta^{-1}.$$

A trajectory given by either (35) or (36) will be called *spiraling*. Together with Philippe Jaming and Felipe Negreira, and elaborating on previous work of Benedetto and Wu [5], we proved the following sampling theorem [17].

Theorem 16 (Jaming, Negreira, Romero, to appear)**.** Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a centered symmetric convex body. Then each of the following implications holds for every spiraling trajectory Γ:

$$\frac{\ell^-(\Gamma)}{\mathrm{diam}(\Omega)} > 1 \;\Rightarrow\; \|f\|_2^2 \asymp \int_\Gamma |f(x)|^2 \, \mathrm{d}\mathcal{H}^1(x) \quad (f \in \mathrm{PW}_\Omega) \;\Rightarrow\; \frac{\ell^-(\Gamma)}{\mathrm{diam}(\Omega)} \geq 1.$$

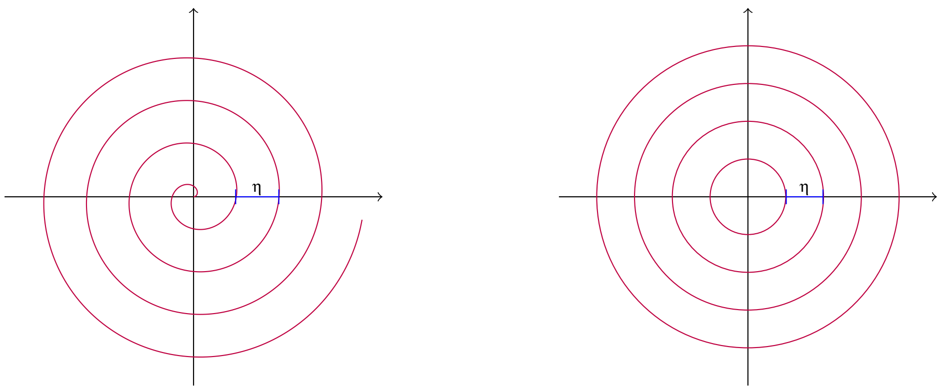


Figure 2: Archimedes spiral (left) and concentric circles (right) with separation η.

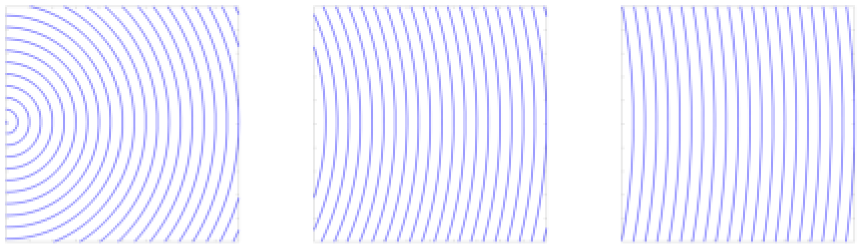


Figure 3: A spiral restricted to a square with a center moving away from the origin.

The role of $\mathrm{diam}(\Omega)$ can be intuitively explained from Theorems 14 and 15 as follows. Restricted to a square centered at $R\vec{v}$, with $\vec{v} \in S^1$ and R large, the branches of a spiraling curve look almost straight and perpendicular to $\vec{v}$; see Figure 3. Thus, based on Theorem 15, their density is expected to exceed $\mathrm{len}(\Omega \cap \vec{v})$ in order to deliver stable reconstruction of all bandlimited functions. By convexity and symmetry, the maximal length among all such section is $\mathrm{diam}(\Omega)$.

Unlike Theorems 14 and 15, Theorem 16 cannot be reduced to one-dimensional sampling, and new methods are needed. As a by-product, we also obtain quantitative information describing the effects of sampling below the critical rate dictated by Theorem 16, a practice called *undersampling*. Heuristically, undersampling is possible because the signals that are encountered in practice are highly compressible, and such extra information can be leveraged to compensate for insufficient sampling density.

According to Theorem 16, the critical acquisition rate for functions bandlimited to the unit square $[-1/2, 1/2]^2$ with either A^η or O^η, as defined in (35) and (36), is $\eta = \sqrt{2}/2$. We consider spirals with path density slightly under the critical value and study the sampling problem restricted to functions whose Fourier transforms are so-called compressible signals. A simple model for compressible signals is given by limiting their total variation [10], as this translates into a compact representation in a *wavelet basis* [9]. For such functions the following quantitative version of the necessary sampling conditions in Theorem 16 is provided in [17].

Theorem 17 (Jaming, Negreira, Romero, to appear)**.** Let $\Omega = [-1/2, 1/2]^2$, $W > 0$, and consider the class bandlimited functions with compressible spectrum:

$$\mathrm{PW}_{\Omega,W} := \{f \in \mathrm{PW}_{\Omega}(\mathbb{R}) : \mathrm{var}(\hat{f}) \leq W\}.$$

Let $\eta = (1+\varepsilon)\sqrt{2}/2$ with $\varepsilon \in (0,1)$, and $\Gamma = A^{\eta}$ or $\Gamma = O^{\eta}$. Then

$$\inf\left\{\|f\|_{L^2(\mu_\Gamma)} : \|f\|_2 = 1, f \in \mathrm{PW}_{\Omega,W}\right\} \leqslant C(\varepsilon W)^{-1/2}(\ln^2(\varepsilon W)+1),$$

where μ_Γ is the length measure restricted to Γ and $C > 0$ is a universal constant.

Formulated in terms of an imaging problem, Theorem 17 sets a limit to the capacity of spirals to acquire all compressible signals by sampling their Fourier transform below the critical rate. Informally, it says that when undersampling a Fourier transform by a small factor $(1-\varepsilon)$, one can only recover functions with total variation $\lesssim \varepsilon^{-1}$ with a stable condition number. Theorem 17 can also be formulated explicitly as a trade-off between numerical stability and the number of wavelet coefficients that are recoverable by Fourier sampling on spiraling curves [17, Theorem C].

References

[1] Ben Adcock, Milana Gataric, and Anders C. Hansen, *Weighted frames of exponentials and stable recovery of multidimensional functions from nonuniform Fourier samples*, Appl. Comput. Harmon. Anal. **42** (2017), no. 3, 508–535. MR 3613399

[2] Ben Adcock, Milana Gataric, and José Luis Romero, *Computing reconstructions from nonuniform Fourier samples: universality of stability barriers and stable sampling rates*, Appl. Comput. Harmon. Anal. **46** (2019), no. 2, 226–249. MR 3907489

[3] Akram Aldroubi and Karlheinz Gröchenig, *Beurling-Landau-type theorems for non-uniform sampling in shift invariant spline spaces*, J. Fourier Anal. Appl. **6** (2000), no. 1, 93–103. MR 1756138

[4] Radu Balan, Peter G. Casazza, Christopher Heil, and Zeph Landau, *Density, overcompleteness, and localization of frames. I. Theory*, J. Fourier Anal. Appl. **12** (2006), no. 2, 105–143. MR 2224392

[5] John J Benedetto and Hui Chuan Wu, *Nonuniform sampling and spiral mri reconstruction*, Wavelet Applications in Signal and Image Processing VIII, vol. 4119, International Society for Optics and Photonics, 2000, pp. 130–141.

[6] Bo Berndtsson and Joaquim Ortega Cerdà, *On interpolation and sampling in Hilbert spaces of analytic functions*, J. Reine Angew. Math. **464** (1995), 109–128. MR 1340337

[7] Arne Beurling, *Local harmonic analysis with some applications to differential operators*, Some Recent Advances in the Basic Sciences, Vol. 1 (Proc. Annual Sci. Conf., Belfer Grad. School Sci., Yeshiva Univ., New York, 1962–1964), 1966, pp. 109–125. MR 0427956
[8] ______, *The collected works of Arne Beurling. Vol. 1*, Contemporary Mathematicians, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1989, Complex analysis, Edited by L. Carleson, P. Malliavin, J. Neuberger and J. Wermer. MR 1057613
[9] Albert Cohen, Ronald DeVore, Pencho Petrushev, and Hong Xu, *Nonlinear approximation and the space* $\mathrm{BV}(\mathbf{R}^2)$, Amer. J. Math. **121** (1999), no. 3, 587–628. MR 1738406
[10] David L. Donoho, *Compressed sensing*, IEEE Trans. Inform. Theory **52** (2006), no. 4, 1289–1306. MR 2241189
[11] R. J. Duffin and A. C. Schaeffer, *A class of nonharmonic Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 341–366. MR 47179
[12] Hartmut Führ, Karlheinz Gröchenig, Antti Haimi, Andreas Klotz, and José Luis Romero, *Density of sampling and interpolation in reproducing kernel Hilbert spaces*, J. Lond. Math. Soc. (2) **96** (2017), no. 3, 663–686. MR 3742438
[13] Karlheinz Gröchenig, *Reconstruction algorithms in irregular sampling*, Math. Comp. **59** (1992), no. 199, 181–194. MR 1134729
[14] Karlheinz Gröchenig, José Luis Romero, and Joachim Stöckler, *Sampling theorems for shift-invariant spaces, Gabor frames, and totally positive functions*, Invent. Math. **211** (2018), no. 3, 1119–1148. MR 3763405
[15] Karlheinz Gröchenig, José Luis Romero, Jayakrishnan Unnikrishnan, and Martin Vetterli, *On minimal trajectories for mobile sampling of bandlimited fields*, Appl. Comput. Harmon. Anal. **39** (2015), no. 3, 487–510. MR 3398946
[16] Karlheinz Gröchenig and Joachim Stöckler, *Gabor frames and totally positive functions*, Duke Math. J. **162** (2013), no. 6, 1003–1031. MR 3053565
[17] Philippe Jaming, Felipe Negreira, and José Luis Romero, *The Nyquist sampling rate for spiraling curves*, Appl. Comput. Harmon. Anal. (To appear. DOI: 10.1016/j.acha.2020.01.005).
[18] Tobias Kloos and Joachim Stöckler, *Zak transforms and Gabor frames of totally positive functions and exponential B-splines*, J. Approx. Theory **184** (2014), 209–237. MR 3218799
[19] H. J. Landau, *Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions*, Acta Math. **117** (1967), 37–52. MR 222554
[20] ______, *Sampling, data transmission, and the nyquist rate*, Proc. IEEE **55** (1967), no. 10, 1701–1706.
[21] Yurii I. Lyubarskii and Kristian Seip, *Sampling and interpolating sequences for multiband-limited functions and exponential bases on disconnected sets*, J. Fourier Anal. Appl. **3** (1997), no. 5, 597–615. MR 1491937
[22] Yu. I. Lyubarskiĭ, *Frames in the Bargmann space of entire functions*, Entire and subharmonic functions, Adv. Soviet Math., vol. 11, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, pp. 167–180. MR 1188007
[23] Jordi Marzo, *Riesz basis of exponentials for a union of cubes in* $\mathbb{R}^d$, arXiv: 0601288 (2006).

[24] Basarab Matei and Yves Meyer, *Simple quasicrystals are sets of stable sampling*, Complex Var. Elliptic Equ. **55** (2010), no. 8-10, 947–964. MR 2674875

[25] Alexander Olevskii and Alexander Ulanovskii, *Universal sampling and interpolation of band-limited signals*, Geom. Funct. Anal. **18** (2008), no. 3, 1029–1052. MR 2439002

[26] ______, *On multi-dimensional sampling and interpolation*, Anal. Math. Phys. **2** (2012), no. 2, 149–170. MR 2917231

[27] Joaquim Ortega-Cerdà and Kristian Seip, *Beurling-type density theorems for weighted L^p spaces of entire functions*, J. Anal. Math. **75** (1998), 247–266. MR 1655834

[28] ______, *Fourier frames*, Ann. of Math. (2) **155** (2002), no. 3, 789–806. MR 1923965

[29] I. J. Schoenberg, *On totally positive functions, Laplace integrals and entire functions of the Laguerre-Polya-Schur type*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **33** (1947), 11–17. MR 18706

[30] ______, *On variation-diminishing integral operators of the convolution type*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **34** (1948), 164–169. MR 23873

[31] ______, *On Pólya frequency functions. I. The totally positive functions and their Laplace transforms*, J. Analyse Math. **1** (1951), 331–374. MR 47732

[32] Kristian Seip, *Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space. I*, J. Reine Angew. Math. **429** (1992), 91–106. MR 1173117

[33] ______, *Beurling type density theorems in the unit disk*, Invent. Math. **113** (1993), no. 1, 21–39. MR 1223222

[34] Kristian Seip and Robert Wallstén, *Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space. II*, J. Reine Angew. Math. **429** (1992), 107–113. MR 1173118

[35] Claude E. Shannon, *Communication in the presence of noise*, Proc. I.R.E. **37** (1949), 10–21. MR 28549

[36] J. Unnikrishnan and M. Vetterli, *Sampling and reconstruction of spatial fields using mobile sensors*, IEEE Trans. Signal Process. **61** (2013), no. 9, 2328–2340.

[37] ______, *Sampling high-dimensional bandlimited fields on low-dimensional manifolds*, IEEE Trans. Inform. Theory **59** (2013), no. 4, 2103–2127.

[38] Michael Unser, *Sampling-50 years after Shannon*, Proc. IEEE **88** (2000), no. 4, 569–587.

[39] Robert M. Young, *An introduction to nonharmonic Fourier series*, Pure and Applied Mathematics, vol. 93, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1980. MR 591684

Authors' address:
Faculty of Mathematics, University of Vienna, Oskar-Morgenstern-Platz 1, A-1090 Vienna
and

Acoustics Research Institute, Austrian Academy of Sciences, Wohllebengasse 12-14, A-1040 Vienna
email jose.luis.romero@univie.ac.at,jlromero@kfs.oeaw.ac.at

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 243 (2020), 43–52

Roland Fischer 1945–2019

Willi Dörfler
Universität Klagenfurt

Roland Fischer ist am 7. November 2019 verstorben nach mehreren Jahren einer ernsthaften Erkrankung, die ihn physisch, aber in keiner Weise psychisch und mental eingeschränkt hat. Oder besser gesagt: Er hat sich davon nicht einschränken lassen. Das verdankte er einer Energie und Konsequenz, die sein ganzes berufliches und auch privates Leben bestimmt und mitgestaltet haben. Ich durfte Roland als Freund und Kollege begleiten, wir haben zumindest in den Jahren, in denen Klagenfurt sein Dienstort war, viele gemeinsame Aktivitäten durchgeführt. Auch danach konnte ich etwa in meiner Funktion als Rektor unserer Universität Roland bei der Realisierung seiner Ideen unterstützen. Dieser enge Kontakt macht es einerseits einfacher, einen Nachruf zu schreiben, aber ich musste doch bestrebt sein, die emotionale Seite im Hintergrund zu halten. Dabei ist ein gewisser zeitlicher Abstand zu seinem Ableben ein Vorteil. Dennoch gebe ich zu bedenken, dass ich mein Bild des Menschen Roland Fischer, meine Erfahrungen mit ihm beschreibe. Das ist mir wichtiger, als eine Besprechung einzelner seiner vielen Publikationen, die ja leicht nachzulesen sind.

Roland Fischer im Jahr 2013 (zur Verfügung gestellt von S. Rauchenwald)

ISSN 0020-7926

Roland Fischer wurde am 15.9.1945 in der Nähe von Brünn geboren, seine Familie durchlebte wie viele andere schwierigste Zeiten und kam schließlich nach Wien, wo Roland die Volksschule besuchte. Nach dieser und einem Wechsel nach Zwettl absolvierte er dort das Gymnasium. An der Universität Wien folgte das Studium von Mathematik und Physik, zuerst für das Lehramt und nach einer kurzen Phase als Lehrer das Doktoratsstudium in Mathematik, das er mit der Promotion 1971 abschloss.

Seine akademische Laufbahn begann als Assistent an der Universität Salzburg bei Professor Schweiger und führte sehr rasch zur Habilitation für das Fach Mathematik (Jänner 1974). Die Arbeitsgebiete waren Ergodentheorie und Graphentheorie, und ich verweise dafür auf das Schriftenverzeichnis. Die entscheidende Weichenstellung im Leben von Roland Fischer war dann seine Berufung im Herbst 1974 an die damalige Hochschule für Bildungswissenschaften in Klagenfurt als Hochschulprofessor (später Universitätsprofessor) für Mathematik mit besonderer Berücksichtigung der Didaktik. Und dieser Zusatz war für Roland und seine weitere wissenschaftliche Arbeit nicht nur ein schmückendes Beiwort, sondern Auftrag und Aufgabe. Und dafür bot die junge Universität, die eben das Jubiläum des ersten halben Jahrhunderts ihres Bestehens feiert, die besten Voraussetzungen für den dabei erforderlichen Freiraum im Denken und Handeln.

Nachdem Roland Fischer die ersten akademischen Jahre der Mathematik als Forschungsgebiet gewidmet hatte, verlagerte sich für ihn die Perspektive auf die Mathematik zunehmend von innen nach außen. Die didaktische, philosophische, soziale und bildungstheoretische Reflexion über Mathematik und später über Lernen und Wissen ganz allgemein würde ich als das Zentrum der wissenschaftlichen und organisatorischen Arbeit bei Fischer ansehen. Auch in seinen allgemeinen Überlegungen und Theoriebildungen blieb jedoch die Mathematik oft der Testfall, der Gegenstand, an dem Konzepte exemplarisch eingesetzt und erkundet werden konnten. Mich erinnert das an das analoge Vorgehen bei Ludwig Wittgenstein etwa bei dessen Reflexionen über die Bedeutung von Zeichen. Wenn also so manches, etwa seine bildungstheoretischen Konzepte, bei Fischer abstrakt und abgehoben wirken mag, bringt die Spezialisierung oder Fokussierung auf die Mathematik Einsicht in die Ziele und Konsequenzen der allgemeinen Vorschläge. Diese Rückbindung an die Mathematik ergibt andererseits auch wichtige alternative und innovative Sichtweisen auf sie selbst und insbesondere auf ihre Didaktik. Dass dabei auch kritische Standpunkte eingenommen werden, ist nicht überraschend, macht jedoch einen wichtigen Teil der praktischen Relevanz und Wirksamkeit des Denkens von Roland Fischer aus.

Und hier komme ich zu einem aus meiner Sicht zentralen Punkt des Lebenswerks von Roland. Für ihn war es immer wichtig, nicht nur Veränderungen oder Reformen vorzuschlagen, sondern diese auch zu bewirken und in der sozialen Realität umzusetzen. Das hatte zur Konsequenz, dass er sich in vielfältiger Weise und in verschiedensten Formen und Funktionen engagierte und große Bedeutung der Kooperation mit anderen zumaß. Dieses praktische und organisatorische Handeln im sozialen Kontext erfolgte dabei stets vor dem Hintergrund und auf Basis theoretischer Überlegungen und Konzepte, die auch öffentlich gemacht wurden. In der Zusammenarbeit mit Roland wusste man also, worauf man sich einlässt, wofür oder auch wogegen er arbeitete, kämpfte und stritt. Und bemerkenswerterweise hat er auf einer Metaebene solche Entwicklungsprozesse thematisiert, analysiert und konzipiert, wie etwa in dem langjährigen Projekt „Vernetzung und Widerspruch". Dafür hat er immer „Mitdenker" gesucht und auch gefunden. Dass es nicht nur Mitdenker, sondern auch „Gegendenker" gab, darf bei einem derartigen auf zum Teil weitreichende Veränderung angelegten Programm nicht verwundern.

Eine der ersten Aufgaben, denen sich Fischer in Klagenfurt widmete, war die Institutionalisierung der Mathematikdidaktik, wobei sich unsere Interessen und Aktivitäten in großem Umfang überschnitten. Dahinter stand die Einsicht, dass man Didaktik nicht dem zufälligen Wohlwollen von Fachwissenschaftlern oder engagierten Lehrern überlassen darf, wenn diese eine wissenschaftliche Disziplin werden soll. So war Fischer beteiligt an der Gründung des *Journals für Didaktik der Mathematik* (JMD), der ersten deutschsprachigen Fachzeitschrift mit wissenschaftlichem Anspruch, etwa durch ein striktes Reviewing-System. Es ging dabei auch um die Bildung einer Scientific Community über die bisherigen, natürlich auch wichtigen Beiträge von Einzelpersonen hinaus. Dazu trugen auch die in Klagenfurt organisierten internationalen Tagungen bei sowie die daraus entstandenen Tagungsbände. Klagenfurt konnte so sehr bald seinen Ruf als österreichisches und internationales Zentrum für Mathematikdidaktik erwerben. Parallel dazu erfolgte der personelle Ausbau durch die Bestellung von Mitarbeiterinnen mit einschlägigen Interessen.

Im Laufe der Jahre führte dies zu zahlreichen Promotionen und Habilitationen zum Thema Mathematikdidaktik: Das von Fischer gepflanzte Samenkorn trug also unter seiner sorgfältigen Pflege reichliche Früchte. Wenn heute im deutschsprachigen Raum Mathematikdidaktik eine wohletablierte universitäre Disziplin darstellt, so beruht dies sicher auch auf den von Fischer gesetzten Maßnahmen und den dahinterstehenden Ideen. Zu den Indikatoren dafür gehören die zahlreichen Professuren und die rasant gestiegene Anzahl der Teilnehmer an den Tagungen. Die erfolgreiche Entwicklung der Mathematikdidaktik sehe ich als ein paradigmatisches Beispiel für die langfristige Wirksamkeit des theoretischen und strategischen Denkens von Roland Fischer. Mit seinen Schriften war er nicht primär an der Verlängerung seiner Publikationsliste interessiert, sondern wollte andere Menschen damit erreichen und motivieren, sich dafür einzusetzen, was er als wichtig im jeweiligen Bereich erachtete.

Die wissenschaftliche Arbeit von Fischer war somit immer an einer Praxis orientiert, aus der sie wichtige Anregungen und Problemstellungen bezog und auf die sie wieder zurückwirken wollte. Roland verkörperte für mich auf diese Weise das Beispiel eines nicht egoistischen Wissenschaftlers, der aber natürlich für diese Wirkungsweise auch Ansehen und Bedeutung erwerben musste. In dieses Bild passt sehr gut die Konzeption und Publikation eines Schulbuchs für Mathematik in der Sekundarstufe II, gemeinsam mit Heinrich Bürger und Günther Malle. Darin finden sich viele innovative Ideen für den Unterricht, die allerdings (und leider) durch die Orientierung an Kompetenzmodellen und die damit verbundene Atomisierung des Gegenstandes teilweise heute an Relevanz verloren haben. Viele der didaktischen Grundideen für das Lernen und Lehren von Mathematik finden sich im Buch „Mensch und Mathematik“, verfasst gemeinsam mit Günther Malle. Schon der Titel ist Programmatik: Mathematikdidaktik hat sich an der Mathematik aber mindestens im selben Umfang an den Lernenden zu orientieren. Das Buch konnte den Stellenwert eines Standardwerks in der Mathematikdidaktik erobern. Jedoch würde ich es auch Fachmathematikern zu Lektüre empfehlen, weil darin eine „Außensicht“ auf die Mathematik entwickelt wird, ein didaktisches Bild von Mathematik gemäß der Einsicht, dass Derartiges für das Lernen und Lehren unabdingbar ist. Didaktik muss Mathematik von „innen“ und „außen“ analysieren und reflektieren und trägt dadurch zum Verständnis mathematischer Tätigkeiten bei. Und genau dort setzt „Mensch und Mathematik“ an. Der zentrale Faktor bei jeder Veränderung von Unterricht sind die Lehrer. Roland Fischer hat dies klar gesehen und gemeinsam mit Kolleginnen (Peter Posch, Werner Peschek, Edith Schneider, u.a.) unter dem Titel „Pädagogik und Fachdidaktik für Lehrer (PFL) ein komplexes Programm zur Lehrerfortbildung (nicht nur in Mathematik) entwickelt und durchgeführt, das auch jetzt noch angeboten wird. Ohne Übertreibung kann PFL als das bisher erfolgreichste Fortbildungsprogramm seiner Art angesehen und als Modell für solche Programme genommen werden. Es beruht ganz entschieden auf der Eigentätigkeit der Teilnehmerinnen, die nicht bloß belehrt werden, sondern, angeregt durch Input, eigenständig reflektieren und ihren Unterricht gestalten. Grob gesprochen war der Schwerpunkt von Roland Fischers Arbeit in der ersten Hälfte seiner Zeit an der Universität Klagenfurt die Verbesserung der Bedingungen für das Lernen und Lehren von Mathematik und das Verständnis der hier auftretenden Prozesse und Probleme.

Vor allem mit der Verlegung seines Dienstorts an den Standort Wien der Fakultät für Interdisziplinäre Forschung und Fortbildung (deren erfolgreicher Dekan er viele Jahre war) verschob oder besser erweiterte Fischer seine Überlegungen und den Inhalt seiner Publikationen auf allgemeine Fragen von Schule, Bildung und Ausbildung, individuelles und soziales/gesellschaftliches Lernen bis hin zu Fragen gesellschaftlicher Entwicklung und bildungspolitischen Themen. In Funktionen wie als Mitglied des (ministeriellen) Qualitätssicherungsrats zur Lehrerbildung hatte er auch die Möglichkeit, sich für die Implementierung der allgemeinen und abstrakten Konzepte einzusetzen. Mit seiner ausdrücklichen Zustimmung darf ich zur Würdigung dieser Arbeiten aus der Rede von Peter Posch anlässlich der Beisetzung von Roland Fischer zitieren: „Roland hat viel Bleibendes geschaffen.

Er war aber auch ein Visionär und ich möchte ihn selbst noch zu Wort kommen lassen ‚Die Bürger müssen in der Lage sein, über das was Experten vorschlagen, zu urteilen und verantwortliche Entscheidungen zu treffen.' Die Förderung von ‚Urteils- und Entscheidungsfähigkeit' war für Roland Fischer eine der wichtigsten Aufgaben des Bildungswesens. Dieses anspruchsvolle Postulat zieht sich in zahlreichen Variationen wie ein roter Faden durch viele seiner Veröffentlichungen und Diskussionsbeiträge. Eine weitere zukunftsweisende These Roland Fischers: Die künftige Kultur des Lehrens und Lernens wird statische Kulturelemente ebenso umfassen müssen wie dynamische und eine Neubestimmung des Verhältnisses zwischen beiden erfordern, eine Sicht des Lernens, die sich nicht auf eine Belehrung durch jene, die wissen, für jene, die nicht wissen beschränkt, sondern auch ‚ein gemeinsames Suchen, gemeinsames Probehandeln und gemeinsames Bewusstwerden für mögliche Zukünfte' einschließt. Ein wichtiges ethisches und demokratiepolitisch bedeutsames Anliegen war für Roland Fischer auch die Klärung der Frage, was eigentlich zur Grundbildung jedes Menschen gehört, damit eine gemeinsame Kommunikationsbasis entstehen kann, die den einzelnen Bürger dazu befähigt, über Problemlösungsangebote von Experten zu urteilen und den Zusammenhalt der Gesellschaft zu sichern. Dabei ging es ihm nicht um eine Aufzählung sogenannter unverzichtbarer Inhalte oder Kompetenzen, sondern um den Prozess, durch den die Inhalte der Grundbildung bestimmt werden sollen. Im Unterschied zur gängigen Praxis, bei der Gruppen von Fachwissenschaftlern die Lehrplaninhalte definieren und meist Partikularinteressen der Fachvertreter die Lehrpläne anschwellen lassen, plädierte er dafür, dass an diesem Prozess die ganze Bevölkerung beteiligt werden müsste. Was als verbindliche Grundbildung angesehen wird, müsste Ergebnis eines Aushandelns sein, bei der in unterschiedlichem Ausmaß Schüler, Lehrer, zufällig ausgewählte und nicht von den Parteien entsandte Vertreter der Bürgerschaft beteiligt werden sollten. Nur so könne sichergestellt werden, dass nicht Einzelinteressen dominieren, sondern eine Verantwortung für das Gesamte entsteht. Und: Diese verbindliche Grundbildung sollte nur die Hälfte der Unterrichtszeit in Anspruch nehmen, damit die andere Hälfte Spielraum für spezielle Interessen der Schülerinnen bieten kann. Roland war sich dessen bewusst, dass es sich bei diesen Überlegungen um eine Vision handelt, aber sie ist stark genug, um ihn zu überleben. Roland Fischer hat gewusst, dass viele dieser Ideen ohne eine professionell handelnde Lehrerschaft unerfüllbar sind. Die Lehrerschaft darf nicht nur passiv Anordnungen von oben umsetzen, sondern muss auch aktiv auf die gesellschaftliche Entwicklung des Bildungswesens Einfluss nehmen. Bis zuletzt hat sich Roland der Frage gewidmet: Wohin wollen wir, die Gesellschaft, uns entwickeln und was ist dafür zu lernen, damit Menschen in Freiheit, Würde und Wohlstand leben können? Die Förderung von ‚Urteils- und Entscheidungsfähigkeit' und der Fähigkeit, mit Experten zu kommunizieren war, für ihn ein zentrales Ziel des Bildungswesens. Eine seiner letzten Initiativen war der anspruchsvolle Versuch, diese Idee in ein konkretes Projekt münden zu lassen, das Jugendliche gemeinsam mit Erwachsenen in einen Bildungsdiskurs einbezieht, der ihnen erleichtern soll, in eine Haltung der Verantwortung für die Gesellschaft hineinzuwachsen.“ (Zitat Ende).

Noch zum Privaten, das bei Roland nicht so einfach fassbar ist, weil sein Leben eine homogene Identität hatte, in der sich Beruf und „Hobby“ nicht trennen lassen. Seine Arbeit und sein wissenschaftliches Denken forderten den ganzen Menschen, wobei aber bei dieser Arbeit ganz wichtig die Kommunikation, die Kooperation und Konfrontation mit anderen Menschen waren. Roland Fischer war alles andere als ein isolierter oder esoterischer Forscher! Seine Tochter Ilse ist erfolgreiche Mathematikerin an der Fakultät für Mathematik der Universität Wien. In Nachrufen auf Mathematiker wird meist angeführt, welches ihre wichtigsten „Ergebnisse“ waren, und man kann das dann durch die Anführung eines mathematischen Satzes belegen. Derartiges macht (mit Ausnahme seiner frühen mathematischen Jahre) bei Roland Fischer einfach keinen Sinn. Das „Ergebnis“ seiner vielfältigen Arbeit ist, was er damit bewirkt hat, und was seine Ideen auch in Zukunft noch bewirken werden. Seine Ergebnisse sind die vielen Menschen, die mit ihm und von ihm gelernt haben, die seine Visionen ernst nehmen und weiter daran arbeiten werden. Das tröstet über den Verlust durch seinen Tod, weil man seine Ideen als Vermächtnis für die Zukunft des Lernens sehen kann und soll.

Schriftenverzeichnis

Mathematik:

1. The capacity and equivocation of a transducer and a connection with Billingsley dimension. *J. Math. Anal. Appl.* 75 (1980), no. 2, 549–561.
2. Sofic systems and graphs. *Monatsh. Math.* 80 (1975), no. 3, 179–186.
3. Über die optimale Beleuchtung einer geraden Straße. *Monatsh. Math.* 79 (1975), 191–199.
4. (mit F. Schweiger) The number of steps in a finite Jacobi algorithm. *Manuscripta Math.* 17 (1975), no. 3, 291–308
5. Ergodische Eigenschaften affiner Modulo-1-Transformationen. *J. Reine Angew. Math.* 271 (1974), 1–7.
6. Über die maximale Entropie bei f-Entwicklungen. Österreich. *Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. S.-B.* II 182 (1974), 1–20.
7. Mischungsgeschwindigkeit für Ziffernentwicklungen nach reellen Matrizen. *Acta Arith.* 23 (1973), 5–12.
8. Über Graphen mit isomorphen Gerüsten. *Monatsh. Math.* 77 (1973), 24–30.
9. Konvergenzgeschwindigkeit beim Jacobialgorithmus. *Anz. Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl.* 1972, no. 8, 156–158.
10. Ergodische Eigenschaften komplexer Ziffernentwicklungen. *Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. S.-B.* II 180 (1972), 49–68
11. Ergodische Theorie von Ziffernentwicklungen in Wahrscheinlichkeitsräumen. *Math. Z.* 128 (1972), 217–230.

Didaktik und Bildungstheorie (Auswahl aus den letzten zwei Jahrzehnten):
Beitrag in Sammelwerk:

1. Interdisziplinarität als Bewegung. In: G. Dressel, W. Berger, K. Heimerl, V. Winiwarter (Hrsg.): Interdisziplinär und transdisziplinär forschen. Praktiken und Methoden, Bielefeld: transcript, 2014, S. 13 - 15.
2. Profession als "Reflective, Intervening Community". In: Christof, E., Schwarz, J.F. (Hrsg.): Lernseits des Geschehens. Über das Verhältnis von Lernen, Lehren und Leiten, Innsbruck, Wien, Bozen: StudienVerlag, 2013, S. 101 - 102.
3. Entscheidungs-Bildung und Mathematik. In: R. M., H. M., K. R., L. K., N. G. (Hrsg.): Mathematik im Prozess. Philosophische, historische und didaktische Perspektiven, Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2013, S. 335 - 345.
4. Fächerorientierte Allgemeinbildung: Entscheidungskompetenz und Kommunikationsfähigkeit mit ExpertInnen. In: F. R., G. U., B. H. (Hrsg.): Domänen fächerorientierter Allgemeinbildung, Linz: Trauner Verlag + Buchservice GmbH, 2012, S. 9 - 17.
5. Bildung als Aushandelung von Bildung. In: F. R., G. U., B. H. (Hrsg.): Domänen fächerorientierter Allgemeinbildung, Linz: Trauner Verlag + Buchservice, 2012, S. 18 - 30.
6. Domänen fächerorientierter Allgemeinbildung. In: F. R., G. U., B. H. (Hrsg.): Domänen fächerorientierter Allgemeinbildung, Linz: Trauner Verlag + Buchservice GmbH, 2012, S. 31 - 59.
7. Entscheidungsgesellschaft, Bildung und kollektives Bewusstsein. In: F. R., G. U., B. H. (Hrsg.): Domänen fächerorientierter Allgemeinbildung, Linz: Trauner Verlag + Buchservice GmbH, 2012, S. 277 - 288.
8. Bildung von Individuum und Gesellschaft. In: F. R., G. U., B. H. (Hrsg.): Domänen fächerorientierter Allgemeinbildung, Linz: Trauner Verlag + Buchservice GmbH, 2012, S. 262 - 276.
9. Bildungsforschungsgeleitete Fachstudien für die LehrerInnenbildung. In: B. G., A. R. (Hrsg.): Perspektiven der PädagogInnenbildung in Österreich. Ivo Brunner zum 60. Geburtstag, Innsbruck, Wien, Bozen: StudienVerlag, 2012, S. 110 - 114.
10. Grundsätzliche Überlegungen zu einer vorsorgenden Gesellschaft und der Rolle von Wissenschaft. Mit Winiwarter V., Schmid M., Schendl G., Veichtlbauer O.: In: E. H., S. M. (Hrsg.): Jenseits traditioneller Wissenschaft? Zur Rolle von Wissenschaft in einer vorsorgenden Gesellschaft, München: oekom Verlag, 2012, S. 49 - 70.
11. Bildung und Bewusstsein der Gesellschaft. In: Z. D. (Hrsg.): Franz-Fischer-Jahrbuch für Philosophie und Pädagogik. Band 16: Situationspädagogik: Ausblicke auf ein Lebenswerk. Anne Fischer-Buck wird 90, Norderstedt, Leipzig: Anne Fischer Verlag, Norderstedt und Leipziger Universitätsver-

lag, 04.02.2011, S. 64 - 77.
12. LehrerInnen – professionell und akademisch. In: H. Zweites (Hrsg.): Kompetenzorientierte LehrerInnenbildung, Wien: Kirchliche pädagogische Hochschule Wien/Krems (KPH), 2011, S. 75 - 78.
13. Mensch und Rechnen. Mit Braunsteiner M.L., Allabauer K.: In: M. Braunsteiner, K. Allabauer (Hrsg.): Zwischenrufer. Festschrift für Erwin Rauscher, St. Pölten, Salzburg: Residenz Verlag, 2011,
14. Wer und wie wollen wir sein? Über die Bedingungen der Möglichkeit einer proVISIONären Gesellschaft. Mit Schendl G., Schmid M., Veichtlbauer O., Winiwarter V.: In: N. M. (Hrsg.): Weltethos und Bildung - User Generated Ethics (Schriftenreihe der Initiative Weltethos Österreich, Band 6). Münster: LIT Verlag, 2011, S. 13 - 30.
15. Gesellschaft als Bildungsprozess. In: E. C., H. W., L. K. (Hrsg.): Kritik und Utopie. Positionen und Perspektiven, Münster: LIT Verlag, 2009, S. 68 - 71.
16. Sicherung von Grundkompetenzen: Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik (Das Projekt „Zentralmatura“). Mit Peschek W. In: ÖMG-Didaktikkommission (Hrsg.): Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik an Höheren Schulen, Wien: Österreichische Mathematische Gesellschaft ÖMG, 2009, S. 92 - 101.
17. Technology, Mathematics and Consciousness of Society. In: Gellert, U., Jablonka, E. (Hrsg.): Mathematisation and Demathematisation. Social, Political and Ramifications, Rotterdam: Sense Publishers, 2007, S. 67 - 80.
18. Wer und wie wollen wir sein? Mit Veichtlbauer O., Winiwarter V., Schmid M.: Klagenfurt am Wörthersee: Alpen-Adria-Universität, Klagenfurt, 2006, S. 94 - 102.
19. The Formal, the Social and the Subjective: Variations on a Theme of Michael Otte. In: H. M., L. J., S. F. (Hrsg.): Activity and Sign. Grounding Mathematics Education 2005, S. 169 - 178.
20. An Interview with Michael Otte. In: H. M., L. J., S. F. (Hrsg.): Activity and Sign. Grounding Mathematics Education, 2005, S. 361 - 378.
21. Bedeutungs- und Nutzungswert der Mathematik. In: L. K., P. S., S. F. (Hrsg.): Mathematik für Menschen. Festschrift für Rudolf Wille, 2004.
22. Reflektierte Mathematik für die Allgemeinheit. In: H. L., H. St. (Hrsg.): Mathematikdidaktik zwischen Fachorientierung und Empirie. Festschrift für Norbert Knoche. 2003, S. 42 - 52.
23. Mathematik und ökonomische Kommunikation. In: P. S., S. F., L. K. (Hrsg.): Mathematik und Kommunikation (Darmstädter Texte zur Allgemeinen Wissenschaft). 2002, S. 151 - 160.
24. Höhere Allgemeinbildung. In: F. A. (Hrsg.): Situation - Ursprung der Bildung (Franz-Fischer-Jahrbuch, Band 6). 2001, S. 151 - 161.
25. Mathematik und Bürokratie. In: L. K., P. S., S. F. (Hrsg.): Mathematik und Mensch. Sichtweisen der Allgemeinen Mathematik (Darmstädter Schriften zur Allgemeinen Wissenschaft, Band 2). 2001, S. 53 - 64.

26. Mathematik als Materialisierung des Abstrakten. In: M. Arnold, R. Fischer (Hrsg.): Studium Integrale (iff-texte, Band 6). 2000, S. 50 - 58.
27. Evaluiert werden als erweiterte Lehre. In: L. St., H. H., K. E. (Hrsg.): Qualitätsentwicklung in Universitäten. Konzepte, Prozesse, Wirkungen (Universität und Gesellschaft, Band 2). 2000, S. 143 - 150.
28. Universitäre Allgemeinbildung. In: M. Arnold, R. Fischer (Hrsg.): Studium Integrale (iff-texte, Band 6), 2000.
29. Wissenschaft und die Ethik des Anderen. In: F. A., F. A., S. K.-H., Z. D. (Hrsg.): Vom Bildungssinn der Wissenschaften und von der Ethik des Anderen (Franz-Fischer-Jahrbücher). 2000, S. 153 - 161.
30. Mathematik anthropologisch: Materialisierung und Systemhaftigkeit. In: D. G., R. B. (Hrsg.): Mensch - Gesellschaft - Wissenschaft. Versuch einer Reflexiven Historischen Anthropologie 1999, S. 153 - 168.
31. Wissenschaft und Bewusstsein der Gesellschaft. In: G. F., A. B. (Hrsg.): Konstruktion und Verfremdung. Von der Wirklichkeit zur Realität 1999, S. 69 - 82.

Beitrag in Zeitschrift:

1. Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Mit Peschek W.: In: Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, Berlin: Gesellschaft für Didaktik der Mathematik , 2010, S. 92 - 101.
2. Schulpolitik und LehrerInnenprofessionalität. In: ide (Informationen zur Deutschdidaktik) Innsbruck, Wien, Bozen: StudienVerlag, 2009, S. 127 - 128.
3. Kein Reinheitsgebot für die Wissenschaft! Kritik zu „Fehlfunktionen der Wissenschaft“ von Klaus Fischer. In: Erwägen Wissen Ethik, 2007, S. 20 - 21.
4. Materialization and Organization: Towards a Cultural Anthropology of Mathematics. In: J. Maasz u. W. Schlöglmann (eds.): New Mathematics Education Research and Practice. Rotterdam: Sense Publishers, 2006.
5. Zur Entstehung des Journals – Erinnerungen der ersten Herausgeber. Mit Vollrath H.-J., Kirsch A.: In: Journal für Mathematik-Didaktik, 2004, S. 183 - 190.
6. Höhere Allgemeinbildung und Bewusstsein der Gesellschaft. In: Erziehung und Unterricht, 2003, S. 559 - 566.
7. Die heimliche Allianz der Universitätsgegner. In: Unisono, 2002, S. 8 - 9.
8. Die Problematik der scharfen Grenze. Oder: Was herauskommt, wenn man die Definitionen zu ernst nimmt. (Kritik von H. Willkes's „Die Gesellschaft der Systemtheorie“). In: Ethik und Sozialwissenschaft, Opladen: Westdeutscher Verlag, 2000, S. 226 - 228.

Fach- oder Lehrbuch:

1. Domänen fächerorientierter Allgemeinbildung. Mit Greiner U., Bastel H.: (Hrsg.). (1. Auflage), Linz: Trauner Verlag + Buchservice GmbH, 2012,

302 S.
2. Materialisierung und Organisation. Zur kulturellen Bedeutung der Mathematik. 1. Auflage, 2006, 292 S.
3. Pädagogik und Fachdidaktik für Mathematiklehrer. Mit Krainer K., Malle G., Posch P., Zenkl M.: (Hrsg.). (Schriftenreihe der Mathematik, Band 14), Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, 1985, 394 S.

Adresse des Autors:
Willi Dörfler
Universität Klagenfurt
Institut für Mathematik
Universitätsstraße 65–67
A-9020 Klagenfurt am Wörthersee
email willi.doerfler@aau.at

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 243 (2020), 53–56

Roman Liedl 1940–2019

Ulrich Oberst
Universität Innsbruck

Am 1. August 2019 starb mein geschätzter Kollege Univ.-Prof. emeritus Dr. Roman Liedl im achtzigsten Lebensjahr nach längerer schwerer Krankheit. Seiner Familie, d.h. seiner Gattin Mag. Helga, seinem Sohn Univ.-Prof. Dr. Klaus und seiner Tochter Dr. Doris, spreche ich noch einmal mein herzliches Beileid aus. Dieser Nachruf ist Professor Liedls wissenschaftlichem und künstlerischem Wirken gewidmet.

Fotonachweis: Helga Liedl

Schon mit 24 Jahren wurde er am Institut für Mathematik der Universität Innsbruck promoviert, mit 27 Jahren habilitiert und mit 30 Jahren zum ordentlichen

ISSN 0020-7926

Universitätsprofessor ernannt, und zwar als Nachfolger unseres bekannten Vorgängers Univ.-Prof. Dr. Wolfgang Gröbner.

Professor Liedl war ein Mensch mit mehreren wissenschaftlichen, technischen und künstlerischen Interessen, Begabungen und schöpferischen Fähigkeiten und auch viel menschlichem Mitgefühl, insbesondere für Freunde und Kollegen mit ihren eigenen Sorgen. An der Universität wie auch privat, z.B. im Rotarierklub, war er mit vielen Kollegen und Freunden vernetzt.

1. Seine rein mathematische Forschung war vor allem durch zwei Themen bestimmt:

   (a) In der Dissertation und der Habilitation behandelte er Walsh-Funktionen und Walsh-Fourier-Reihen, d.h., etwas allgemeiner, die harmonische Analyse und Fouriertransformation auf den kompakten abzählbaren Produkten von (diskreten) endlichen abelschen Gruppen, insbesondere der Gruppe mit zwei Elementen.

   (b) Eine sehr erfolgreiche Idee um 1980 war die Konstruktion der Pilgerschritttransformation, mit der in verschiedenen Fällen die wichtigen einparametrigen Untergruppen von Liegruppen bestimmt werden können. Mehrere seiner Schüler und Kollegen haben dieses Gebiet weiterentwickelt, z.B. sein wissenschaftlicher Enkel P. Stadler mit *The short ruler on the torus, J. Difference Eq. Appl. 25 (2019).* In diesem Zusammenhang bestand auch eine Kooperation mit der Arbeitsgruppe von Univ.-Prof. Dr. L. Reich von der Universität Graz und mehreren ausländischen Kollegen, vor allem aus Polen. Die Arbeitsgruppe Liedl verfasste Beiträge und organisiert(e) Tagungen und Tagungsberichte über Iterationstheorie und Funktionalgleichungen, z.B. auch die kommende Konferenz *International Symposion on Functional Equations*, Innsbruck, Juni 2020.

   (c) Professor Liedl war jahrelang Mitherausgeber der Jahrbücher *Überblicke Mathematik* aus dem BI-Wissenschaftsverlag. Dort erschien 1992 auch sein Lehrbuch (mit K. Kuhnert) *Analysis in einer Variablen: eine Einführung für ein praxisorientiertes Studium*. Eine Besonderheit dieses Buchs wird durch die zweite Hälfte des Titels charakterisiert. Das besondere Interesse von Roman an praxisorientierter Mathematik wurde schon in seiner Schulzeit – er besuchte die Höhere Technische Lehranstalt in der Anichstraße in Innsbruck – grundgelegt. Diese Schulbildung ermöglichte ihm auch den Entwurf und Bau seines Familienwohnhauses mit eigenen Händen.

   (d) Im Rahmen eines Humboldt-Stipendiums 1968/69 an der Universität München bei dem Logiker Professor Schütte befasste er sich auch viel mit Logik, auch danach in der Lehre. Er betreute z.B. die mathematische Doktorarbeit *Logik der Fragen* des bekannten Tiroler Schriftstellers Norbert Gstrein, in dessen Romanen das Innsbrucker Institut für Mathematik mehrfach vorkommt. Sein Interesse allgemein an Philosophie hat später zu dem über 700-seitigen philosophischen Werk (mit weiteren Autoren) (2017) mit dem Titel *Man sollte schweigen! Interkulturelle Naturphilosophie. Gedanken über den Wahrheitsglauben* geführt. Dieses ist im Internet frei herunterzuladen. Der Titel zeugt davon, dass Professor Liedl ein Skeptiker war und behauptete Wahrheiten und Bedeutungen eigenständig prüfte, insbesondere auch in der mathematischen Forschung. In dieser Hinsicht gibt es Ähnlichkeiten mit seinem Vorgänger Professor Gröbner. Die Beziehung zu Professor Schütte spielte bei meiner Berufung nach Innsbruck im Jahr 1972 eine Rolle.

2. Herr Professor Liedl hielt jahrelang den viersemestrigen Grundkurs aus *Analysis*. Auch in der höheren Lehre war er sehr erfolgreich. Vier seiner Schüler wurden sub auspiciis praesidentis promoviert und haben danach eine erfolgreiche Universitätskarriere ergriffen. Schon als junger Dozent hat er offenbar die späteren Linzer Mathematikprofessoren Pichler und Weiss positiv beeinflusst. Seine Schüler und Schülerinnen schätzten seine breite Bildung, gute Betreuung, Ermutigung, Aufgeschlossenheit gegenüber neuen Ideen, auch ausgefallenen, und den Freiraum, den er ihnen bei ihrer Arbeit ließ. In den späteren Jahren hat er sich auch intensiv mit der Vorlesung *Schulmathematik* für Lehramtsstudierende befasst.

3. Herr Professor Liedl hatte die unter Mathematikern an der Universität eher seltene Gabe, die Anwendbarkeit von einfacher, aber wichtiger Mathematik in Gebieten der Technik und Kunst zu erkennen und diese Einsicht dann auch selbst umzusetzen. Zum Beispiel hat er sich in verschiedener Weise mit Optik, Sehen und Malerei befasst und in den allerletzten Lebensjahren noch eine psychoakustische Dissertation am Mozarteum betreut. Er arbeitete schon früh mit einem leistungsfähigen Apple-Rechner.

   (a) Zunächst einmal war er ein künstlerischer Maler von zahlreichen Bildern.

   (b) Für die Firma Swarovski hat er in den 1970er-Jahren mit K. Kuhnert optimale Randbegrenzungsrückstrahler für Straßen berechnet.

   (c) Wenn man nach der Resonanz im Internet geht, war Professor Liedls erfolgreichstes Projekt sein Buch *Die Pracht der Farben: Eine Harmonielehre mit Bildbeispielen von S.N. Amerstorfer, Spektrum Akademischer Verlag, 1997*. Er entwickelte dort eine ästhetische Harmonielehre der Farben, wohl auf der Grundlage der Farbenlehre von Goethe, mithilfe der Spiegelung von Winkeln an einem Durchmesser des Farbkreises, wobei die beiden Enden des Durchmessers Komplementärfarben entsprechen. Eine originale und offenbar praktisch anerkannte Idee war der sogenannte Winkelkontrast. Bei dieser Theorie geht es natürlich auch um individuelle Wahrnehmung von Farben, also nicht nur um Naturwissenschaft, sondern auch um Psychologie und Geschmack.

(d) In einem ebenfalls dem Sehen gewidmeten Projekt (Dissertation Dr. G.K. Kranewitter (2000)) geht es um die Messung der Helligkeitswahrnehmung von Farben. Dazu wurde die Methode der teeming-Photometrie von Kranewitter und Liedl entwickelt.

(e) Dem Hören von Intervallen und der Psychoakustik ist die letzte von Professor Liedl betreute Doktorarbeit gewidmet (Dissertation Univ.-Prof. (für Klavier) Dr. E. Salmutter, Mozarteum Innsbruck (2017)). Töne, mathematisch also Fourierreihen mit ihren Oberton-Frequenzen und -Amplituden, spielen dabei natürlich eine große Rolle, welche in einer Variante auch das Thema seiner Habilitation waren. Er hatte allgemein Interesse an Musik, insbesondere der von Arnold Schönberg.

Adresse des Autors:
Ulrich Oberst
Universität Innsbruck
Institut für Mathematik
Technikersstraße 13
A-6020 Innsbruck
email ulrich.oberst@uibk.ac.at

Buchbesprechungen

C. De Concini, C. Procesi: The Invariant Theory of Matrices. (University Lecture Series, Vol. 69.) American Mathematical Society, Providence (USA), 2017, 153 S. ISBN 978-1-4704-4187-6 P/b $ 44.

Die Gruppe $\mathrm{GL}(m,F)$ aller invertierbaren $m \times m$-Matrizen mit Koeffizienten in einem unendlichen Körper F beliebiger Charakteristik operiert durch simultane Konjugation auf dem Vektorraum $M(m,F)^n$ aller n-Tupel von $m \times m$-Matrizen:

$$\text{für } T \in GL(m,F) \text{ und } (A_1,A_2,\ldots,A_n) \in M(m,F)^n \text{ ist}$$

$$T \cdot (A_1,A_2,\ldots,A_n) := (TA_1T^{-1},TA_2T^{-1},\ldots,TA_nT^{-1}).$$

Für jedes n-Tupel $(A_1,A_2,\ldots,A_n) \in M(m,F)^n$ heißt

$$\{T \cdot (A_1,A_2,\ldots,A_n) \,|\, T \in GL(m,F)\}$$

die $GL(m,F)$-Bahn durch $(A_1,A_2,\ldots,A_n)$. Die Invariantenalgebra dieser Operation ist die Algebra aller Polynomfunktionen (in $n \cdot m^2$ Variablen) auf $M(m,F)^n$, die auf allen $GL(m,F)$-Bahnen konstant sind.
Zum Beispiel: Für $n = 1$ und $m = 2$ wird diese Invariantenalgebra von den Polynomfunktionen (in 4 Variablen) Determinante und Spur erzeugt. Diese zwei Erzeugenden sind algebraisch unabhängig.

In diesem Buch beschreiben die Autoren, die zu den führenden Experten dieses Gebiets gehören, diese Invariantenalgebra (für beliebige positive ganze Zahlen m und n) durch Erzeugende und Relationen. Sie vermeiden dabei die Verwendung von Ergebnissen der algebraischer Geometrie und wählen stattdessen einen algebraischen und kombinatorischen Zugang. Mit diesem können alle Sätze charakteristikfrei formuliert und bewiesen werden. Wichtigste Hilfsmittel dazu sind die Theorien der quasi-hereditären Algebren und der Standard-Bitableaux. Die Autoren stellen diese und die klassischen Theorie in Charakteristik 0 in den ersten drei Kapiteln des Buchs dar.

F. Pauer (Innsbruck)

M. Montiel, R. W. Peck (eds.): Mathematical Music Theory. Algebraic, Geometric, Combinatorial, Topological and Applied Approaches to Understanding Musical Phenomena. World Scientific Publishing Co., Singapur, 2019, 372 S. ISBN 978-981-3235-30-4 H/b £ 115.

Verbindungen zwischen Mathematik und Musik gibt es mannigfache. Auch in diesem Band sind (dem Untertitel entsprechend) Beiträge sehr unterschiedlicher Ausrichtung versammelt, verfasst von vorwiegend in den USA tätigen Autoren und gegliedert in drei Teile.

Der erste Teil enthält acht Artikel mit algebraischen und kombinatorischen Zugängen im Zentrum. Doch auch innerhalb dieser thematischen Einschränkung herrscht beträchtliche Diversität. Die Titel (mit den Autoren in Klammer) lauten: From Musical Chords to Twin Primes (Jack Douthett, David Champitt und Norman Carey); Hypercubes and Generalized Cohn Cycle (Jack Douthett, Peter Steinbach und Richard Hermann); Associahedra, Combinatorial Block Designs and Related Structures (Franck Jedrzejewski); Rhythmic and Melodic L-canons (Jeremy Kastine); The Fibonacci Sequence as Metric Suspension in Luigi Nono's *Il Canto Sospeso* (Jon Kochavi); One Note Samba: Navigating Notes and Their Meanings Within Modes and Exo-modes (Thomas Noll); Difference Sets and All-Directed-Interval Chords (Robert W. Peck); Harmonious Opposition (Richard Plotkin).

Ähnliches (nämlich beträchtliche Diversität) gilt auch für den zweiten Teil, der geometrischen, topologischen und graphentheoretischen Zugängen gewidmet ist. Er enthält sechs Artikel: Orbifold Path Models for Voice Leading: Dealing with Doubling (James R. Hughes); Reflections on the Geometry of Chords (Thomas A. Ivey); Theoretical Physics and Category Theory as Tools for Analysis of Musical Performance and Composition (Maria Mannone); Intuitive Musical Homotopy (Aditya Sivakumar und Dimitri Tymoczko); Geometric Generalizations of the *Tonnetz* and Their Relation to Fourier Phases Spaces (Jason Yust); Deterministic Geometries: A Technique for the Systematic Generation of Musical Elements in Composition (Brent A. Milam).

Der dritte und letzte Teil schließlich vereint drei Beiträge zu Abstands- und Ähnlichkeitsmaßen in der Musik: Flamenco Music and Its Computational Study (Francisco Gómez), Examining Fixed and Relative Similarity Metrics Through Jazz Melodies (David J. Baker und Daniel Shanahan); In Search of Arcs of Prototypicality (Daniel Shanahan).

Auf eine repräsentative Auswahl dieser insgesamt 17 Artikel detaillierter einzugehen, würde den Rahmen sprengen, einzelne hervorzuheben wiederum bedeutete eine willkürliche, unausgewogene Gewichtung. Daher begnügen wir uns abschließend mit folgendem kurzen Resümee.

Als Werk zahlreicher Autoren strebt der vorliegende Band offenbar nicht die einheitliche Darstellung einer abgerundeten mathematischen Musiktheorie für interessierte Einsteiger in das Gebiet an. Neulinge mögen sich eher von der Vielfalt des gebotenen Panoptikums und der fortgeschrittenen Differenzierung dieses Gebiets beeindrucken lassen. Wer sich jedoch zu einem der angeschnittenen Themen selbst forschend betätigen möchte, wird den Band nicht missen wollen und darin vielleicht mancherlei Anknüpfungspunkte für eigene Fortsetzungen finden.

R. Winkler (Wien)

Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

Korrektur in Heft Nr. 242

Die Buchbesprechung von Robert Geretschläger zum Buch "Methods of Solving Number Theory Problems"von E. Grigorieva auf S. 42-43 der letzten IMN (Heft Nr. 242) wurde leider unter falschem Titel abgedruckt (und fälschlicherweise dem Buch "Introduction to Analysis on Graphs" von A. Grigor'yan zugeordnet, dessen Review von Stephan Wagner im selben Heft erschienen ist).

Neue Mitglieder

Peyrolón Pablo, Dr. – Währingerstr. 99/14, 1180 Wien. geb. 1971. Ökonom und Neurowissenschaftler. Lehrtätigkeit an verschiedenen öffentlichen und privaten Universitäten und Fachhochschulen in Europa und Lateinamerika. Autor des Buchs “Spieltheorie und strategisches Denken”, essentials, Springer Verlag, 2019. email *ppeyrolon@gmail.com*

Kühn Christian – Boltzmannstr. 3, 85748 Garching bei München. geb. 1981. Mathematikstudium an der Jacobs Universität Bremen (2005) und an der Universität Cambridge (2006), Doktorat Cornell University (2010). Weitere Stationen MPI Dresden, Postdoc an der TU Wien, Leibniz Fellow am MFO. Seit 2016 Assistenzprofessor an der TU München sowie External Faculty Fellow am Complexity Science Hub Vienna. http://www.multiscale.systems. email *ckuehn@ma.tum.de*

Passegger Albert Georg – 1130 Wien. geb. 1991. Studium der Physik, Austrophysik und Mathematik an der Universität Wien. Derzeit Postdoc am MPI Leipzig. https://personal-homepages.mis.mpg.de/passegge. email *agpass1@gmail.com*

Prochno Joscha, Dr. – Heinrichstr. 36, 8010 Graz. geb. 1982. Promotion an der Universität Kiel. Berufliche Stationen: Universität Jena, University of Hull, Lise-Meitner-Stipendium an der JKU, University of Alberta in Edmonton. Derzeit Assistenzprofessor an der Universität Graz. https://homepage.uni-graz.at/de/joscha.procho. email *joscha.prochno@uni-graz.at*

Steinöcker Gerrit, Dipl.-Ing. – Apfelstr. 14, 4621 Leombach. geb. 1975. Studium der Technischen Mathematik an der JKU Linz. Derzeit Trainer in Mathematikkursen am WIFI und Functional Safety Manager bei Magna Steyr. email *gerrit.steinoecker@gmail.com*

Österreichische Mathematische Gesellschaft

Gegründet 1903
http://www.oemg.ac.at/
email: *oemg@oemg.ac.at*

Sekretariat:

Alpen-Adria-Universität Klagenfurt,
Institut für Mathematik
Universitätsstraße 65-67
A-9020 Klagenfurt
email: *oemg@oemg.ac.at*

Vorstand des Vereinsjahres 2020:

B. Kaltenbacher (Univ. Klagenfurt): Vorsitzende
J. Wallner (TU Graz): Stellvertretender Vorsitzender
C. Fuchs (Univ. Salzburg): Herausgeber der IMN
M. Ludwig (TU Wien): Schriftführerin
M. Haltmeier (Univ. Innsbruck): Stellvertretender Schriftführer
B. Lamel (Univ. Wien): Kassier
P. Grohs (Univ. Wien): Stellvertretender Kassier
E. Resmerita (Univ. Klagenfurt): Beauftragte für Frauenförderung
C. Heuberger (Univ. Klagenfurt): Beauftragter f. Öffentlichkeitsarbeit

Beirat:

A. Binder (Linz)
M. Drmota (TU Wien)
H. Edelsbrunner (ISTA)
H. Engl (Univ. Wien)
H. Heugl (Wien)
W. Imrich (MU Leoben)
M. Kim (MathWorks)
M. Koth (Univ. Wien)
C. Krattenthaler (Univ. Wien)
M. Oberguggenberger (Univ. Innsbruck)
W. Müller (Univ. Klagenfurt)
H. Niederreiter (ÖAW)
W. G. Nowak (Univ. Bodenkultur)
W. Schachermayer (Univ. Wien)
K. Sigmund (Univ. Wien)
H. Sorger (Wien)
R. Tichy (TU Graz)
H. Zeiler (Wien)

Vorsitzende von Sektionen und Kommissionen:

W. Woess (Graz)
H.-P. Schröcker (Innsbruck)
C. Pötzsche (Klagenfurt)
F. Pillichshammer (Linz)
S. Blatt (Salzburg)
I. Fischer (Wien)
H. Humenberger (Didaktikkommission)
W. Müller (Verantwortlicher für Entwicklungszusammenarbeit)

Die Landesvorsitzenden und der Vorsitzende der Didaktikkommission gehören statutengemäß dem Beirat an.

Mitgliedsbeitrag:

Jahresbeitrag: € 35,–

Bankverbindung: IBAN AT83-1200-0229-1038-9200