Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Die IMN wurden 1947 von R. Inzinger als „Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien" gegründet. 1952 wurde die Zeitschrift in „Internationale Mathematische Nachrichten" umbenannt und war bis 1971 offizielles Publikationsorgan der „Internationalen Mathematischen Union".

Von 1953 bis 1977 betreute W. Wunderlich, der bereits seit der Gründung als Redakteur mitwirkte, als Herausgeber die IMN. Die weiteren Herausgeber waren H. Vogler (1978–79), U. Dieter (1980–81, 1984–85), L. Reich (1982–83), P. Flor (1986–99) und M. Drmota (2000–2007).

Herausgeber:

Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. email *imn@tuwien.ac.at*, *http://www.oemg.ac.at/*

Bezug:

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen.
Jahresbeitrag: € 20,–

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria–Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC/SWIFT-Code BKAUATWW).

Eigentümer, Herausgeber und Verleger: Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr. Math. Gesellschaft. Druck: Grafisches Zentrum, Wiedner Hauptstraße 8–10, 1040 Wien.

ISSN 0020-7926

Österreichische Mathematische Gesellschaft

Gegründet 1903

http://www.oemg.ac.at/
email: *oemg@oemg.ac.at*

Sekretariat:

TU Wien, Institut 104,
Wiedner Hauptstr. 8–10, A 1040 Wien.
Tel. +43-1-58801-11823
email: *sekr@oemg.ac.at*

Vorstand des Vereinsjahres 2010:

M. Drmota (TU Wien): Vorsitzender
M. Oberguggenberger (Univ. Innsbruck): Stellvertretender Vorsitzender
J. Wallner (TU Graz):
Herausgeber der IMN
B. Lamel (Univ. Wien): Schriftführer
A. Ostermann (Univ. Unnsbruck):
Stellvertretender Schriftführer
G. Larcher (Univ Linz): Kassier
P. Kirschenhofer (MU Leoben):
Stellvertretender Kassier
G. Schranz-Kirlinger (TU Wien):
Beauftragte für Frauenförderung
G. Teschl (Univ. Wien):
Beauftragter f. Öffentlichkeitsarbeit

Beirat:

A. Binder (Linz)
U. Dieter (TU Graz)
H. Engl (Univ. Wien)
P. M. Gruber (TU Wien)
G. Helmberg (Univ. Innsbruck)
H. Heugl (Wien)
W. Imrich (MU Leoben)
M. Koth (Univ. Wien)
C. Krattenthaler (Univ. Wien)
W. Kuich (TU Wien)
R. Mlitz (TU Wien)
W. Müller (Univ. Klagenfurt)
W. G. Nowak (Univ. Bodenkult. Wien)
L. Reich (Univ. Graz)
N. Rozsenich (Wien)
W. Schachermayer (Univ Wien)
F. Schweiger (Univ. Salzburg)
K. Sigmund (Univ. Wien)
H. Sorger (Wien)
H. Strasser (WU Wien)
R. Tichy (TU Graz)
W. Wurm (Wien)

Vorstand, Sektions- und Kommissionsvorsitzende gehören statutengemäß dem Beirat an.

Vorsitzende der Sektionen und Kommissionen:

W. Woess (Graz)
G. Kirchner (Innsbruck)
C. Nowak (Klagenfurt)
F. Pillichshammer (Linz)
P. Hellekalek (Salzburg)
C. Krattenthaler (Wien)
H. Humenberger (Didaktikkommission)

Mitgliedsbeitrag:

Jahresbeitrag: € 20,–

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria–Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC BKAUATWW).

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Nr. 217 (65. Jahrgang) **August 2011**

Inhalt

Die Figur auf der Titelseite illustriert eine der berühmtesten Entdeckungen des heurigen Abelpreisträgers John Milnor. Ein S^3-Bündel über S^4 entstehe durch Verkleben von zwei Exemplaren des trivialen S^3-Bündels $\mathbb{R}^4 \times S^3$ mittels

$$(a,b) \in (\mathbb{R}^4 \setminus 0) \times S^3 \mapsto \left(\frac{a}{|a|^2}, \frac{a^2 b a^{-1}}{|a|} \right) \in (\mathbb{R}^4 \setminus 0) \times S^3,$$

wobei a,b als Quaternionen betrachtet werden. Das Resultat ist eine *exotische Sphäre* homöomorph zu S^7, welche jedoch nicht diffeomorph zur Einheitskugel des $\mathbb{R}^8$ ist.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 217 (2011), 1–37

Die Entstehung des Begriffs der Homologiegruppe

Nicolas Basbois
Université de Nice

Dies ist die Übersetzung aus dem Französischen des Artikels „L'emergence de la notion de groupe d'homologie" von Nicolas Basbois, der ursprünglich in der Gazette des Mathématiciens*, n^{o}127, S. 15–44 (2011), der Société Mathématique de France erschienen ist. Sie wird hier mit freundlicher Genehmigung des Autors und der Société Mathématique de France abgedruckt. Die Übersetzung stammt von Christian Krattenthaler.*

Die Einführung[1] algebraischer Konzepte in die Topologie zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts war bekanntlich bestimmend für die weitere Entwicklung dieser Disziplin. Sie hat zur Formulierung neuer Resultate[2] geführt, und sie hat es erlaubt, Kalküle[3] für die explizite Bestimmung topologischer Invarianten zu etablieren. In der Folge hat dies einen neuen Zweig der Mathematik hervorgebracht: die homologische Algebra.[4]

Darüber hinaus geht die Algebraisierung der Topologie Hand in Hand mit dem Enstehen der modernen Algebra. Aufgrund dieser Tatsache allein verdient sie es, als eine der wesentlichen Entwicklungen in der Mathematik im zwanzigsten Jahrhundert studiert zu werden. Noch allgemeiner markiert sie jedoch einen Schlüsselmoment in der Entwicklung der Mathematik, der durch den Begriffs-

[1] Ich möchte Jean-Michel Lemaire für seine Kritik früherer Versionen dieses Artikels danken, Colin McLarty für seine Anmerkungen und seinen Ansporn, ebenso wie Frédéric Patras für seine klugen Ratschläge.

[2] Siehe [Hir99, S. 64]: "The sensational new concepts and results would have been impossible even to formulate without algebraic objects".

[3] Siehe [Wei99, S. 797]: "A 1925 observation of Emmy Noether (...) shifted the attention to the 'homology groups' of a space, and algebraic techniques were developed for computational purposes in the 1930's."

[4] Der Leser wird an [Wei99] für einen Überblick der Geschichte der homologischen Algebra verwiesen und an [Die89] für, neben anderem, einen Überblick der algebraischen Topologie.

ISSN 0020-7926

transfer zwischen traditionell getrennten Gebieten charakterisiert ist, gleichfalls zum Beispiel wie die Algebraisierung der Geometrie durch Descartes. Sie präsentiert sich folglich als ein eminentes historisches Phänomen der Mathematik des zwanzigsten Jahrhunderts, was ohne Zweifel erklärt, dass Jean-Alexandre Dieudonné, der große Verfasser historischer Analysen, sein Hauptwerk in der Geschichte der Mathematik [Die89] der Topologie widmete. Gemäß seiner Analyse handelt es sich hier um eine fundamentale Entwicklung in der Geschichte der Mathematik aus strukturalistischer Perspektive:

- Konvergenz der Methoden und Vereinheitlichung der Mathematik (für uns: Gruppentheorie und Topologie) durch Transfer von Intuition zwischen Disziplinen;
- die deutsche algebraische Schule (Hilbert, E. Noether) als treibende Kraft;
- Aufkommen abstrakter Strukturen, die die ursprünglichen Methoden ersetzen, welche durch das Zurückgreifen auf die Intuition geprägt waren.

Diese Themen wurden im Übrigen bereits von bestimmten Protagonisten der algebraischen Entwicklung der Topologie hervorgehoben, wie etwa von Heinz Hopf und Pawel Alexandroff. Dies wirkte sich dennoch im Allgemeinen zum Nachteil auf die interne Geschichte dieses Phänomens aus, die wir hier vertiefen wollen, indem wir die Priorität des Objektbezugs in der Entstehung des Begriffs der Homologiegruppe herausarbeiten werden.

Man muss verstehen, dass diese Geschichte der Objekte und Konzepte untrennbar mit komplexeren Vorgängen verbunden ist, bei denen die Forschungsprogramme (der Strukturalismus Noethers), die menschlichen und beruflichen Beziehungen (die Kontakte zwischen Noether, Hopf, Alexandroff, Brouwer), das wissenschaftliche Umfeld (die Rolle Göttingens in der Mathematik der 1920er-Jahre) alle eine wesentliche Rolle spielen, wie wir sehen werden. Dennoch ist es die Lösung konkreter mathematischer Probleme, die der Motor der wissenschaftlichen Entwicklung bleibt, selbst bei einem Autor wie Hopf, der nicht zögert, die oben genannten Faktoren in den Vordergrund zu stellen, und sie bietet diesen die Gelegenheit, an der Entstehung eines neuen toplogisch-algebraischen *doxa* teilzuhaben.

Dieser Einfluss vielfacher Faktoren in der „Errichtung“ der modernen algebraischen Topologie erscheint uns im Übrigen als ein Schulbeispiel für die Mathematik des zwanzigsten Jahrhunderts, und dies ist reichliche Rechtfertigung, dass wir dies hier zur Sprache brachten. Am Ende wird unser Ziel zweifach sein: Einerseits ein Bild dieser Geschichte so vollständig wie möglich zu zeichnen, indem wir im Detail auf die Begriffsentwicklung eingehen; und andererseits diese für andere Dimensionen des historischen Phänomens bedeutenden Momente deutlich herauszuarbeiten.

Um nach diesen methodischen Abschweifungen auf unser eigentliches Studienobjekt zurückzukommen: Die Topologie, die, historisch gesehen, bis dahin von einem kombinatorischen Gesichtspunkt aus behandelt worden war, und die sich auf eine Intuition geometrischer Natur stützte, sah sich zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts mit Mitteln der Gruppentheorie und mit abstrakten Konzepte, die manchmal geometrisch schwer zu interpretieren waren, konfrontiert. Diese Wendung in der Entwicklung der Topologie wird traditionell mit der Einführung des Begriffs der Homologiegruppe assoziiert. Hier ist der Grund, weshalb: Bis dahin hatten die Topologen Zahlen (genannt „Betti-“ oder „Torsions-“ Zahlen) ihren Studienobjekten zugeordnet (den Polyedern oder „Komplexen“); es war weitgehend bekannt, jedoch bloß implizit, dass diese Zahlen die Gruppen, die sich hinter den Polyedern verbargen (Gruppen, die, als sie dann eingeführt wurden, „Bettigruppen“ und „Homologiegruppen“ genannt wurden) charakterisieren. Da es gerade diese Zahlen waren, die es erlaubten, die fraglichen Gruppen ohne Mehrdeutigkeit zu beschreiben, war es von vornherein nicht notwendig, die Gruppen in kombinatorischer Topologie auch wirklich einzuführen, wenn nicht um den Preis einer auf den ersten Blick unnötigen Redundanz an Information. Wenn man die Einführung der Betti- und der Homologiegruppen als einen Indikator des Beginns der Algebraisierung der Topologie ansieht, dann deswegen, weil sie die erste Anerkennung eines veritablen Interesses, die Struktur der Gruppe in der Topologie in Betracht zu ziehen, darstellt, und sie schlussendlich den Weg zu einer Verwendung der Gruppentheorie in der Topologie geöffnet hat, wie wir sehen werden.

Dies wirft eine einfache und legitime Frage auf: Wo liegt der präzise Ursprung des Begriffs der Betti-/Homologiegruppe? Sprich: Wer hat sie entworfen? Wer hat sie zum ersten Mal in der mathematischen Literatur betrachtet? Mit welcher Motivation, welchen Resultaten, und mit welchem Zugang?

Diese Fragen sind bereits in früheren Arbeiten betrachtet worden, mit steigendem Interesse in den letzten 20 Jahren. Unsere Arbeit gliedert sich in diese Forschungsthematik ein, mit der Absicht, diese Analysen zu vertiefen. Wir werden, unter anderem, eine Zusammenschau der relevantesten Arbeiten zu diesem Thema geben.[5] Es kristallisiert sich aus diesen heraus, dass Emmy Noether einen entscheidenden Einfluss in der Definition der Betti-/Homologiegruppen hatte und, allgemeiner, in der Einführung der Gruppentheorie in die Topologie. Wenn auch der erste, der die Homologiegruppen definierte, Leopold Vietoris ist, ein Mathematiker, der zu der Zeit, die uns interessiert, in Wien lebte, und dieser sicher nicht eine Emmy Noether nahestehende Person war, kann man doch die Spur einer Begegnung von Vietoris und Noether finden – anlässlich eines Essens bei Brouwer – während dessen sie die Definition der Bettigruppen erklärt haben soll.[6] Es scheint

[5] Wir führen insbesondere [Die84], [Hir99], [ML86], [McL06], [Vol02], [Wei99] an.

[6] Die Begegebenheit wird von Alexandroff erwähnt, der ebenfalls bei dem Essen zugegen war: “In the middle of December Emmy Noether came to spend a month in Blaricum. (. . .) I remember a dinner at Brouwer’s in her honour during which she explained the definition of the Betti groups of complexes, which spread around quickly and completely transformed the whole of topology.” [Alex79, S. 324].

also auf den ersten Blick, dass man einen nicht vernachlässigbaren Teil der Entdeckung Vietoris' dem Einfluss Noethers zuschreiben muss.

Diese oberflächliche geschichtliche Analyse gibt die Realität in der Tat nur sehr schlecht wieder. Wie wir im Detail erklären werden, kann man der folgenden Behauptung Klaus Volkerts nur zustimmen: „Die Algebraisierung in diesem Sinne scheint in zwei von einander unabhängigen Entwicklungslinien begonnen zu haben."[7] Diese zwei Entwicklungslinien, die zur Konzeption und zur Verwendung der Homologiegruppen geführt haben, werden hauptsächlich von Noether und Hopf auf der einen Seite, und von Vietoris auf der anderen Seite repräsentiert. Wenn auch das konzeptuelle Umfeld, das die großen Forschungsprogramme boten – wie das Entstehen der modernen Algebra und des Strukturalismus –[8], offensichtlich eine wichtige Rolle gespielt hat, so hat die Arbeit an den eigentlichen Konzepten die wesentliche Rolle gespielt; das ist jedenfalls eine unserer Thesen. Die direkte Analyse der Texte der zitierten Autoren ist es auch, die imstande ist, die fundamentalen Gegensätze zwischen gleichzeitig entwickelten Methoden, ihren dahinterliegenden Philosophien, ihren Zielen und ihren Resultaten klar herauszuarbeiten. Wir konzentrieren uns aus diesem Grund auf die minutiöse Analyse der allerersten Texte, wo das Konzept der Betti-/Homologiegruppe auftaucht. Diese Analyse erlaubt es, die Rolle des Tischgesprächs, das Noether während jenes Abendessens bei Brouwer geführt hat, und nebenbei die Rolle, die Brouwer in den Arbeiten von Alexandroff und Vietoris gespielt hat, besser zu bewerten.

Wir werden damit beginnen, kurz den groben Rahmen der Untersuchungen der Topologie in den 1920er-Jahren in Erinnerung zu rufen. Der – propädeutische – zweite Abschnitt wird sich für das *Abstract* eines Vortrags von Emmy Noether aus dem Jahr 1925 interessieren, das den Keim der Homologiegruppe in sich trägt, und wir werden eine gedankliche Grundlage für das Studium der Texte schaffen, die in den darauffolgenden Abschnitten analysiert werden. Wir werden bei dieser Gelegenheit die (raren) Vorkommen des Gruppenbegriffs vor 1925 erwähnen, um den Vorstoß, der durch das Tischgespräch Noethers angeregt wurde, ins rechte Licht zu setzen. Anschließend werden wir uns ins Zentrum der mathematischen Analyse der – im Zusammenhang mit unserer Untersuchung – wichtigsten Artikel der Epoche begeben, nämlich eine Mitteilung [Vie27A] von Vietoris in den *Mathematischen Annalen*, die dem Artikel [Vie26] aus dem Jahr 1926 nachfolgt, und die Artikel *Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel* von Heinz Hopf und *Über abstrakte Topologie* von Walther Mayer.[9] Diese werden in den Abschnitten 3, 4 und 5 einer spezifischen Analyse unterzogen. Wir werden diese Artikel einander gegenüberstellen und wir werden im Besonderen Noethers Einfluss auf die Arbeit Hopfs herausstreichen. Schließlich werden wir im sechsten Abschnitt diskutieren, wie die Arbeit Vietoris' einzuordnen ist, wenn sie den

[7] Siehe [Vol02, S. 283].
[8] Siehe [Cor96].
[9] [Hop28B] beziehungsweise [May29].

Ideen Noethers (die Alexandroff an ihn übermitteln konnte) und Brouwers gegenübergestellt werden.

1 Konzeptueller Hintergrund: Die kombinatorische Topologie in den 1920er-Jahren

Das Ziel dieses Abschnitts ist nicht, die Entwicklungsgeschichte der Topologie, oder *Analysis Situs*, seit den Arbeiten Poincarés am Ende des 19. Jahrhunderts nachzuzeichnen. Wir verweisen den interessierten Leser, der mehr über diese Entwicklung erfahren will, unter anderem auf die ersten Seiten in [Wei99] und auf die Abschnitte 7.2 und 7.3 in [Epp99] sowie auf [Sar99] für eine zusammenfassende Analyse des Werks von Poincaré. Wir wollen dem Leser hier bloß die Schlüsseldefinitionen und -konzepte geben, die zum Verständnis der Objekte, die im Zentrum der Gedankengänge von Noether, Vietoris, Hopf, usw., stehen, notwendig sind, und die wir im Folgenden diskutieren werden. Ungeachtet der relativ abstrakten und axiomatischen Darstellung, die nun folgt, darf der Leser nicht vergessen, dass die Topologie stark geometrische Inspirationsquellen besitzt, die im verwendeten Vokabular ersichtlich sind.

Ohne im Detail auf die verschiedenen Terminologien einzugehen, noch auf eine historische Beschreibung der Entwicklung der Topologie seit den Arbeiten Poincarés, können wir doch einen unter den Topologen der 1920er-Jahre gemeinsamen Grundstock von Definitionen angeben. Mehrere Definitionen verschiedener Objekte, die sich gegenseitig überschneiden, existierten gleichzeitig, und wir bevorzugen hier meistens die Version von James Waddell Alexander in [Ale26]. Diese Wahl ist von der Bedeutung der Arbeiten von Alexander in der Topologie motiviert, von der Tatsache, dass sein Artikel aus der Zeit der Arbeiten stammt, die in den darauffolgenden Abschnitten studiert werden, und auch dadurch, dass Hopf scheinbar diese Terminologie in [Hop28B] teilweise aufgreift (wir werden darauf später zurückkommen). Die einzige Ausnahme betrifft den Begriff des „Komplexes", der in [Ale26] (gemäß Alexander selbst, S. 302) eingeschränkter als in den gängigen Definitionen ist.

Beginnen wir damit, die Definition eines *Simplex* in Erinnerung zu rufen: Ein k-*Simplex* ist, gemäß den Worten Alexanders, das k-dimensionale Analogon eines Tetraeders (ein 1-Simplex ist also ein Segment, ein 2-Simplex ein volles Dreieck, ein 3-Simplex ein voller Tetraeder, usw.). Jeder k-Simplex hat einen *Rand*, der als die Menge der Untersimplices (auch *Seiten* genannt) der Dimensionen 0 bis $k-1$ definiert ist (der Rand eines 0-Simplex ist leer). Solcherart definiert, ist ein Simplex vollständig durch seine Ecken (die 0-Seiten) festgelegt.

Man kann sich einen *Komplex* als ein Aggregat von Simplices vorstellen, die eventuell entlang von Seiten „zusammengeklebt" sind. Auf rigorose Art kann ein Komplex als endliche Menge von Simplices definiert werden, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

1. Zwei beliebige Simplices der Menge können nur entlang einer ihrer Seiten einen gemeinsamen Durchschnitt haben.[10]
2. Jede Seite eines Simplex der Menge ist selbst ein Simplex in der Menge.

Die Simplices eines Komplexes Φ werden auch *Zellen* genannt.

Eine *elementare i-Kette* eines Komplexes Φ ist ein symbolischer Ausdruck der Form

$$\pm V_0 V_1 \dots V_i,$$

wo die V_j jeweils die Ecken einer i-Zelle in Φ bezeichnen. Zwei Ausdrücke der vorhergehenden Form werden als identisch betrachtet, wenn sie bis auf eine gerade Permutation der Ecken, aus denen sie sich zusammensetzen, übereinstimmen, und als entgegengesetzt, wenn sie bis auf eine ungerade Permutation der Ecken, aus denen sie sich zusammensetzen, übereinstimmen. Man kann diese Eigenschaft auch so formulieren, dass man sagt, dass eine i-Zelle $|V_0 V_1 \dots V_i|$ zwei verschiedene Orientierungen erlaubt: Jene, die im Folgenden durch die Folge der Symbole $V_0 V_1 V_2 \dots V_i$ definiert ist, und andererseits jene, die beispielsweise durch die Folge der Symbole $V_1 V_0 V_2 \dots V_i$ definiert ist.[11] Wenn man die elementaren i-Ketten mit E_s^i bezeichnet, dann wird jede Linearkombination der Form

$$K^i = \sum_{s=1}^{\alpha^i} x^s E_s^i,$$

wo die x^s ganze Zahlen sind und α^i die Anzahl der elementaren i-Ketten von Φ ist, *i-Kette* von Φ genannt.

Der Rand, der zuvor als Menge von Simplices definiert wurde, kann auch algebraisch auf den Ketten definiert werden: Der *Rand* der elementaren i-Kette $V_0 V_1 \dots V_i$ ist als $(i-1)$-Kette

$$\sum_{s=0}^{i} (-1)^s V_0 \dots V_{s-1} V_{s+1} \dots V_i$$

[10] In [Ale26] gibt Alexander für seine Absichten eine restriktivere Definition als diejenige, die hier ausgeführt ist. Die hier vorgeschlagene Definition ist repräsentativer für die dann gebräuchlichen Definitionen eines Komplexes.

[11] Zum Thema Orientierung verdient die folgende Bemerkung Alexanders Aufmerksamkeit ([Ale26, S. 311]): "We prefer, however, to treat the expressions $\pm V_0 V_1 \dots V_i$ as purely symbolical, so as not to go into the question of just what is meant by an oriented cell." Alexander geht hier mit Absicht abstrakt vor und betrachtet einen symbolischen Ausdruck, ohne zu versuchen, ihm eine geometrische Interpretation oder anderweitige Intuition zu geben. Diese Vorgehensweise setzt sich von Alexanders Absicht ab, einen Simplex durch Rückgriff auf die geometrische Intuition zu definieren (als Analogon eines Tetraeders). Wir werden auf die Frage der Orientierung im Laufe des dritten Abschnitts zurückkommen.

definiert. Die Definition des Randes wird dann auf beliebige Ketten mittels Linearität erweitert.

Ein Kette wird *geschlossen* genannt, oder als *Zykel*[12] bezeichnet, wenn ihr Rand Null ist. Es ist wichtig zu beobachten, dass jeder Rand ein Zykel ist (was die intuitive Vorstellung, dass ein Rand keinen Rand hat, „übersetzt"). Die Homologierelation wird dann in der folgenden Form eingeführt: Ein Zykel K wird *homolog zu* 0 genannt, und man schreibt $K \sim 0$, wenn er der Rand einer Kette von Φ ist. Zwei beliebige Ketten K und $K^{'}$ von Φ werden *homolog* genannt, und man schreibt $K \sim K^{'}$, wenn ihre Differenz homolog zu 0 ist ($K - K^{'} \sim 0$).

Wir können nun die Zahlen, die von Topologen mit Komplexen assoziiert werden, und die später durch die Homologiegruppen ersetzt wurden, einführen. Es handelt sich dabei um die *i-te Zusammenhangszahl* (oder auch *i-te Bettizahl*), $i = 0, 1, \ldots,$ des Komplexes Φ. Diese wird mit P^i bezeichnet und ist definitionsgemäß die maximale Anzahl linear unabhängiger i-Zykel von Φ, modulo der Homologierelation.

Die Bettizahlen können mithilfe einer der wichtigsten Werkzeuge der Topologen vor der Einführung der Homologiegruppen berechnet werden: den *Inzidenzmatrizen*. Wenn sich die Ränder von α^i elementaren i-Ketten E_s^i in der Form

$$\sum_{j=1}^{\alpha^{i-1}} \mu_s^j E_j^{i-1}$$

schreiben lassen, dann ist die Inzidenzmatrix von Φ in der Dimension i die Matrix der Koeffizienten μ_s^j, $1 \leq s \leq \alpha^i$, $1 \leq j \leq \alpha^{i-1}$. Die Inzidenzmatrizen geben eine vollständige Beschreibung der Komplexe, indem sie die Inzidenzrelationen zwischen den elementaren $(i-1)$-Ketten und den elementaren i-Ketten kodieren. Wenn man den Rang der i-ten Inzidenzmatrix mit ρ^i bezeichnet, dann kann man zeigen (wie Alexander in [Ale26, S. 316] erwähnt), dass die i-te Bettizahl von Φ der Gleichung

$$P^i = \alpha^i - \rho^i - \rho^{i+1}$$

genügt. Die Berechnung des Rangs der Inzidenzmatrizen erlaubt es also, die Bettizahlen von Φ zu berechnen. Darüber hinaus wurden seit den Arbeiten Poincarés noch andere Zahlen als bedeutend für die Beschreibung von Komplexen angesehen: Es handelt sich dabei um die *Elementarteiler*[13] der Inzidenzmatrizen, die nicht ± 1 sind, genannt *„Torsionszahlen"*.

[12] In [Ale26] bezeichnet Alexander diesen Begriff als „geschlossene Kette", aber die übliche Terminologie ist die des „Zykel".

[13] Man findet mehr Details zum Thema der Elementarteiler im folgenden Abschnitt.

2 Emmy Noether

Emmy Noether, Tochter des berühmten Mathematikers Max Noether, wurde 1882 in Erlangen geboren. Nachdem sie quasi die Gesamtheit ihres Studiums bis zu den ersten Forschungen in der Invariantentheorie in Erlangen absolviert hat, lässt sie sich 1915 in Göttingen nieder, auf Einladung von David Hilbert und Felix Klein. Ihre Kompetenz im Bereich der Differentialinvarianten sollte Noether ursprünglich dazu anhalten, Hilbert in seinen Forschungen in der mathematischen Physik zu unterstützen, aber sie wandte sich mehr und mehr der Algebra zu. Ihre Arbeiten ab 1920 machten sie zunehmend zur führenden Person in der Algebra am Mathematischen Institut in Göttingen. Aufgrund von Emmy Noethers Einfluss, der durch van der Waerdens Werk *Moderne Algebra* weitergetragen wurde, wird Göttingen als Wiege der modernen Algebra angesehen. Es konnte im Zeitraum 1920 bis zum Beginn der Dreißigerjahre sogar als Welthauptstadt der Mathematik betrachtet werden, dank des Erfolgs der deutschen Mathematik und der Präsenz der größten deutschen Mathematiker jener Zeit am Institut, darunter zuallererst Hilbert, Courant, Klein und natürlich Noether.

Wenn Emmy Noether für ihre entscheidende Rolle im Aufbau der modernen Algebra bekannt ist, so erscheint ihr Einfluss in der Topologie weit weniger offensichtlich zu sein, da sie nie Artikel in Topologie veröffentlicht hat. Dennoch enthält die mathematische Literatur eine ihrer Bemerkungen zu diesem Gebiet: Wir widmen ihr einen wesentlichen Teil dieses Abschnitts. Diese Bemerkung findet sich im *abstract* eines Vortrags, den Noether bei einem Treffen der Göttinger Mathematischen Gesellschaft am 27. Jänner 1925 gehalten hat. Es handelt sich um eine sehr kurze Mitteilung (erschienen 1926) [Noe25], die relativ unbekannt ist.[14]

Der Vortrag Emmy Noethers trägt den Titel *Ableitung der Elementarteilertheorie aus der Gruppentheorie*. Wegen dessen Bedeutung geben wir hier die Zusammenfassung zur Gänze wieder:

(*) *„Die Elementarteilertheorie gibt bekanntlich für Moduln aus ganzzahligen Linearformen eine Normalbasis von der Form* $(e_1y_1, e_2y_2, \ldots, e_ry_r)$*, wo jedes e durch das folgende teilbar ist; die e sind dadurch bis aufs Vorzeichen eindeutig festgelegt. Da jede Abelsche Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden dem Restklassensystem nach einem solchen Modul isomorph ist, ist dadurch der Zerlegungssatz dieser Gruppen als direkte Summe größter zyklischer mitbewiesen. Es wird nun umgekehrt der Zerlegungssatz rein gruppentheoretisch direkt gewonnen, in Verallgemeinerung des für endliche Gruppen üblichen Beweises, und daraus durch Übergang vom Restklassensystem zum Modul selbst die Elementarteilertheorie abgeleitet. Der Gruppensatz erweist sich so als der einfachere Satz; in den Anwendungen des Gruppensatzes – z.B. Bettische und Torsionszahlen in*

[14] Diese Quelle wird kaum zitiert, und wenn, dann geht es nicht mehr kürzer, wie in [ML86], [Wei99] und [McL06], und sie fehlt in den Gesammelten Werken Emmy Noethers. Klaus Volkert reproduziert sie zur Gänze in [Vol02], aber ohne Kommentar.

der Topologie – ist somit ein Zurückgehen auf die Elementarteilertheorie nicht erforderlich.“

Analysieren wir diese wenigen Zeilen. Noether beginnt damit, ein klassisches Resultat in Erinnerung zu rufen: Wenn man ein System von Linearformen mit ganzzahligen Koeffizienten betrachtet, sagen wir $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k$, $\sum_{k=1}^{m} \beta_k x_k$, usw., wo die α_k, β_k, $\ldots$, ganze Zahlen und die x_k Unbestimmte sind, und wenn man N für den $\mathbb{Z}$-Modul schreibt, der von diesen Linearformen erzeugt wird, dann kann man $y_1, \ldots, y_m$ finden, allesamt Linearkombinationen der x_k mit ganzzahligen Koeffizienten, und ganze Zahlen $e_1, \ldots, e_r$[15] , wobei sich aufeinanderfolgende e_i teilen, sodass $(e_1 y_1, \ldots, e_r y_r)$ eine Basis von N bildet. Anders formuliert läuft dieses Resultat darauf hinaus, dass man, wenn man den freien endlich erzeugten Modul M, der von den x_k erzeugt wird, betrachtet, eine Basis $y_1, \ldots, y_m$ finden kann, in der die Linearformen $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k$, $\sum_{k=1}^{m} \beta_k x_k$, $\ldots$, in der einfachsten Weise geschrieben werden können (da sie einfach zu $e_1 y_1$, $e_2 y_2$, $\ldots$, werden). Das Resultat, wie es von Noether präsentiert wird, verbleibt in der Tradition der linearen Gleichungssysteme angesichts dessen, dass es bloß bedeutet, dass man ein Gleichungssystem der Form[16]

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 & + & \alpha_2 x_2 & + \ldots = & A \\ \beta_1 x_1 & + & \beta_2 x_2 & + \ldots = & B \\ \ldots & & & & \end{cases}$$

mithilfe von elementaren Operationen diagonalisieren kann. Es steht außer Zweifel, dass Noether dieser traditionellen Darstellung des *Elementarteilersatzes* den Vorzug gab, um mit ihrem Publikum so weit wie nur möglich auf „gleicher Wellenlänge“ zu bleiben; aber sie hätte sicher eine abstraktere (nur Moduln betrachtende, nicht auf die Sprache der Linearformen zurückgreifende) und allgemeinere (sich nicht auf $\mathbb{Z}$-Moduln beschränkende) Darstellung vorgezogen, die man insbesondere im Buch *Moderne Algebra*[17] ihres Schülers Bartel Leendert van der Waerden findet.

---

[15] genannt „Elementarteiler“.

[16] Am Ende der Manipulationen ist dann das hier betrachtete System in die Form

$$\begin{cases} e_1 y_1 & + & 0 & + 0 \ldots = & A' \\ 0 & + & e_2 y_2 & + 0 \ldots = & B' \\ \ldots & & & & \end{cases}$$

gebracht. Es ist anzumerken, dass selbst die Verwendung des Begriffs eines „Moduls“, oder, in der damaligen Sprache, des „Linearformenmoduls“, an und für sich damals nicht sehr gebräuchlich war, auch wenn sehr klar war, dass die Menge der Zykel insbesondere den Eigenschaften eines Moduls genügte. Die Verwendung von Inzidenzmatrizen und von Matrixoperationen war damals der Usus.

[17] Der Elementarteilersatz, wie ihn van der Waerden in [Wae31, S. 122] formuliert, besagt: *„Wenn N ein Unter-A-Modul eines freien endlich erzeugten A-Moduls M ist, dann existiert eine Basis* $(u_1, \ldots, u_m)$ *von M und eine Basis* $(v_1, \ldots, v_n)$ *von N, mit* $n \leq m$*, und Elemente* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ *von A, sodass* • $v_i = \varepsilon_i u_i$ *für* $i \in \{1, \ldots, n\}$; • $\varepsilon_{i+1} \equiv 0 \ (\varepsilon_i)$.

Dieser Satz gilt im Fall, wo A ein Euklidischer Ring ist, oder auch, wenn A ein Hauptidealring ist.

Noether erklärt dann, dass der Zerlegungssatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen mithilfe der Theorie der Moduln und Elementarteiler bewiesen werden kann, die sie gerade in Erinnerung gerufen hat. In der Tat kann jede endlich erzeugte abelsche Gruppe als Quotient eines freien endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-Moduls und eines Teilmoduls von „Linearformen“ gesehen werden,[18] und daher sieht man – wenn einmal das Verfahren der Elementarteiler etabliert ist –, dass G als direkte Summe von zyklischen Gruppen der Ordnungen $e_1, \ldots, e_r$ und unendlichen zyklischen Gruppen dargestellt werden kann.[19]

Noether merkt weiters an – dies ist der wesentliche Punkt dieser Notiz –, dass man sehr gut auf die Modultheorie verzichten kann, um diesen Satz zu beweisen, und ihn direkt allein mit den Mitteln der Gruppentheorie erhalten kann, indem man den Beweis für die endlichen abelschen Gruppen verallgemeinert,[20] und so daraus die Theorie der Elementarteiler ableiten kann – sie kehrt solcherart die klassische Ordnung, die zu Beginn ihres Vortrags in Erinnerung gerufen wird, vollkommen um, gemäß derer der Zerlegungssatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen aus der Theorie der Elementarteiler abgeleitet wird. Noether betrachtet es sogar als einfacher, so vorzugehen. Diese Feststellung führt sie zum folgenden Schluss: „In den Anwendungen des Gruppensatzes — z.B. Bettische und Torsionszahlen in der Topologie — ist somit ein Zurückgehen auf die Elementarteilertheorie nicht erforderlich.“

Noether legt also als Schlussfolgerung eine Verbindung zwischen ihren theoretischen Überlegungen über abelsche Gruppen und Elementarteilern und der Topologie nahe. Diesen Punkt müssen wir in aller Deutlichkeit klarstellen.

Die Verbindung zwischen Noethers Ausführungen über Moduln und Gruppen und ihrem Schluss, die Betti- und Torsionszahlen betreffend läuft über den Begriff des Moduls. Wie wir im ersten Abschnitt gesehen haben, richtete sich der Blick der Topologen der damaligen Zeit auf die Ketten, welche Linearkombinationen von elementaren Ketten sind. Es ist Poincaré, der die Idee hatte, nicht mit den Simplices und Zellen zu arbeiten, die geometrische Anschauung beinhalten, sondern mit formalen Linearkombinationen dieser Objekte. Was spezielle Ketten betrifft, können Zykel ebenfalls formal addiert werden. Die Zykel bilden also, was man heute einen freien endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-Modul nennt, aber diese Terminologie wurde damals nicht häufig verwendet. Unter den Zykeln sind einige davon Ränder. Gegeben eine Basis $(x_1, \ldots, x_m)$ der Zykeln (als $\mathbb{Z}$-Modul), lassen sich die

[18] Um ein Beispiel zu nennen: Wenn G eine abelsche Gruppe ist, die von den Elementen $g_1, \ldots, g_n$ modulo den Relationen $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k = 0$, $\sum_{k=1}^{n} \beta_k g_k = 0$, usw., erzeugt ist, dann kann man diese als Quotienten des freien $\mathbb{Z}$-Moduls, der von $g_1, \ldots, g_n$ erzeugt ist, und dem Modul, der von den Größen $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k$, $\sum_{k=1}^{n} \beta_k g_k$, usw., erzeugt ist, sehen.

[19] In moderner Sprache heißt das, dass G isomorph zu einem Produkt der Form

$$\mathbb{Z}^p \times (\mathbb{Z}/e_1\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/e_2\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/e_r\mathbb{Z})$$

ist.

[20] Der Zerlegungssatz für endliche abelsche Gruppen ist, gemäß van der Waerden (siehe [Wae85, S. 150]), das erste Mal von Kronecker (siehe [Kro70]) bewiesen worden.

Ränder also als ganzzahlige Linearkombinationen der x_i schreiben, das heißt, sie haben die Form $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k$, $\sum_{k=1}^{m} \beta_k x_k$, usw. Indem man den Algorithmus der Elementarteiler anwendet, erhält man die Torsionszahlen e_i, und die Anzahl dieser Elementarteiler erlaubt es, den Rang der Inzidenzmatrix (siehe den ersten Abschnitt) und daher die Bettizahlen zu bestimmen.

Zusammenfassend war die damalige Sichtweise, in Noethers Formulierung durch Moduln, die folgende: Die Menge N der Ränder einer fixen Dimension k bildet einen freien endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-Modul, den man als Untermodul des freien $\mathbb{Z}$-Moduls M der k-Zykeln sehen kann. Gegeben eine Basis von M, zeigt der Elementarteilersatz, dass man eine Basis $(u_1, \ldots, u_m)$ von M, bestehend aus k-Ketten, und eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von N, bestehend aus k-Zykeln, finden kann, sodass:

– $v_i = \varepsilon_i u_i$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$;
– $\varepsilon_{i+1} \equiv 0\ (\varepsilon_i)$.

Da $\mathbb{Z}$-Moduln als abelsche Gruppen gesehen werden können, laden die Äußerungen Noethers[21] dazu ein, die Mengen von i-Zykeln und jener i-Zykeln, die homolog zu 0 sind, als Gruppen anzusehen. Der Zerlegungssatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen, angewandt auf den Quotienten der Gruppe der i-Zykeln und der Gruppe jener i-Zykeln, die homolog zu 0 sind, bringt dann die i-te Bettizahl und die Torsionskoeffizienten ans Tageslicht (es handelt sich dabei um p beziehungsweise um $e_1, e_2, \ldots, e_r$ in der weiter oben verwendeten Notation). Emmy Noether scheint diese Sichtweise dadurch zu rechtfertigen, dass die Anwendung des Zerlegungssatzes für endlich erzeugte abelsche Gruppen leichter von der Hand geht als jene des Elementarteilersatzes. Auch wenn die Kürze der Mitteilung Noethers uns nur einen beschränkten Zugang zu ihren Ideen erlaubt, kann man darüber hinaus annehmen, dass sie mit der Einführung von gruppentheoretischen Mitteln in der Topologie (über den Umweg der Zykelgruppen, usw.) einen konzeptuellen Gewinn im Auge hatte.

Der von Noether vorgeschlagene Zugang ist – jedenfalls zu diesem Zeitpunkt — durch keinen konkreten Vorteil unterlegt, durch keine Anwendung auf die Vereinfachung irgendeines Beweises oder durch die Herleitung irgendeines neuen Resultats. Es handelt sich um eine einfache Änderung der Sichtweise, um ein grundsätzlich verschiedenes Verständnis der Objekte der kombinatorischen Topologie. Hinter dieser originellen Sichtweise verbirgt sich die Absicht, nicht mehr bei den Zykeln stehen zu bleiben, sondern diese modulo der Homologierelation zu betrachten. Während die Betti- und die Torsionszahlen bis zu diesem Zeitpunkt durch ein rein rechnerisches Verfahren der Zykelmanipulation bestimmt wurden, werden sie mit Noether nun als Charakteristika einer Gruppe erhalten, nämlich der Gruppe, die beim Übergang zum Quotienten der Zykelgruppe und der Gruppe der Ränder, sprich: zum Quotienten modulo der Homologierelation, resultiert. Es

[21] Siehe den letzten Satz im Abstract (*) auf S. 8.

scheint, dass es für bestimmte Mathematiker einige epistemologische Hindernisse gab, diesen Übergang zum Quotienten durchzuführen,[22] was erklärt, dass es von den Arbeiten Poincarés, die insbesondere Betti- und Torsionszahlen hervorhoben, 30 Jahre bis zu Noethers Idee bedurfte, die Menge der Zykeln und der Ränder als abelsche Gruppen zu betrachten.

Eine Analogie kann vielleicht eine Rechtfertigung der Motivation von Noether geben, Gruppen in der Topologie einzuführen, auch wenn ohne unmittelbaren praktischen Gewinn. Die Situation, die wir hier beschrieben haben, ist sehr nahe jener, die von Leo Corry in [Cor96, S. 29–32] bezüglich des Jordan-Hölderschen Satzes geschildert wird. Um dies kurz zusammenzufassen: In einem Artikel aus dem Jahr 1869 führte Camille Jordan den Begriff der *Kompositionsreihe* einer beliebigen nicht-einfachen Gruppe G ein. Es handelt sich dabei um eine aufsteigende Folge von Untergruppen von G, wo jede in der darauffolgenden ein Normalteiler ist, und die minimal ist in dem Sinne, dass keine Untergruppe zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gruppen der Folge eingeschoben werden kann, sodass die vorhergehende Bedingung immer noch erfüllt ist. Jordan bildete die Quotienten der Ordnungen aufeinanderfolgender Untergruppen einer Kompositionsreihe und nannte diese Zahlen *Kompositionsfaktoren* (der Folge). Er bewies, dass die Zahl dieser Faktoren und ihre Werte unabhängig von der betrachteten Kompositionsreihe sind und dass diese daher eine Invariante von G darstellen.

Wie Leo Corry erläutert, erscheint uns diese Formulierung durch numerische Invarianten in Retrospektive als limitiert. Die Arbeit von Otto Hölder im Artikel [Hol89] aus dem Jahr 1889 treibt die Analyse von Kompositionsreihen weiter und zeigt, dass es mehr Lehren zu ziehen gibt, als die einfache Invarianz der Kompositionsfaktoren, die Jordan aufgezeigt hat. In der Tat: Statt bloß die Quotienten der Ordnungen aufeinanderfolgender Untergruppen einer Kompositionsreihe zu betrachten, führte Hölder den Begriff der *Quotientengruppe* ein und bildete den Quotienten aufeinanderfolgender Untergruppen. Mithilfe dieses neuen Begriffs wird der Satz von Jordan zu: *Die Familie der Quotientengruppen, die durch eine Kompositionsreihe von G bestimmt sind, ist eine Invariante*[23] *von G.*

Man kann also in dieser ursprünglichen Entwicklung dieses Satzes, der Jordan-Hölderscher Satz genannt wird, zahlreiche Ähnlichkeiten mit der Bemerkung Noethers, die Gruppentheorie in der Topologie betreffend, sehen. Die wesentliche Information in den zwei Situationen ist zunächst numerisch ausgedrückt; die Hinzufügung einer strukturellen Komponente, die, wie sich herausstellt, in

[22] Auf Seite 191 von [McL06] erwähnt Colin McLarty als Fußnote die Ansicht von Erhard Scholz, gemäß derer sich Weyl widersetzte, Quotientengruppen zu realisieren, da er es nicht mochte, Mengen von unendlichen Mengen zu bilden.

[23] Um ganz genau zu sein: Diese Familie ist die Familie der Quotienten aufeinanderfolgender Untergruppen einer Kompositionsreihe von G. Die Invarianz gilt selbstverständlich bis auf Isomorphie; Hölder stellt gleich am Anfang seines Artikels klar, dass zwei isomorphe Gruppen als zwei gleiche Objekte betrachtet werden können.

beiden Fällen eine Gruppe ist, erlaubt es, das Resultat in abstrakterer Weise zu formulieren und, besonders im Fall des Jordan-Hölderschen Satzes, dabei an Information zu gewinnen. Die Hinzufügung der Struktur erlaubt es, an Tiefe des Verständnisses zu gewinnen, Perspektiven zu öffnen. Im Falle der Arbeit Hölders initiierten die eingeführten neuen Konzepte neue fruchtbare Probleme, wie jene der Faktorisierung und Erweiterung von Gruppen. In der Topologie war die Einführung der Gruppentheorie ein Ursprung eines weitergehenden Verständnisses und führte schließlich zur Entstehung einer neuen Disziplin: der algebraischen Topologie.

Dennoch, im Zusammenhang mit der Bemerkung Noethers brachte die Einführung der Gruppen in der Topologie unmittelbar keine wirklich zusätzliche Information – wenn man sich vor Augen hält, wie wir es bereits erwähnt haben, dass die endlich erzeugten abelschen Gruppen durch die Betti- und Torsionszahlen vollständig charakterisiert sind. Der Gewinn ist hier also weniger offensichtlich als im Rahmen des Wiederaufgreifens des Satzes von Jordan durch Hölder. Es sind die späteren Entwicklungen, darunter zuallererst jene von Vietoris und Hopf, die in den folgenden Abschnitten behandelt werden, die einen ersten Beweis des Vorteils der Einführung der Gruppen in der Topologie erbringen werden.

Bevor wir diesen Abschnitt schließen, wollen wir eine Frage aufwerfen, die sich der Leser berechtigterweise gestellt haben mag. Man kann es in der Tat merkwürdig finden, dass die Idee, Mengen von Ketten, Mengen von Zykeln oder von Rändern als abelsche Gruppen zu betrachten, nicht schon früher aufgetaucht ist. Um hier ganz vollständig zu sein, müssen wir einerseits klarstellen, dass Vorkommen des Gruppenbegriffes im Zusammenhang mit Zykeln vor 1925 sehr wohl existieren, aber andererseits diese im Lichte von Noethers Bemerkung kommentieren. An sich war der Gruppenbegriff in der Topologie keineswegs unbekannt. Poincaré selbst nannte die Menge der Schlingen, die durch einen fixierten Punkt eines Raumes gehen, modulo Homotopie betrachtet, *Fundamentalgruppe* des Raumes. Diese Gruppe wurde von Poincaré und seinen Nachfolgern oft durch Erzeuger und Relationen beschrieben. Poincaré wusste, dass bei Hinzufügung der Relationen der Kommutativität der Erzeuger die Anzahl der verbleibenden linear unabhängigen Erzeuger mit der eindimensionalen Bettizahl übereinstimmt, was ihm einen Zusammenhang zwischen Homotopie und Homologie lieferte, zumindest in Dimension 1. Dennoch wollte Poincaré niemals die Gruppe, die man gerade dadurch erhält, dass man zur Fundamentalgruppe die Relationen der Kommutativität hinzufügt (sprich: die „Abelianisierung“ der Fundamentalgruppe), „Gruppe“ nennen. Wenn man etwa Colin McLarty glaubt, scheint die Erklärung für diesen im Rückblick kuriosen Umstand in Poincarés Ablehnung zu liegen, eine kommutative Gruppe, ja sogar eine Menge, die keine Permutationsgruppe ist, eine „Gruppe“ zu nennen.[24]

[24] Siehe [McL06, S. 207–208].

Eine Weiterführung dieser Idee findet sich in der Dissertation *Analytische Untersuchungen über topologische Gruppen* von Hugo Gieseking (1912), einem Studenten von Max Dehn. In der Tat, indem er sich insbesondere für die Homotopie einer abgeschlossenen orientierbaren Fläche interessierte, ließ sich Gieseking auf die Betrachtung von abelschen Gruppen ein, die man ausgehend von einem Erzeugersystem der Fundamentalgruppe der Fläche erhält. Er zitierte eine frühere Untersuchung von Tietze, die zeigte, dass diese Abelianisierung einer Fundamentalgruppe es erlaubt, die Betti- und Torsionszahlen, die zur Fläche assoziiert sind, zu bestimmen. Gieseking nannte diese Gruppe „Abelsche Gruppe einer geschlossenen zweiseitigen Fläche“.[25]

Man findet die gleiche Konstruktion in der zweiten Ausgabe des Klassikers *Analysis Situs* von Oswald Veblen.[26] Veblen nennt die abelsche Gruppe, die man so erhält (die die 1-dimensionale Homologiegruppe ist), sogar “homology group”, was das erste Erscheinen des Begriffs „Homogiegruppe“ zu sein scheint.

Man darf daher an und für sich nicht allein dabei verbleiben, dass Noether den Gruppenbegriff im Zusammenhang mit der Topologie einführte. Angesichts der vorhergehenden Beispiele kann man ihr nicht absolute Originalität und Exklusivität zugestehen. Jedoch sind die obigen Vorkommnisse des Gruppenbegriffs im Zusammenhang mit Homologie bloß Beispiele in Dimension 1. Es stellt sich heraus, dass zwar die Homologiegruppe in Dimension 1 die Abelianisierung der Fundamentalgruppe ist, aber dass es in höheren Dimensionen keinen ebenso einfachen Zusammenhang zwischen Homologie und Homotopie gibt. Die 1-dimensionale Homologiegruppe, die Gieseking oder Veblen erhalten haben, kommt nicht vom Übergang zum Quotienten der Gruppe der Zykeln und der Gruppe der Ränder, sondern ist einfach die Abelianisierung der Fundamentalgruppe. Der Zugang von Noether geht offensichtlich tiefer. Sie arbeitet mit den Zykeln modulo Homologie, via dem Übergang zum Quotienten der zwei Gruppen, und das in beliebiger Dimension. Ihre Vorgangsweise ist aus diesem Gesichtspunkt heraus vollkommen allgemein, sie ist nicht auf die Dimension 1 beschränkt.

Nachdem uns die Analyse dieser Bemerkung von Noether im Besonderen dazu geführt hat, die Begriffe der Gruppe der Ketten, der Zykeln, usw., und die Verwendung dieser Begriffe, um die Betti- und Torsionszahlen zu berechnen, zu verstehen, können wir nun an das Studium der in der Einführung zitierten Texte schreiten. Wir gehen chronologisch vor und beginnen mit dem Studium des Artikels [Vie27A] von Vietoris, die erste Veröffentlichung, wo eine Definition der Homologiegruppen vorkommt.

[25] Die wenigen Bemerkungen, die wir hier über Gieseking angebracht haben, sind nur ein zusammenfassender Überblick der Studie [Van92, S. 174–178] von Ria Vanden Eynde.

[26] Siehe [Veb21, S. 145–149]. Das Original stammt aus dem Jahr 1916 und die zweite Ausgabe aus dem Jahr 1921.

3 Leopold Vietoris

Leopold Vietoris, 1891 geborener österreichischer Mathematiker, hat den Hauptteil seiner Ausbildung und seiner Karriere zwischen Wien, Graz und Innsbruck aufgeteilt. Seine mathematische Tätigkeit, zu Anfang auf allgemeine Topologie konzentriert, orientierte sich ab 1925 in Richtung kombinatorische Topologie, aus Anlass eines Aufenthalts als *Rockefeller Fellow* bei L. E. J. Brouwer in Amsterdam. Die Resultate seiner damaligen Forschungen erschienen in den Artikeln [Vie26], [Vie27A] (eingereicht am 28. Juni 1926) und waren das Thema seines Vortrages am 24. September 1926 vor der Deutschen Mathematiker-Vereinigung mit dem Titel *Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume*.[27] Diese Arbeiten wurden zur Gänze während Vietoris' Aufenthalt bei Brouwer ausgeführt, um die Jahreswende 1925/26, und der Einfluss Letzteren ist sehr sichtbar. Vietoris stellt insbesondere in der ersten Fußnote in [Vie27A] klar, dass seine Forschungen aus einer mündlichen Anmerkung von Brouwer[28] hervorgegangen sind, und, wenn man den Artikel liest, kann man feststellen, dass er die Konzepte und die Terminologie des Artikels [Bro12A] des Letzteren aufgreift.

In [Bro12A] beweist Brouwer ein Resultat, das allgemeiner ist, als es der Titel (*Beweis der Invarianz der geschlossenen Kurve*) ankündigt; er weist nach, dass die Anzahl von Gebieten, die von einer ebenen, beschränkten, zusammenhängenden, perfekten (womit abgeschlossen und ohne isolierte Punkte gemeint ist) Menge begrenzt werden, invariant unter stetigen Bijektionen ist (und daher eine topologische Invariante ist). Gegeben eine Menge π wie oben, die auch $(h+1)$-zusammenhängend[29] ist, und einen Punkt P von π, zeigt er, dass es ein System von h Schlingen in π gibt, die alle durch P gehen (aber kein System mit weniger Schlingen), sodass jede Schlinge in π, die durch P geht, homotop zu einer Zusammensetzung einer endlichen Anzahl von Schlingen (und ihrer Inversen) dieses Systems ist. Dafür betrachtet er statt Schlingen endliche Mengen von Punkten, zyklisch angeordnet, sodass der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten (in der zyklischen Ordnung) kleiner als ε ist. Er nennt diese ε-*Ketten*.[30] Die Homotopie auf den Schlingen wird in ε-*Abänderungen* übersetzt, die darin bestehen, dass die ε-Ketten geringfügig modifiziert werden, indem Punkte hinzugefügt, entfernt oder verrückt werden.

[27] Siehe [Vie27B].

[28] Siehe [Vie27A, Fußnote 1, S. 454]: „Diese Untersuchungen gehen von einer mündlichen Bemerkung Brouwers aus, daß diese Invarianz (...) auch für die von ihm (...) eingeführte Vielfachheit der Basis der Zyklosis gilt."

[29] Diese Terminologie darf man nicht im heutigen Sinn verstehen, sondern muss man gemäß einer älteren Bedeutung nehmen, die „$h+1$ Gebiete begrenzend" meint; siehe [Die89, Fußnote S. 341].

[30] Diese Diskretisierung der Schlingen wird in der Tat zu einer Art affinen Approximation: Nämlich, wenn man statt einer Schlinge die Kurve betrachtet, die man als Vereinigung von Segmenten erhält, die zwei aufeinanderfolgende Punkte der Kette verbinden.

Der Artikel [Vie27A] lehnt sich sehr nahe an zahlreiche Punkte von [Bro12A] an. Vietoris definiert darin Zusammenhangs- und Homologiegruppen einer beliebigen Teilmenge M eines metrischen Raumes, ohne sich mit der Existenz einer Zellenzerlegung von M zu befassen. Dafür beginnt er damit, kombinatorische Komplexe zu betrachten, und gibt Definitionen, die sehr nahe bei Alexander sind, obgleich er nicht auf den Begriff des Tetraeders zurückgreift, und, allgemeiner, ohne auf Objekte oder auf Intuitionen geometrischer Natur Bezug zu nehmen.

Ein n-Simplex wird also von Vietoris als Menge von $n+1$ Punkten definiert, sowie alle Paare, Tripel, ..., n-Tupel, die man mit diesen Punkten bilden kann. Diese Definition ist analog zu jener, die Alexander in [Ale26] verwendet, wenn man ein Punktepaar als äquivalent zum Segment, das die beiden Punkte verbindet auffasst, wenn man ein Tripel von Punkten als äquivalent zum vollen Dreieck, das jene drei Punkte als Eckpunkte hat, auffasst, usw. Die geometrischen Vorstellungen, die hinter den durch Vietoris gegebenen Definitionen liegen, sind klarerweise analog zu jenen, die die Definitionen, die wir im ersten Abschnitt gegeben haben, motivieren, und Vietoris' Definition des Komplexes, auch wenn sie andere Ausdrücke als Alexander benutzt, ist äquivalent zu jener des ersten Abschnitts. Vietoris fügt bloß eine Idee hinzu, die darin besteht, zu sagen, dass die Untersimplices[31] eines gegebenen Komplexes mit einer bestimmten Vielfachheit auftreten (die der Tatsache entspricht, dass der selbe Simplex Seite von mehreren verschiedenen Simplices sein kann). Der Rand eines „k-dimensionalen homogenen" Komplexes C (das heißt, dessen Simplices – die nicht Seite eines anderen Simplex sind – alle Dimension k haben) ist als der Komplex definiert, der ausgehend von jenen $(k-1)$-dimensionalen Simplices gebildet wird, die Seiten einer ungeraden Anzahl von Simplices von C sind. Diese Definition mag ein wenig kurios aussehen, aber sie resultiert tatsächlich daraus, dass Vietoris nicht-orientierte Simplices betrachtet: In der Tat läuft die Betrachtung von nicht-orientierten Simplices auf die Betrachtung von Komplexen modulo 2 hinaus. Vietoris schreibt im Übrigen für zwei gegebene Komplexe K_1, K_2, die Relation $K_1 = K_2$ (mod 2), wenn die Vielfachheiten ihrer Untersimplices modulo 2 gleich sind. Ein n-Zykel ist ein n-dimensionaler homogener Komplex ohne Rand.

Schließlich führt Vietoris die Summenoperation auf Komplexen ein (die Summe zweier Komplexe K_1, K_2 ist die Menge der Untersimplices von K_1 und von K_2, wo jeder dieser als Vielfachheit die Summe der entsprechenden Vielfachheiten in K_1 und K_2 hat). Darüber hinaus führt er die Homologierelation ein:

> $R^{(k-1)} \sim 0$ *in* C*, wenn* $R^{(k-1)}$ *der Rand eines k-dimensionalen Simplex* $S^{(k)}$ *des Komplexes C ist.*

Nachdem die Kompatibilität der Summenoperation mit der Betrachtung von Komplexen modulo 2 klargestellt ist, definiert er die *n-te Zusammenhangsgruppe* eines

[31] Vietoris betrachtet einen Komplex als eine endliche Menge von Simplices, wo keiner davon Seite eines anderen ist, und er fügt dann die Seiten (Untersimplices) dieser Simplices hinzu.

Komplexes K als die Gruppe der n-dimensionalen nicht-orientierten Zykeln von K modulo der Homologierelation.[32] Die maximale Anzahl s von k-Zykeln eines Komplexes C, unter denen keine Homologierelation $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \cdots + \alpha_s C_s \sim 0$ besteht, wird *k-te Zusammenhangszahl* genannt (hier werden die Zykeln nicht modulo 2 betrachtet; die Zusammenhangszahl ist daher identisch mit der Bettizahl).

Vietoris adaptiert anschließend diese Definitionen für den Fall von orientierten Simplices.[33] Der Rand eines n-dimensionalen homogenen Komplexes K ist als der $(n-1)$-dimensionale Komplex definiert, der die Menge der $(n-1)$-dimensionalen Seiten von K $(p-q)$ mal enthält, wenn diese im Rand von n-dimensionalen Seiten von K genau p Mal positiv orientiert und genau q Mal negativ orientiert vorkommen. Die *n-te Homologiegruppe* eines Komplexes K ist dann als die Gruppe der n-dimensionalen orientierten Zykeln von K modulo Homologierelation definiert.

Sodann überträgt Vietoris diese Begriffe für kombinatorische Komplexe auf Teilmengen eines metrischen Raumes (wobei sich sein Interesse schlussendlich auf kompakte Teilmengen konzentriert). Er beginnt damit, sehr allgemein einen Komplex C in einer Menge M als einen Komplex im vorigen kombinatorischen Sinn zu definieren, wo die Ecken Elemente von M sind.[34] Er führt dann für den Fall, dass eine Distanzfunktion auf M gegeben ist, den Homologiebegriff ein:

> *Ein Zykel C in M wird ε-homolog zu 0 in M genannt (geschrieben als $C \sim_\varepsilon 0$), wenn er im kombinatorischen Sinn homolog zu einer Summe von Rändern von Simplices (in M) ist, die alle einen Durchmesser kleiner als ε besitzen.*

Diese Definitionen sind von der gleichen geometrischen Vorstellung wie jene in [Bro12A] angeleitet. Zum Beispiel wird die Addition eines Randes $R^{(k)}$ eines $(k+1)$-dimensionalen Simplex $S^{(k+1)}$, dessen Kanten alle Länge kleiner als ε besitzen (er schreibt $R^{(k)} \sim_\varepsilon 0$) zu einem k-dimensionalen Zykel $C^{(k)}$ *ε-Abänderung von $C^{(k)}$* genannt. Vietoris verallgemeinert so die Ideen, die mit Homotopie verknüpft und in Brouwers Artikel [Bro12A] präsent sind, auf beliebige (endliche) Dimension. Vietoris definiert außerdem ebenfalls die Homotopiegruppe einer Teilmenge M eines metrischen Raumes vollkommen analog zur Homologiegruppe.

[32] Siehe [Vie27A, S. 456]: „Wir betrachten nun für $K_1 \sim K_2$ die Operationen ‚$+K_1$‘ und ‚$+K_2$‘ als dieselbe Operation.“

[33] Das Konzept der Orientierung wurde im ersten Abschnitt für elementare Ketten angegeben. Es eignet sich in derselben Weise für die Simplices, wie sie von Vietoris betrachtet werden, da sie vollständig durch ihre Ecken gegeben sind.

[34] Solche Komplexe haben daher keine große geometrische Bedeutung, da nur die Ecken wirklich in M sind. Es wird zum Beispiel nirgends verlangt, dass die Segmente, die diese Punkte verbinden, in M liegen sollen.

Vietoris betrachtet *Fundamentalfolgen*[35] F in M; es handelt sich dabei um Folgen von k-dimensionalen Zykeln $(C_m)_{m=1\ldots+\infty}$, deren Seitenlängen mit m gegen 0 konvergieren, und die die Bedingung

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon,\ \forall n_1, n_2 > n_\varepsilon,\ C_{n_1} \sim_\varepsilon C_{n_2}$$

erfüllen. Eine Fundamentalfolge wird ε-homolog zu 0 genannt, wenn ein n_ε existiert, sodass $C_n \sim_\varepsilon 0$ für alle $n > n_\varepsilon$. Eine Fundamentalfolge F heißt *Nullfolge*, wenn sie ε-homolog zu 0 für alle ε ist; in diesem Fall schreibt man $F \sim 0$.[36]

Nachdem er dann ausgeführt hat, dass die Fundamentalfolgen eine additive Gruppe und die Nullfolgen eine Untergruppe bilden, definiert er die n-te Zusammenhangsgruppe und die n-te Homologiegruppe von M als die Gruppen der Fundamentalfolgen modulo der Homologierelation auf den Folgen (was darauf hinausläuft, den Quotienten bezüglich der Untergruppe der Nullfolgen zu bilden – was Vietoris allerdings nicht sagt). Die Unterscheidung zwischen der Homologiegruppe und der Zusammenhangsgruppe kommt wie zuvor davon, ob man orientierte oder nicht-orientierte Zykeln betrachtet.

Vietoris fährt in analoger Weise fort, um die Fundamentalgruppe von M zu definieren, aber wir führen das hier nicht aus. Der weitere Inhalt des Artikels bietet Aufschluss über die Vorstellung, die Vietoris von den Objekten hatte, mit denen er arbeitete. Die (Zusammenhangs-, Homologie-, Fundamental-)Gruppen, die er eingeführt hatte, werden teilweise aus dem Blickwinkel ihrer topologischen Eigenschaften studiert: Er zeigt, dass man sie mit einer Distanzfunktion ausstatten kann, die sie zu vollständigen metrischen Räumen macht, und er zeigt, dass im Falle, dass M kompakt ist, die Zusammenhangsgruppe von M es ebenfalls ist. Immer unter der Voraussetzung, dass M kompakt ist, beweist er, dass diese Gruppen alle jeweils eine kompakte Familie von Erzeugern (er gebraucht das Wort „Basis“) besitzen, und er definiert die *Vielfachheit* dieser Gruppen als die kleinste Anzahl von Elementen einer erzeugenden Familie (die abzählbar unendlich sein

[35] Man hätte auch *Cauchyfolgen* sagen können, da die definierende Bedingung äquivalent zu einer Bedingung von Cauchy, angewandt auf die Metrik, ist, die von Vietoris definiert wird. Außerdem verwendet – zur selben Zeit – Felix Hausdorff in seinem Buch *Grundzüge der Mengenlehre* den Ausdruck *Fundamentalfolge*, um eine Cauchyfolge zu bezeichnen, siehe [Hau02, S. 414].

[36] Es sind also die Fundamentalfolgen, die in Wirklichkeit die wahre Rolle der Zykeln von M spielen werden. Geometrisch gesehen handelt es sich um Punktmengen, die die Ecken eines abstrakten Komplexes darstellen. Die Bedingungen, die Fundamentalfolgen definieren, stellen sicher, dass die Ecken der C_n so verteilt sind, dass sie mit wachsendem n weniger und weniger von einander entfernt sind. Zusätzlich erzwingen sie, dass die Anzahl der Ecken von C_n mit n gegen unendlich geht. Die Cauchybedingung ist gewissermaßen dafür da, dass diese Punktmengen in einem Kompaktum gegen eine „Grenzwertpunktmenge“ konvergieren, die dann einen wahren Zykel von M versinnbildlichen sollte.

Die Nullfolgen spielen die Rolle der Ränder in M. Die Forderung, ε-homolog zu 0 für jedes ε zu sein, hat die Funktion, zu versuchen sicherzustellen, dass die Löcher in M sehr wohl aufgespürt werden, und dass eine Nullfolge daher eine „volle“ Teilmenge – um das präziser zu formulieren: eine modulo Homotopie triviale Teilmenge – von M begrenzt.

kann). Die Vielfachheit der Zusammenhangsgruppe und der Homologiegruppe ist für ihn ein Analogon der Zusammenhangszahlen und der Bettizahlen in kombinatorischen Komplexen. Wenn er auf die Terminologie *Zyklosis*[37] zurückgreift, die Brouwer in [Bro12A] einsetzte, stellt er eine Verbindung mit seinen Definitionen her (was diese rechtfertigt), indem er zeigt, dass die Vielfachheit der nicht-orientierten „Zyklosis“ gleich der Vielfachheit der Zusammenhangsgruppe der entsprechenden Dimension[38] ist.

All das untermauert die Bedeutung von Brouwers Ideen und den überragenden Einfluss der geometrischen Intuitionen und der topologischen Begriffe in der Arbeit Vietoris'. In [Vie27A] verwender Vietoris keine Mittel der Gruppentheorie, er vermeidet den Begriff der Quotientengruppe und er arbeitet immer mit Zykeln oder Ketten und nicht mit ihren Repräsentanten modulo Homologie oder Äquivalenz. Wenn also Vietoris die Gruppen in die Topologie einführt, dann einfach deswegen, weil er nicht anders kann. Wie Mac Lane in [ML86] erklärt, richtete sich Vietoris' Interesse auf kompakte metrische Räume – die unendlich viele Löcher haben können, wie die klassische Cantormenge zum Beispiel – ihre Homologie lässt sich nicht mehr mithilfe von Betti- oder Torsionszahlen beschreiben,[39] und sie verlangt deswegen die Einführung der Gruppenstruktur,[40] um ein Analogon der Bettizahlen zu definieren: die Vielfachheit. Da dieses schon früher aufgebracht worden war, war es auch nicht unbekannt, dass bestimmte Mengen, die damals in der Topologie betrachtet wurden – wie etwa die Menge der Zykeln – mit einer Gruppenstruktur versehen werden konnten. Vietoris bekennt das selbst in einem Brief an Puppe ([Hir99, S. 62–63]): „Selbstverständlich wußten die Topologen schon vor diesen Arbeiten, daß sie es bei der Addition von Zykelklassen mit abelschen Gruppen zu tun hatten. Weil sie aber wußten, daß diese Gruppen durch Rang- und Elementarteiler (Torsionszahlen) charakterisiert sind, hielten sie

[37] Es handelt sich um eine sehr eigene Terminologie, die ihren Ursprung in [Lis47] zu haben scheint. Sie bezeichnet die Schlingen, die Listing verwendet, um Zusammenhang zu messen. Man findet Details in [Bre99, S. 920].

[38] [Vie27A, S. 464]: „Die Vielfachheit der nicht orientierten Zyklosis ist gleich der Vielfachheit der Zusammenhangsgruppe derselben Dimension.“

[39] Wir haben im ersten Abschnitt gesehen, dass die Torsionszahlen ausgehend von Inzidenzmatrizen definiert waren, die zu Komplexen assoziiert waren. Um Torsionszahlen für kompakte metrische Räume zu definieren, wäre es also notwendig gewesen, dass Vietoris herausfindet, wie man zu einem kompakten metrischen Raum einen simplizialen Komplex (der eine endliche Menge ist) assoziiert und dabei die topologischen Eigenschaften bewahrt – was ein aussichtsloses Unterfangen zu sein scheint. Die Bettizahlen auf der anderen Seite können definiert werden, ohne auf Inzidenzmatrizen zurückzugreifen (siehe die im ersten Abschnitt gegebene Definition), aber man kann leicht unendliche Bettizahlen für kompakte metrische Räume erhalten. Tatsächlich erhält man, wenn man einen Raum mit einer unendlichen Anzahl von Löchern betrachtet, eine unendliche Familie von unabhängigen 1-Zykeln, indem man für jedes Loch des betrachteten Raumes einen 1-Zykel nimmt, der dieses Loch umschließt.

[40] Diese Erklärung von Mac Lane wird im Übrigen von Vietoris selbst in einem Brief an Friedrich Hirzebruch bestätigt, der in [Hir99, S. 62] zitiert wird.

die Beschäftigung mit den Gruppen für überflüssig.“ Die Bedeutung der Arbeit von Vietoris geht daher über die bloße Einführung des Gruppenbegriffs in der Homologie hinaus; der Gruppenbegriff ist im Zusammenhang mit seiner Untersuchung absolut notwendig, da seine Studienobjekte (die kompakten metrischen Räume) im allgemeinen nicht mit Betti- und Torsionszahlen beschrieben werden können, die für das Studium von Komplexen noch ausreichend gewesen waren. Die endlich erzeugten abelschen Gruppen sind nicht imstande, die homologische Information für allgemeine kompakte metrische Räume zu kodieren.

Indem Vietoris einen von Brouwer inspirierten geometrischen Zugang adoptiert hat, konnte er die Homologie von reicheren Objekten als den simplizialen Komplexen untersuchen. Eine klassischere Vorgangsweise wäre es gewesen, ein allgemeines Verfahren zu entwickeln, das zu einem kompakten metrischen Raum einen simplizialen Komplex assoziiert, und anschließend die Homologie dieses Raumes als Homologie des assoziierten Komplexes zu definieren. Aber der Weg, den Vietoris eingeschlagen hat, hat ihm gerade erlaubt, die Schwierigkeit einer solchen Zuordnung eines passenden simplizialen Komplexes zu einem beliebigen kompakten metrischen Raum zu umgehen, was erklärt, dass er der erste gewesen ist, der den Begriff der Homologiegruppe definiert hat.

Man kann sich dennoch berechtigterweise die Frage stellen, warum das Problem der Definition von Homologie für komplexere Objekte als die simplizialen Komplexe nicht schon vor Vietoris eine Lösung gefunden hatte. Ohne ins Detail zu gehen, scheint dies mit dem Problem der bloßen Definition einer Mannigfaltigkeit[41] verbunden zu sein. Tatsächlich betrachtete Poincaré in seinen ersten Artikeln über *Analysis Situs* differenzierbare Mannigfaltigkeiten, definiert etwa mithilfe von Bedingungen an lokale Parametrisierungen. Die Homologierelation wurde so präsentiert:

> $V_1 + V_2 + \cdots + V_K \sim 0$, *wenn die Teilmannigfaltigkeiten der Dimension* m $V_1, V_2, \ldots, V_K$ *der Mannigfaltigkeit* M *den Rand einer Teilmannigfaltigkeit von* M *der Dimension* $m+1$ *bilden.*

Poincaré schlug ferner gleichfalls vor, die Mannigfaltigkeiten via einer Zellenzerlegung darzustellen (also diese durch Zellenkomplexe darzustellen), wobei er scheinbar implizit behauptete, dass jede Mannigfaltigkeit eine Triangulierung besitzt. Er konnte so Inzidenzmatrizen einführen, einen Algorithmus zur Berechnung der Bettizahlen angeben und Torsionszahlen definieren. Aber Poincarés Vorgangsweise beinhaltete eine beträchtliche Zahl von Problemen, wofür es in den 1920er-Jahren wenig Lösungsansätze gab. In erster Linie kann man hier das Problem der Existenz einer Zellenzerlegung einer gegebenen Mannigfaltigkeit anführen, der Invarianz der Betti- und Torsionszahlen für zwei Triangulierungen der selben Mannigfaltigkeit, der Invarianz der so definierten Homologie für zwei

[41] Um Genaueres zu erfahren, kann man [Sch99] konsultieren.

homöomorphe Mannigfaltigkeiten, usw. Diese Probleme sind am Ende genau mit dem Problem der Definition einer Mannigfaltigkeit verbunden. Entweder nahm man die erste Sichtweise Poincarés her und versuchte Existenzsätze für Triangulierungen solcher Mannigfaltigkeiten zu zeigen, oder man ging vom Prinzip aus, dass eine Mannigfaltigkeit – per Definition – ein Zellenkomplex wäre und suchte Bedingungen kombinatorischer Natur, die sicherstellen, dass eine Mannigfaltigkeit bestimmte Eigenschaften wie etwa die Poincaré-Dualität erfüllt. Wenn man sich vor Augen hält, wie angenehm Zellenkomplexe für die Berechnung von Betti- und Torsionszahlen sind, und wie schwierig es auf der anderen Seite ist, die Existenz einer Triangulierung einer Mannigfaltigkeit im Allgemeinen nachzuweisen (die Existenz einer Triangulierung für 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten wurde etwa erst 1925 durch T. Radó bewiesen), dann kann man leicht verstehen, dass die Topologen bis Vietoris im Allgemeinen die simplizialen Komplexe als Basis ihrer Überlegungen genommen haben.

4 Walther Mayer

Die Arbeit Vietoris' zeitigt eine direkte und unmittelbare Folge über jene Walther Mayers (aus Wien), und insbesondere über den Umweg des Artikels [May29]. Im ersten Teil von [May29], eingereicht am 16. November 1927, stellt Mayer in der Einführung klar: „In die Topologie wurde ich durch meinen Kollegen Vietoris eingeführt, dessen Vorlesung 1926/27 ich an der hiesigen Universität besuchte." Mayer nimmt einen abstrakten Standpunkt ein und gibt ein Axiomensystem für Komplexe an.[42] Für unseren Zweck beschränken wir uns auf das Studium des ersten Teils, der großteils die Definitionen und die Axiomatik behandelt.

Komplexe werden als Objekte eines Moduls von Komplexen Σ gesehen, und zu jedem Komplex ist eine ganze Zahl – Dimension genannt – zwischen 0 und einer bestimmten ganzen Zahl n, die die Dimension des Moduls Σ ist, assoziiert. Der Begriff eines Simplex verschwindet so, ebenso wie der Begriff einer Seite, und insbesondere jener der Ecke, der bisher notwendig zur Bestimmung der Dimension eines Simplex war. Die von Mayer eingeführten Axiome sind die folgenden:

1. Es existiert eine Operation auf den Komplexen von Σ, die die Menge der Komplexe $\{K^{(\rho)}\}$ einer gegebenen Dimension ρ zu einer abelschen Gruppe macht.
2. Es gibt kein Element endlicher Ordnung in $\{K^{(\rho)}\}$.
3. Für jedes ρ existiert eine endliche Familie von ρ-dimensionalen Komplexen

[42] Mayer verstärkt im Übrigen diesen abstrakten Standpunkt, indem er klarstellt, dass Komplexe Objekte sind, die man nicht notwendigerweise als Objekte betrachten sollte, die geometrische Gebilde darstellen.

$a_1^{(\rho)}, \ldots, a_\tau^{(\rho)}$, sodass jeder ρ-dimensionale Komplex von $\{K^{(\rho)}\}$ in

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\tau} p_i a_i^{(\rho)}, p_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

enthalten ist.

4. Es existiert eine Operation R, „Rand“ genannt, die zu jedem ρ-dimensionalen Komplex $K^{(\rho)}$ von Σ $(1 \leq \rho \leq n)$ einen $(\rho - 1)$-dimensionalen Komplex von Σ, der mit $R(K^{(\rho)})$ bezeichnet wird, assoziiert.
5. R ist $\mathbb{Z}$-linear.
6. $R \circ R = 0$.

Mayer gelingt es dann sehr schnell, Homologiegruppen zu definieren (gleich nach der Einführung von Zykeln, von Torsionszahlen, und von Zykeln, die homolog zu 0 sind). Es gibt einen bemerkenswerten Vorstoß: Während bei Vietoris das Konzept der Homologiegruppe als durch die Umstände erzwungen erscheinen mochte, wird es hier einfach vorausgesetzt. Nichts in seinen Axiomen nötigte Mayer, es einzuführen, und das umso mehr noch, als, gemäß Axiom 3, die Gruppen der Komplexe endlich erzeugt sind – und daher zur Gänze durch die Betti- und Torsionszahlen charakterisiert sind –, im Gegensatz zu jenen, die Vietoris für die kompakten metrischen Räume benutzte.

Dennoch scheint die Bedeutung der Mittel der Gruppentheorie bei Mayer nicht immer klar herausgearbeitet zu sein. Man möchte eher das Gegenteil glauben, angesichts dessen, dass im Unterschied zu Vietoris Mayer damit beginnt, dass man die ρ-te Homologiegruppe als Quotient der Gruppe der ρ-dimensionalen Zykeln und der Untergruppe jener ρ-dimensionalen Zykeln, die homolog zu 0 sind, erhält; aber er verspürt die Notwendigkeit, in der Folge zu zeigen, dass die Klassen der Zykeln modulo der Homologierelation sich sehr wohl wie eine additive Gruppe verhalten[43] , so als ob die Definition mittels Quotientenbildung nicht vollkommen zufriedenstellend wäre. Darüber hinaus ist der Großteil der Rechnungen mit Matrizen vor Augen ausgeführt. Mayer argumentiert beständig mithilfe von Inzidenzmatrizen und gibt sich, noch vor allen Überlegungen, eine Basis von Komplexen vor (die invarianten Faktoren werden deswegen immer über Basiswechsel ausgearbeitet) und ist so in den meisten Fällen angehalten zu zeigen, dass die Resultate, die er erhält, unabhängig von der betrachteten Basis sind. Im Rückblick kann man dann umso mehr erstaunt sein, dass Mayer sich nicht von den Matrizen befreit hat, wo ja der Artikel [Vie27A] von Vietoris genau in diese Richtung zu gehen schien; siehe S. 456, wo Vietoris über die Zusammenhangszahlen spricht: „Wir haben nur die Definition derselben von der Darstellung durch Matrizes losgelöst.“ Es gibt

[43] Siehe [May29, S. 7–8]: Er weist nach, dass die Addition von Klassen wohldefiniert ist, dass sie kommutativ ist, dass die Klasse der Zykeln, die homolog zu 0 sind, das neutrale Element bezüglich Addition darstellt, usw.

diesen Punkt betreffend im Übrigen einen sehr krassen Gegensatz zwischen dem Artikel von Vietoris und jenem von Mayer: Vietoris benützt in [Vie27A] nirgendwo lineare Algebra, während diese bei Mayer omnipräsent ist.

5 Heinz Hopf

5.1 Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaré-Formel

Der letzte Artikel, den wir studieren, ist der Artikel [Hop28B] von Heinz Hopf. Es ist wichtig zu wissen, dass Hopf das erste Mal 1926 nach Göttingen kam, wo er Pawel Alexandroff getroffen hat – mit dem er später das berühmte Lehrbuch der Topologie [AH35] verfasste – und natürlich auch Emmy Noether, und dass er danach zwischen 1926 und 1928 mehrmals wiedergekommen ist. In diesem Artikel [Hop28B] aus dem Jahr 1928 kommt Hopf, in anderer Weise, auf den Beweis[44] einer Verallgemeinerung der Euler-Poincaré-Formel[45] zurück. Setzen wir uns also näher mit diesem Artikel auseinander: Dieser gliedert sich in drei Abschnitte.

Der erste Abschnitt zählt die klassischen Eigenschaften der Gruppentheorie auf, insbesondere der endlich erzeugten abelschen Gruppen. Hopf interessiert sich besonders für Quotientengruppen und die Spur eines Endomorphismus einer freien abelschen Gruppe von endlichem Rang, und er beweist die Beziehung

$$SG = SH + S(G/H),$$

wo G eine freie abelsche Gruppe von endlichem Rang n ist, H eine Untergruppe von G, die unter einem Endomorphismus f auf G invariant bleibt, sodass der Quotient G/H ebenfalls frei ist (er zeigt, dass ein solcher Quotient notwendigerweise Abelsch und endlich erzeugt ist), wo SG die Spur von f als Endomorphismus von G bezeichnet, wo SH die Spur von f als Endomorphismus von H bezeichnet und wo $S(G/H)$ die Spur des Endomorphismus, der von f auf G/H induziert wird, bezeichnet.

Der zweite Abschnitt behandelt Definitionen, die mit Komplexen in Zusammenhang stehen. Gegeben einen Komplex[46] C^n der Dimension n, bezeichnet er seine orientierten Simplices mit $T^i_j,\ j = 1,\ldots,a^i$ (wobei die Orientierung in Abhängigkeit von der Ordnung der Ecken von T^i_j definiert ist), und er nennt jede

[44] Sein ursprünglicher Beweis ist das Thema des vorhergehenden Artikels [Hop28A].

[45] Die Euler-Poincaré-Formel ist eine Verallgemeinerung der berühmten Formel von Euler für Polyeder ($E-K+F=2$). Sie wird insbesondere von Alexander in [Ale26, S. 316] wiedergegeben. Mit den Bezeichnungen des ersten Abschnitts lautet diese Formel: $\sum_{i=0}^n(-1)^iP^i = \sum_{i=0}^n(-1)^i\alpha^i$. Sie bildet das Zentrum der Diskussion in [Lak84].

[46] Die Definition eines „Komplexes“ wird nicht wiederholt, aber man muss hier „Komplex“ sicher im Sinne von Alexander in [Ale26] verstehen, da Hopf darauf im Artikel [Hop28A] verweist.

ganzzahlige Linearkombination von Simplices T_j^i einen „i-dimensionalen Komplex in C^n".[47] Solcherart benutzt Hopf das Wort „Komplex" für zwei verschiedene Dinge: den Komplex C^n, der ein Komplex im Sinne Alexanders ist, und die i-dimensionalen Komplexe in C^n, die i-Ketten im Sinne von Alexander in [Ale26] sind. Er führt die Randabbildung ρ durch ihren Wert auf Simplices ein (und erweitert mittels Linearität), und er führt den Begriff eines Zykel (ein Komplex, dessen Rand Null ist) ein. Er definiert schließlich einen *Randteiler* als einen Komplex, wo ein Vielfaches dessen ein Rand ist, und er führt die kommutativen Gruppen $\mathfrak{L}^i \supset \mathfrak{Z}^i \supset \overline{\mathfrak{R}^i} \supset \mathfrak{R}^i$ ein, nämlich die Gruppe von Komplexen, die Gruppe von Zykeln, die Gruppe von Randteilern, respektive die Gruppe von i-dimensionalen Rändern (die letzten drei Mengen sind tatsächlich Gruppen bezüglich der Addition gemäß den Eigenschaften von ρ). So definiert er die i-te Bettigruppe $\mathfrak{B}^i$ als Quotient $\mathfrak{Z}^i/\overline{\mathfrak{R}^i}$; er beweist, dass es sich um eine freie (abelsche) Gruppe handelt, und er nennt den Rang von $\mathfrak{B}^i$ die i-te Bettizahl (bezeichnet mit p^i). Er zeigt schließlich, dass ρ einen Isomorphismus zwischen $\mathfrak{L}^i/\mathfrak{Z}^i$ und $\mathfrak{R}^{i-1}$ induziert.

Im dritten Abschnitt bleibt für Hopf nur noch übrig, bevor er mit dem Beweis beginnt, den Begriff einer simplizialen Abbildung zwischen zwei n-dimensionalen Komplexen C^n und K^n einzuführen. Es handelt sich dabei um eine Abbildung von der Eckenmenge von C^n auf die Eckenmenge von K^n, mit der Eigenschaft, dass die Bilder der Ecken eines Simplex von C^n auch einen Simplex von K^n bilden. Er zeigt, dass jede simpliziale Abbildung mit ρ kommutiert, und schließt daraus weiters, dass jede simpliziale Abbildung einen Homomorphismus zwischen jeder einzelnen der Gruppen $\mathfrak{L}^i$, $\mathfrak{Z}^i$, $\overline{\mathfrak{R}^i}$, $\mathfrak{R}^i$ von entsprechenden Komplexen induziert. Schlussendlich, indem er die Resultate der vorhergehenden Abschnitte verwendet, leitet er die Beziehung

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i S\mathfrak{B}^i = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i S\mathfrak{L}^i$$

als Verallgemeinerung der Euler-Poincaré-Formel her (S bezeichnet hier die Spur einer simplizialen Abbildung f von C^n nach K^n, gesehen als Endomorphismus, wo C^n eine simpliziale Unterteilung von K^n ist). Er erhält die Euler-Poincaré-Formel für den Spezialfall, wo f die identische Abbildung auf C^n ist.

[47] „Für jedes i nennen wir die Linearformen in den T_j^i mit beliebigen ganzzahligen Koeffizienten ‚die in C^n liegenden i-dimensionalen Komplexe'."

5.2 Der Beitrag von Noether in der Arbeit von Hopf

Diese kurze, abschließende Studie stellt sich zwei Fragen:

- In welcher Form ist der Einfluss von Emmy Noether im Artikel von Hopf bemerkbar?
- Was ist der „Neuigkeitswert" des Artikels von Hopf aus dem Gesichtspunkt der Geburt der Gruppenhomologie (und insbesondere, in welcher Form zeichnet er sich im Vergleich mit den Artikeln von Vietoris und Mayer aus)?

Wir werden auf die zweite Frage später zurückkommen, aber wir können die erste Frage gleich beantworten. Zitieren wir Hopf selbst aus der Einführung: „Meinen ursprünglichen Beweis dieser Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel konnte ich im Verlauf einer im Sommer 1928 in Göttingen von mir gehaltenen Vorlesung durch Heranziehung gruppentheoretischer Begriffe unter dem Einfluß von Fräulein E. Noether wesentlich durchsichtiger und einfacher gestalten." Die Idee, Konzepte der Gruppentheorie einzuführen, ist ihm also von Emmy Noether nahegelegt worden. Das manifestiert sich in seinem Artikel durch einen ersten Abschnitt, der zur Gänze Eigenschaften der Gruppentheorie gewidmet ist, und der die Mittel definiert, die es ihm erlauben, seinen ersten Beweis zu vereinfachen. Die Effektivität dieses Vorgehens ist so groß, dass es schlussendlich nur ein einziges nichttriviales Zwischenresultat gibt, das nicht aus den Eigenschaften der Gruppen resultiert (es handelt sich um die Tatsache, dass eine simpliziale Abbildung mit der Randabbildung kommutiert[48]). Es ist übrigens interessant anzumerken, dass Hopf in seinem Artikel nicht den Begriff der Homologiegruppe eingeführt hat, sondern jenen der Bettigruppe, wobei die Bettigruppe den torsionsfreien Teil der Homologiegruppe bezeichnet (den man erhält, indem man den Quotienten modulo der Gruppe der Randteiler, und nicht der Gruppe der Ränder, bildet). Die Bettigruppen sind ausreichend für das Ziel von Hopfs Artikel, und darüber hinaus erlauben sie es ihm, im einfachen Rahmen der freien endlich erzeugten abelschen Gruppen zu verbleiben. Der „Neuigkeitswert" des Artikels von Hopf kommt also weniger von der Präsenz der Homologiegruppen als von der systematischen Verwendung der Gruppentheorie und der folglichen Aufgabe der Inzidenzmatrizen.

[48] Dieser Punkt ist wichtig. Wie wir schon früher erwähnt haben, erlaubt dies abzuleiten, dass eine simpliziale Abbildung einen Homomorphismus zwischen den Gruppen der Komplexe, der Zykeln, der Randteiler, und der Ränder induziert. Ebenfalls induziert sind Homomorphismen zwischen den Betti- und Homologiegruppen. Wenn man also zwei n-dimensionale Komplexe und eine simpliziale Abbildung zwischen diesen gegeben hat, ist man imstande, die Betti-/Homologiegruppen der Dimension 0 bis n, ausgehend von diesen zwei Komplexen und den Homomorphismen zwischen ihren entsprechenden Betti-/Homologiegruppen, die von der simplizialen Abbildung induziert werden, zu definieren. Auf diese Weise ist der Aspekt von Homologie, der später „funktoriell" genannt werden wird, und der so bedeutend in der weiteren Entwicklung der Topologie und anderer mathematischer Gebiete ist, klar herausgestellt. Wir verweisen auf Kapitel 6 in [McL06] für eine Erörterung des Aufschwungs der Funktoren im Zusammenhang mit Noether und der Topologie.

Weitere Zeugnisse erlauben es uns, Hopfs Worte zu untermauern, die die Bedeutung von Noether in der Entstehungsgeschichte des Artikels aus dem Jahr 1928 hervorheben. Zuallerst stellt Hopf selbst, wenn auch Jahre später, in [Hop66, S. 12] klar, was Emmy Noether ihm erklärt hat, und man kann davon ausgehen, dass man die von Noether formulierten Konzepte fast Wort für Wort im Artikel [Hop28B] von Hopf findet[49] , abgesehen von der kleinen Differenz, dass Hopf in diesem Artikel die Bettigruppen betrachtet, die man als Quotienten der Gruppen der Zykeln und der Gruppen der Randteiler erhält, und nicht die Homologiegruppen, die man als Quotienten der Gruppen der Zykeln und der Gruppen der Ränder erhält. Pawel Alexandroff, russischer Topologe, Freund von Hopf und von Noether und regelmäßiger Besucher in Göttingen von 1923 bis 1929, erklärt aus seiner Sicht in seiner Éloge über Emmy Noether [Alex83], dass Noether in den Sommersemestern 1926 und 1927 seine Vorlesungen und jene Hopfs besucht hat, und er besteht auf der Tatsache, dass sie *sofort* bemerkt hat, welche Vorteile die Einführung von Gruppen (von Komplexen, von Zykeln, usw.) in der Topologie haben würde, und dass sie vorschlug, Bettigruppen zu definieren; Alexandroff fügt hinzu, dass Hopf und seine Person sich unverzüglich ihren Vorschlägen anschlossen und dass der Artikel [Hop28B] zur Gänze auf den Bemerkungen Noethers beruht.[50] Alexandroff geht also vielleicht um einiges weiter als Hopf, indem er ausschließlich alle konzeptuellen Neuheiten in [Hop28B] Emmy Noether zuschreibt, und das aufgrund der Bemerkungen aus den Jahren 1926 und 1927. Diese Behauptung scheint kohärent mit den Worten des Abstracts des Vortrags von Noether zu sein, das wir im zweiten Abschnitt wiedergegeben haben, und mit den Erinnerungen von Alexandroff an das Essen in Blaricum,[51] während dessen Emmy Noether die Definition der Bettigruppen von Komplexen erklärt haben soll.

Das Abstract von Noether, das wir im zweiten Abschnitt studiert haben, lässt einen sehr leicht glauben, dass sie bereits zu Beginn des Jahres 1925 die Idee der Definition von Bettigruppen in sich trug. Der Artikel [Hop28B] von Hopf setzt die Ideen um, die sich als Keim im Abstract von Noether finden: Lassen wir Moduln über Hauptidealringen beiseite und setzen wir als Basis der Theorie der Komplexe den Gruppenbegriff. Wir haben bereits gesagt, dass Emmy Noether keinen einzigen Artikel in der Topologie geschrieben hat, und dass ihre einzigen Worte zu diesem Thema, die man in der mathematischen Literatur findet, scheinbar jene

---

[49] „Es seien X^r die r-dimensionalen Kettengruppen, ∂ die durch die Randbildung bewirkten Homomorphismen $X^{r+1} \to X^r$; dann ist, wie man leicht an einem einzelnen Simplex verifiziert, $\partial\partial = 0$; das bedeutet: das Bild ∂X^{r+1} ist in dem Kern Z^r der Abbildung $\partial : X^r \to X^{r-1}$ enthalten; die Faktorgruppe $H^r = Z^r/\partial X^{r+1}$ ist die r-te Homologiegruppe.“

[50] Siehe [Alex83, S. 9]: “In the summers 1926 and 1927 she went to the courses on topology which Hopf and I gave at Göttingen. (...) she immediately observed that it would be worthwile to study directly the groups of algebraic complexes and cycles (...), she suggested immediately defining the Betti group (...) she noticed how simple and transparent the proof of Euler-Poincaré formula becomes if one makes systematic use of the concept of a Betti group.”

[51] Diese Begebenheit wurde bereits in der Einführung erwähnt, siehe Fußnote 6.

dieses Abstracts sind. Man kann aber trotzdem davon ausgehen, dass die Topologie nicht vollkommen abwesend in Noethers Gedanken war, was erklärt, dass sie darüber einen Vortrag halten und einen bemerkenswerten konzeptuellen Fortschritt vorschlagen konnte, in einem Gebiet, das nicht das ihre war. Der Ursprung der Überlegungen Noethers im Zusammenhang mit Topologie scheint in den regelmäßigen Besuchen Alexandroffs in Göttingen seit Mai 1923 zu liegen, die mit zahlreichen Diskussionen mit Noether einhergingen. Sie schien ein wirkliches Interesse an den Untersuchungen Alexandroffs zu haben.[52]

Man kann sich vorstellen, dass Emmy Noether seitdem ihre Bemerkungen zu mehreren Anlässen wiederholt hat; es ist der Zeitraum, wo sich manche Topologen von deren Bedeutung überzeugen ließen. Wenige Gelegenheiten ergaben sich für sie, da Topologie in Göttingen kein Forschungsgegenstand war. Da gab es zunächst den Aufenthalt bei Brouwer während der Weihnachtsferien 1925, mit einer bedeutenden Präsenz von Topologen (Alexandroff, Brouwer, Menger, Vietoris, . . . , siehe [Alex79, S. 323]); weiters gaben die Besuche Hopfs in Göttingen seit dem Sommersemester 1926, und die Vorlesungen, die von da ab von Alexandroff und Hopf gehalten wurden, Noether die Gelegenheit, ihre Ideen ad hoc anzuwenden. Man versteht so besser, dass Noether in deren Vorlesungen *sofort* Bemerkungen anbringen konnte – wie anlässlich jener Begebenheit, die von Alexandroff insistierend in [Alex83] erwähnt wird –, da sie ihnen bloß Konzepte erklärte, die sie bereits seit einem Jahr ausformuliert hatte. Alexandroff hatte sie offensichtlich bereits gehört, aber wahrscheinlich ohne die ganze Bedeutung zu erfassen oder ohne sich den Perspektiven, die von Noether geöffnet wurden, widmen zu wollen, während es sich für Hopf um eine umwerfende Entdeckung handelte.

6 Vietoris, Synthese verschiedener Einflüsse?

Wir konnten starke Unterschiede während unserer Studie der Artikel von Vietoris, Mayer und Hopf in den Abschnitten 3, 4, und 5 ans Tageslicht bringen. Der Artikel [Vie27A] von Vietoris, das erste Vorkommen des Begriffs der Homologiegruppe in der mathematischen Literatur, hat also als Leitidee die Verallgemeinerung der Konzepte von Brouwer in [Bro12A] über Homotopie auf beliebige endliche Dimension. Hier leitet die geometrische Intuition die Überlegungen, und die Inzidenzmatrizen werden aufgegeben, da sie die Objekte, die von Vietoris betrachtet werden, nicht beschreiben können. Die Betti- und Torsionszahlen existieren im Allgemeinen nicht für die Objekte, die Vietoris betrachtet; es bedarf daher eines Ersatzes, und der Begriff der Homologiegruppe drängt sich in natürlicher Weise

[52] Siehe [Alex79, S. 299]: “We [Alexandroff und Urysohn] constantly met Emmy Noether on a relaxed basis and very often talked to her, about topics both in ideal theory, and in our work, which had caught her interest at once.” und [Alex79, S. 316]: “We were constantly meeting Emmy Noether on her famous walks, which were first called algebraic and after our arrival came to be called topological algebraic.”

auf. Man findet dort dennoch keine Anwendung von Mitteln der Gruppentheorie, und darüberhinaus eine sehr schwache Präsenz von eigentlicher Gruppenterminologie; die Verwendung des Quotientenbegriffes ist zum Beispiel inexistent.

Da der Einfluss Brouwers auf den Artikel [Vie27A] von Vietoris entscheidend ist, sollten wir einige Aspekte von Brouwers Arbeit erwähnen, um dann die Vorgehensweise von Vietoris zu erklären, und wie sich diese von derjenigen von Noether und Hopf unterscheidet.

6.1 Luitzen Egbertus Jan Brouwer

Es ist schwierig zu bewerten, was Brouwer von den Arbeiten Emmy Noethers wusste und was er darüber dachte. Wir wissen jedoch, dass er sie 1912 kennengelernt hat, und dass er sie in Folge sehr wahrscheinlich mehrere Male wiedergesehen hat, da er regelmäßig nach Göttingen kam.[53] Darüber hinaus deutet seine Einladung an Noether, während des Winters 1925 bei ihm zu verweilen, darauf hin, dass sie sich sehr gut verstanden.

Wenn man an das Tischgespräch Noethers anlässlich des Essens bei Brouwer (siehe Fußnote 6) denkt, dann kann es als sehr überraschend erscheinen, dass die Methoden, die von Vietoris entwickelt wurden, und jene, die von Noether angeregt wurden, so weit auseinander liegen. Man kann das insbesondere mit der Überzeugtheit Brouwers von seinen eigenen Konzepten erklären: Der Geist des Intuitionismus und jener der modernen Algebra sind – milde ausgedrückt – unvereinbar. Außerdem zeigt die Arbeit Brouwers am Beginn der 1910er-Jahre, dass ihm die Idee der Einführung von algebraischen Konzepten fremd war,[54] und wenn man sich vor Augen hält, dass sich Brouwers Aktivität seit 1913 von der Topologie ziemlich entfernte, und dass die Algebra niemals eines seiner Forschungsgebiete gewesen ist, dann kann man seine mangelnde Sensibilität für Noethers Innovationen leicht verstehen.

L. E. J. Brouwer verfasste zwischen 1910 und 1913 einer Reihe von Artikeln, die Epoche machend waren, sowohl wegen der Resultate, die sie enthielten, als auch wegen der Methoden, die sie einsetzten – die in der Folge durch andere Topologen in wirkungsvoller Weise zum Einsatz gebracht werden konnten. Er war insbesondere der erste, das, was man jetzt homotope Abbildungen[55] nennt, zu betrachten, die im Übrigen im weiter oben erwähnten Artikel [Bro12A] präsent sind. In seinen Arbeiten ist die Bedeutung der geometrischen Intuition und sogar des

[53] Siehe [FH76, S. XIII]: "In the summer of 1909 he seems to have met Hilbert, and from 1911 onwards he made regular visits to Göttingen."

[54] Der im dritten Abschnitt erwähnte Artikel [Bro12A] würde sich vortrefflich für die Einführung der Sprache der Gruppen eignen – jede Schlinge sowie all jene, die zu ihr homotop sind, würden ein und dasselbe Element der Fundamentalgruppe repräsentieren –, aber diese fehlt im Artikel dennoch vollständig.

[55] Siehe [Bro12B].

geometrischen Zugangs absolut offenkundig, und das wird durch seine eigenen Worte bestätigt: “It was my main intention to demonstrate that it is possible and desirable to give priority to the geometrical method also in parts of mathematics where this has not yet been realized.”[56]

Diese Anlehnung an eine geometrische Behandlung von mathematischen Problemen sowie Unkenntnis oder bewusstes Desinteresse führten dazu, dass Brouwer sich nicht der Homologie gewidmet hat, wo sogar die Mittel, die er selbst eingeführt hatte, in der Folge eine zufriedenstellende Behandlung von Fragen, die Poincaré aufgeworfen hatte, erlaubten.[57] In der Tat wandte sich Brouwer ab 1913 allmählich von der Topologie ab, zunächst aufgrund des Ersten Weltkriegs, aber vor allem wegen seines steigenden Interesses für Fragen der Grundlagen der Mathematik und für die Entwicklung des Intuitionismus. Es ist schließlich erst 1923, dass Brouwer wieder gesteigerten Gefallen an der Topologie findet – aber nur kurzfristig und vor allem indirekt, während er die Arbeiten von Menger, Alexandroff und Vietoris anleitete –, scheinbar wiedererweckt durch die Resultate des vielversprechenden jungen russischen Topologen Pawel Urysohn, der aber wenig später verstarb.

6.2 Die Rolle Alexandroffs

Brouwers Einfluss beschränkte sich nicht nur auf jenen, den wir im Zusammenhang mit Vietoris herausgearbeitet hatten. Alexandroff hatte im Mai 1925 ebenfalls Brouwer in Blaricum besucht, das heißt, ein wenig vor der Ankunft Vietoris’. Wenn Alexandroff sich nach Blaricum begeben hat, dann deswegen, weil er selbst dabei war, zu überlegen, wie man die Eigenschaften und wesentlichen Konzepte der kombinatorischen Topologie für allgemeine Mannigfaltigkeiten anpassen könnte. Für diesen Zweck hatte er damit begonnen, die Grundlagen einer Topologie von Mannigfaltigkeiten mithilfe der Mengentheorie aufzustellen.[58] Seine Idee war es, n-dimensionale Objekte mit endlichen Mengen von n-dimensionalen „Tetraedern“ anzunähern, wo die fraglichen Tetraeder tatsächlich einfach durch die Angabe von $n+1$ Punkten definiert waren, die die Rolle der Ecken der Tetraeder spielten.

Die Approximationsvorgehensweise, die Alexandroff verwendet, ist klarerweise von jener Brouwers inspiriert, ebenso wie jene, die Vietoris verwendete, um Simplices in einem beliebigen Raum zu definieren. Das ist in der Tat kein Zufall;

[56] Siehe [Bro75, S. 120].

[57] Gemäß Dirk van Dalen, in [Dal99, S. 956]: “Brouwer stubbornly stuck to his geometrical approach, either unaware of the potential of homology as initiated by Poincaré, or just preferring the geometric attack.” Siehe auch das Urteil von Dieudonné in [Die89, S. 161]: “Nobody understands why Brouwer never mentioned these papers [of Poincaré], nor tried to apply his fundamental discovery of simplicial approximation to bring to life the theorems guessed by Poincaré (as Alexander did a little later).”

[58] Siehe seinen Artikel [Alex25], den er kurz vor seiner Ankunft in Blaricum fertiggestellt hatte.

Vietoris erkennt in [Vie26] den befruchtenden Beitrag der Konversationen mit Alexandroff, also dessen Einfluss, bei seinem Zugang zu den metrischen Räumen an.

McLarty wirft in [McL06] diese Frage des Gedankenaustauschs zwischen Alexandroff und Vietoris auf, was die Unabhängigkeit von Vietoris gegenüber den Ideen von Noether im Zusammenhang mit der Kreation der Homologiegruppen betrifft. Der springende Punkt ist, dass man, wie McLarty in [McL06] ausführt, behaupten kann, dass eine Motivation beim Übergang von numerischen Invarianten zu Homologiegruppen die Absicht ist, Resultate nicht nur für Räume zu formulieren, sondern auch für stetige Abbildungen zwischen den Räumen[59]. Hopfs Artikel aus dem Jahr 1928 illustriert diese Idee übrigens sehr gut. Aber diese verbindet sich klarerweise mit Emmy Noethers Projekt, die Algebra auf der Basis der Mengentheorie aufzubauen, indem man die Natur der Objekte und der algebraischen Operationen, die sie bilden, vergisst, um die Strukturen, die über den Objekten angesiedelt sind, mit Hilfe von bestimmten Teilmengen und bestimmten Abbildungen (Morphismen für besagte Strukturen)[60] zu beschreiben. Da der Einfluss von Emmy Noether auf Alexandroff unbestreitbar ist, als ja Alexandroff versuchte, die neuen Grundlagen der Topologie für den Beweis von Sätzen über stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen zu verwenden[61], und man den gleichen Typ von Sätzen im Artikel [Vie27A] von Vietoris findet, so kann man versucht sein, auf den Einfluss von Noether — oder in jedem Fall ihres Zuganges zur Topologie, via Alexandroff — auf Vietoris zu schließen.

Diese diversen vernetzten Zusammenspiele von Einflüssen stellen die Situation als eine sehr komplexe dar. Trotzdem scheint es uns nicht, dass man die Unabhängigkeit Vietoris' auf Grund der vorhergehenden Argumente in Zweifel ziehen kann. Auch wenn die algebraischen, und allenfalls topologischen Motivationen Noethers klar sind, so ist es die Art, in der ihre Zeitgenossen sie sich zu eigen machen konnten, insbesondere in einer so kurzen Zeit, viel weniger. Wenn Alexandroff eine genaue Vorstellung der algebraischen Ziele Noethers hatte und sich bemühte, diese in die Topologie zu übertragen, dann trifft das wahrscheinlich nicht auf Vietoris zu. Alexandroff verwirklichte die Synthese des Einflusses von Brouwer und jenes von Noether, während Vietoris tatsächlich viel grundlegender von Brouwer beeinflusst worden ist.

Wenn man die Absicht Noethers betont, sich auf die Strukturen und die Morphismen zwischen Strukturen zu konzentrieren, also auf Eigenschaften funktoriellen

[59] Bill Lawvere scheint zu behaupten, dass diese Motivation der Hauptgrund für das Heranziehen der Homologiegruppen auf Kosten der numerischen Invarianten ist. Ralf Krömer argumentiert detailliert für diese Ansichtsweise in [Kro07, 2.1.2].

[60] Für die Gruppen etwa sind jene Teilmengen die normalen Untergruppen, und jene Morphismen sind die Gruppenhomomorphismen. Man findet mehr Details im Artikel [McL06] von McLarty.

[61] Wie in [Alex26].

Typs, dann offensichtlich deswegen, weil man in der weiteren Verfolgung dieser die Geburtsstunde der Kategorientheorie sieht. Diese Anmerkung ist daher äußerst interessant, aber es scheint schwierig, diese Spuren der Absicht Noethers in Vietoris' Arbeit zu finden. Das älteste Resultat, das von Ralf Krömer festgehalten wird, das die Absicht, Abbildungen im Zusammenhang mit Homologie zu studieren, konkretisiert, ist die Verallgemeinerung der Euler-Poincaré-Formel von Hopf (was wir selbst als ersten wirkungsvollen Einsatz der Lehren Noethers festgehalten haben). Wie wir gesehen haben, ist diese im Rahmen von klassischen simplizialen Komplexen erzielt worden und bedurfte deswegen überhaupt nicht der topologischen Überlegungen Alexandroffs und Vietoris'. Die Arbeit Vietoris' scheint uns tatsächlich nicht der Ideen Noethers zu bedürfen, ebenso wie Noethers Ideen nicht seiner Arbeit bedurften, um sich zu legitimieren. Alexandroff könnte Vietoris bei der Kreation von Homologie für kompakte Räume geholfen haben, aber konkreterweise erscheinen uns die Ideen der Approximation, die auf die ersten Arbeiten Brouwers zurückgehen, bei Weitem die bedeutendsten in der Arbeit Vietoris', und man kann sich in jedem Fall schlecht vorstellen, dass Alexandroff mehr Einfluss auf Vietoris gehabt haben soll als Brouwer.

7 Konklusion

Der Artikel [May29] von Mayer zeigt sich auch sehr weit von Noethers Ideen und der Konkretisierung, wie sie Hopf angegeben hat, entfernt. Sein Hauptinteresse ist es, die erste Axiomatisierung der Homologiegruppen aufzustellen und so die Wichtigkeit dieses Konzepts zu bekräftigen. Aber durch bestimmte seiner Aspekte ist dieser Artikel rückwärtsgewandt im Vergleich zu den Vorstößen Vietoris'. Die von Mayer definierten Homologiegruppen sind weniger allgemein als jene, die von Vietoris betrachtet wurden, da Ersterer nur endlich-dimensionale Komplexe betrachtet. Während der Matrizenkalkül von Vietoris, sicherlich aus Notwendigkeit, aufgegeben wurde, ist er bei Mayer essentiell. Schließlich fehlt die Verwendung der Methoden der Gruppentheorie beinahe vollständig.

Vietoris' Motivationen unterscheiden sich sehr wohl von denen Hopfs und Noethers. Noether schreitet an eine Neubewertung des Aufbaus der Begriffe und meint, dass die Gruppentheorie an die Grundlage der Theorie der Komplexe gestellt werden soll und diese so die Mittel zur Verfügung stellen soll, die es erlauben, in den Rechnungen die wenig praktischen Inzidenzmatrizen zu ersetzen. Es ist eher normal, dass Noether einen solchen konzeptuellen Zugang vorgeschlagen hat, ohne dies durch ein konkretes Anwendungsbeispiel zu untermauern. Auf der einen Seite, weil sie keine Spezialistin der Topologie war; auf der anderen Seite, da die von ihr hervorgehobene Bedeutung der Gruppen in der Topologie nichts als ein Ausdruck eines allgemeinen Prinzips ist, das sie leitete, das darin bestand, die Grundlagen soweit wie nur möglich allgemein und abstrakt aufzustellen (das heißt insbesondere, indem sie die alleinigen Eigenschaften, die wesentlich sind und notwendig für die Definition der zu studierenden Objekte, abstrahiert hat). Im Fall der Topologie scheint es ihr, dass die Gruppen die Grundobjekte der Überlegungen sein sollten und nicht mehr die Moduln, die Linearformen oder die Betti- und Torsionszahlen. Um ein ähnliches Beispiel anzuführen: Einige Jahre später stellte sie einen Zusammenhang zwischen der Darstellungstheorie und den assoziativen Algebren mittels des Studiums nichtkommutativer Ringe her (siehe [Noe29]). Der Artikel [Hop28B] von Hopf konkretisiert die Ideen von Noether: Er isoliert die Definitionen und Eigenschaften, die der Gruppentheorie eigen sind und die ihm dienlich sein werden, und er definiert die Komplexe derart, dass er die so eingeführten Begriffe leicht anwenden kann. Er demonstriert so das praktische Interesse an der Einführung der Gruppentheorie in der Topologie, während diese bis dahin nur als ästhetische oder philosophische Wahl betrachtet werden konnte.

Dennoch wurde der erste Beweis der wesentlichen Bedeutung der Gruppen in der Topologie nicht von Hopf, sondern von Vietoris erbracht. Die Verdienste von Hopf und Vietoris sind im Übrigen sehr wohl verschieden und sie sind komplementär. Mit dem Artikel aus dem Jahr 1928 erzielt Hopf eine Vereinfachung eines Beweises durch die Anwendung der Theorie der freien abelschen Gruppen und er lässt einen vereinfachten Zugang zur Homologie dank der Mittel der Gruppentheorie erahnen. Aber er verbleibt im sehr klassischen Rahmen der kombinatorischen Komplexe und zeigt kein einziges neues Resultat.[62] Vietoris hingegen verlässt den kombinatorischen Rahmen und beschließt, die Homologie von Räumen zu studieren, die bis dahin außer Reichweite lagen, was ihn dazu führt, die Homologiegruppe einzuführen. Die Homologiegruppen drängen sich ihm in seiner Studie als Notwendigkeit auf und sie erlauben es, den Forschungsbereich in der Topologie zu erweitern. Das heißt, wenn auch die Gruppen auf natürliche Weise in der Arbeit Vietoris' erscheinen, so werden sie nicht so sehr angenommen, wie das durch Hopf oder Noether geschehen wäre. In der Tat, im Gegensatz zu Hopf rüstet sich Vietoris nicht mit einer theoretischen Grundlage in Form von kurzen Wiederholungen aus der Gruppentheorie aus, und, wie wir es bereits früher erwähnten: Mit dem Quotientenbegriff scheint mit einem gewissen Misstrauen umgegangen zu werden.

Wenn wir zum Abschluss auf den weitergehenden Problemkreis der Einführung der Algebraisierung in der Topologie eingehen, den wir schon in der Einführung angesprochen hatten, dann haben die Realisierungen von Hopf und Vietoris beide eine große Bedeutung und sind komplementär. In der Tat, wenn man Klaus Volkert [Vol02] folgt, für den die Gründe für die Algebraisierung der Topologie einerseits die Vereinfachung und die Klarstellung der Theorie und andererseits die

[62] Er hatte bereits in [Hop28A] seine Verallgemeinerung der Euler-Poincaré-Formel unter Benutzung klassischer kombinatorischer Methoden präsentiert, ohne Verwendung der Homologiegruppen. Die Neuheit dieser Verallgemeinerung kommt daher, dass sie eine Eigenschaft ausdrückt, die auf einer stetigen Abbildung zwischen Komplexen beruht. Der Artikel [Hop28B] formuliert diese Verallgemeinerung um und beweist sie in einfacherer Weise mit Hilfe der Bettigruppen.

Verallgemeinerung auf den nicht endlich erzeugten Fall sind,[63] dann wird es klar, dass die Ideen von Noether und die Arbeiten von Hopf ihren Ursprung im ersten Grund haben, während jene Vietoris' ihren Ursprung im zweiten Grund hat.

Bemerkenswerterweise haben Alexandroff und Hopf die Arbeiten von Vietoris und Mayer, die wir studiert haben, über das System der Besprechungen mathematischer Artikel kennengelernt! Auf diese Weise besitzen wir Andeutungen der Einschätzung der Arbeiten von Vietoris und Mayer durch Alexandroff und Hopf. Der Artikel [Vie27A] von Vietoris und der Artikel [May29] von Mayer sind von Alexandroff beziehungsweise von Hopf für das *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (aus dem Jahr 1927 respektive aus dem Jahr 1929) gelesen worden. Hopf scheint ein veritables Interesse an der Arbeit Mayers gefunden zu haben. Er merkt an, dass die Komplexe dort in abstrakter Weise betrachtet werden, und dass die Mengen der Komplexe, der Zykeln, der Homologieklassen dort als abelsche Gruppen behandelt werden, aber er unterstreicht nicht die Einführung der Homologiegruppen. Hopf betrachtet also die Präsenz der Gruppentheorie in Mayers Artikel als wichtigen Sachverhalt, mehr als die bloße Definition der Homologiegruppe, selbst wenn dessen Verbundenheit mit der Matrixsichtweise den ihm möglich gewesenen Einsatz der Werkzeuge der Gruppentheorie in großem Ausmaß eingeschränkt. Die Einführung der Homologiegruppen in Mayers Artikel scheint im Übrigen derart wenig aufgefallen zu sein, dass Hopf 1964 in [Hop66, S. 12] schreiben wird: „Ich weiss nicht einmal, ob der Begriff der ‚Homologiegruppe' schon irgendwo schwarz auf weiss in der Literatur vorgekommen war. Ich selbst habe sie zum ersten Mal in meiner Note ‚Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel' (...) benutzt." In der Erwähnung von [Hop28B] in den Selecta wird er das so differenzieren: „Die obige Note ist wohl die erste Publikation gewesen, in der die heute geläufige, von EMMY NOETHER stammende gruppentheoretische Auffassung der Homologietheorie zur Geltung kommt."[64] Der Kommentar von Alexandroff zum Artikel von Vietoris ist noch überraschender: Er gibt sich damit zufrieden, die hier präsentierte Verallgemeinerung der Begriffe des Artikels [Bro12A] von Brauer und das Hauptresultat des Artikels zu erwähnen, ohne auch nur auf die Einführung der Homologiegruppen hinzuweisen. Es scheint solcherart, dass für Alexandroff und Hopf der wahre konzeptuelle Vorstoß die Umgestaltung der Topologie durch Basierung auf der Gruppentheorie war, aber dass die Definiti-

[63] Als Illustration der wesentlichen Bedeutung des zweiten Kriteriums könnte man anmerken, dass 1930 van der Waerden eine Art Bestandsaufnahme der Topologie (siehe [Wae30]) publiziert, mit dem Titel *Kombinatorische Topologie*, dessen Studienobjekt nach ihm die Komplexe sind, die ausgehend von einer endlichen Anzahl von Simplices gebildet werden, und die die Arbeiten von Hopf und die Homologiegruppen einbezieht.

[64] Siehe [Hop64, S. 183]. Durch diesen Satz drückt sich Hopf nicht mehr so aus, wie das im vorhergehenden Zitat über das erste Vorkommen des Begriffs der Homologiegruppe der Fall gewesen ist, sondern unterstreicht den Umstand, dass sein Artikel [Hop28B] der erste ist, der die Konzepte der Gruppentheorie in der Topologie bevorzugt und wirkungsvoll einsetzt, was man nicht bestreiten kann.

on des Begriffs der Homologiegruppe und das Erfassen von Vietoris von Objekten wie den kompakten metrischen Räumen, die über den damals gewohnten Rahmen hinausgingen, scheinbar in ihren Augen von einer – wie man retrospektiv urteilen muss: ungerechterweise – schwachen Bedeutung wäre.

Das präzise historische Phänomen, das wir in diesen Seiten studiert haben, legt ein allgemeineres Phänomen an den Tag, nämlich jenes des Aufschwungs und der Akzeptanz der modernen Algebra, dieser so bedeutende Vorgang in der Evolution der Algebra im zwanzigsten Jahrhundert. Der unleugbare Beitrag der modernen Algebra in der gegenwärtigen Forschung darf nicht vergessen machen, dass die Annahme ihres Charakters durch die Mathematiker nicht automatisch vonstatten ging. So drückte etwa Hermann Weyl 1931 seine Skepsis über abstrakte Methoden[65] aus, und das ist nur ein Beispiel unter vielen anderen.

Die Algebraisierung der Topologie, die man zu einem guten Teil Personen und Ideen, die man mit der modernen Algebra verbindet, zuschreiben muss, hatte einige Zeit gegen die Meinung anzukämpfen, dass sie überflüssig wäre.[66] Die Widerstände gegen eine Verwendung der Gruppentheorie in der Topologie, die man noch in den 1930er-Jahren vorfand, und das unter illustren Mathematikern der Epoche, lassen einen glauben, dass der Artikel von Hopf, trotz seiner Meriten und der Demonstration, dass die Gruppentheorie ein perfekt geeigneter Rahmen für die kombinatorische Topologie ist, einen zu kleinen praktischen Gewinn dargeboten hat, um alleine zur Algebraisierung der Topologie zu führen. Und dies unterstreicht im Gegensatz dazu ein weiteres Mal den Wert des Beitrags von Vietoris, dessen Artikel einen breiteren Rahmen von Untersuchungen in der Topologie bot – mithilfe des Begriffs der Homologiegruppen, wenn auch ohne die Ideen der modernen Algebra einzusetzen.

Unsere Schlussfolgerung sieht sich durch Alexandroff selbst bestärkt … Dieser deutete in seinem Auftritt[67] während des International Congress of Mathematicians 1954, der das 100-jährige Jubiläum des Geburtstages von Henri Poincaré würdigte, die praktischen Umsetzungen an, die der Algebraisierung der Topologie zuzuschreiben sind, und die, nach ihm, schließlich die Art von Zweifeln, wie sie Weyl und Lefschetz zu Beginn der 1930er-Jahre ausdrückten, verschwinden ließen.[68] Es handelt sich dabei für ihn um den Aufbau der Theorie der Dua-

---

[65] Zitiert von Alexandroff in [Alex83, S. 4]: “I should not pass over in silence the fact that today the feeling among mathematicians is beginning to spread that the fertility of these abstracting methods is approaching exhaustion.”

[66] Für Lefschetz, im Jahr 1930, ist die Verwendung der Gruppentheorie in der Topologie nichts als eine Frage der Terminologie … Siehe [Lef30]: “Indeed everything that follows in this section can be, and frequently is, translated into the theory of groups. It is of course a mere question of a different terminology.”

[67] Seine Ansprache wurde 1972 übersetzt, siehe [Alex72].

[68] Wir verweisen den Leser, der mehr über den Prozess der Algebraisierung der Topologie im Anschluss an die Einführung der Homologieguppen zu erfahren wünscht, auf Kapitel 6 in [Vol02], das darüber eine zusammenfassende historische Studie anbietet.

lität, um die Übertragung homologischer Konzepte auf andere Räume als die Polyeder und um die Einführung der Kohomologie. Wenn der Beitrag von Vietoris zum zweiten Punkt, den Alexandroff nennt, der offensichtlichste ist und in den vorhergehenden Zeilen herausgestrichen wurde, so sollten wir auch nicht die Tatsache verheimlichen, dass in einer der zentralen Arbeiten Pontrjagins [Pon34] über Dualität dieser gerade die Homologie, wie sie Vietoris ausgearbeitet hatte, verwendete!

Literatur

[Ale26] J. W. Alexander, *Combinatorial analysis situs*, Transactions of the American Mathematical Society **28** (1926), 301–329.

[Alex25] P. S. Alexandroff, *Begründung der n-dimensionalen mengentheoretischen Topologie*, Mathematische Annalen **94** (1925), 296–308.

[Alex26] P. S. Alexandroff, *Über stetige Abbildungen kompakter Räume*, Mathematische Annalen **96** (1926), 555–571.

[Alex72] P. S. Alexandroff, *Poincaré and topology*, Russian Mathematical Surveys **27** (1972), 157–168.

[Alex79] P. S. Alexandroff, *Pages from an autobiography*, Russian Mathematical Surveys **34** (6) (1979), 267–302; **35** (3) (1980), 315–358.

[Alex83] P. S. Alexandroff, *In memory of Emmy Noether, Address delivered by the President of the Moscow Mathematical Society P. S. Alexandrov on September 5. 1935*. In: *Emmy Noether*, Gesammelte Abhandlungen, Collected Papers, Springer-Verlag, 1983, 1–11.

[AH35] P. S. Alexandroff und H. Hopf, *Topologie*, Springer, Berlin, 1935.

[Bre99] E. Breitenberger, *Johann Benedikt Listing*, History of topology, 909–924, North-Holland, Amsterdam, 1999.

[Bro12A] L. E. J. Brouwer, *Beweis der Invarianz der geschlossenen Kurve*, Mathematische Annalen **72** (1912), 422–425.

[Bro12B] L. E. J. Brouwer, *Continuous one-one transformations of surfaces in themselves*, Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen **15** (1912), 352–360. In *Collected works*, Vol. 2, 527–535.

[Bro75] L. E. J. Brouwer, *The nature of geometry*, Collected Works, Vol. 1. Philosophy and Foundations of Mathematics, 112–120, North-Holland, Amsterdam (1975).

[Cor96] L. Corry, *Modern algebra and the rise of mathematical structures*, Birkhäuser, 1996.

[Dal99] D. van Dalen, *Luitzen Egbertus Jan Brouwer. 27.2.1881 Overschie – 2.12.1966 Blaricum*, History of topology, 947–964, North-Holland, Amsterdam, 1999.

[Die84] J. Dieudonné, *Emmy Noether and algebraic topology*, Journal of Pure and Applied Algebra **31** (1984), 5–6.

[Die89] J. Dieudonné, *A History of Algebraic and Differential Topology 1900–1960*, Birkhäuser, 1989.

[Epp99] M. Epple, *Die Entstehung der Knotentheorie, Kontexte und Konstruktionen einer modernen mathematischen Theorie*, Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1999.

[FH76] H. Freudenthal und A. Heyting, *The life of L. E. J. Brouwer (27 February 1881 – 2 December 1966)*, in Brouwer *Collected Works, Vol. 2: Geometry, Analysis, Topology and Mechanics*, Amsterdam, New York, Oxford: North Holland, 1976; X–XV.

[Hau02] F. Hausdorff, *Gesammelte Werke*, Band II, Springer, 2002.

[Her98] A. Herreman, *"Topology becomes algebraic with Emmy Noether": linear combinations and the algebraisation of topology*, Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte, Preprint 106, 1998.

[Her00] A. Herreman, *La topologie et ses signes : Éléments pour une histoire sémiotique des mathématiques*, Paris : L'Harmattan, 2000.

[Hir99] F. Hirzebruch, *Emmy Noether and topology*, The heritage of Emmy Noether (Ramat-Gan, 1996), 57–65, Israel Math. Conf. Proc., 12, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1999.

[Hol89] O. Hölder, *Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen*, Mathematische Annalen **34** (1889), 26–56.

[Hop28A] H. Hopf, *A new proof of the Lefschetz formula on invariant points*, Proceedings of the National Academy of Sciences USA **14** (1928), 149–153.

[Hop28B] H. Hopf, *Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse (1928), 127–136.

[Hop64] H. Hopf, *Selecta*, Springer-Verlag, 1964.

[Hop66] H. Hopf, *Einige persönliche Erinnerungen aus der Vorgeschichte der heutigen Topologie*, Colloque de Topologie, CBRM Bruxelles (1966), 9–20.

[Kro07] R. Krömer, *Tool and object: a history and philosophy of category theory*, Birkhäuser, 2007.

[Kro70] L. Kronecker, *Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Klassenzahl idealer complexer Zahlen* [Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 1. Dezember 1870.]; *Leopold Kronecker's Werke* 1, Chelsea, 1968.

[Lak84] I. Lakatos, *Preuves et réfutations*, Paris, Hermann, 1984.

[Lef30] S. Lefschetz, *Topology*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1930.

[Lis47] J. B. Listing, *Vorstudien zur Topologie*, Göttinger Studien (1847), Göttingen, 1848.

[ML86] S. Mac Lane, *Topology becomes algebraic with Vietoris and Noether*, Journal of Pure and Applied Algebra **39** (1986), 305–307.

[McL06] C. McLarty, *Emmy Noether's 'set theoretic' topology: from Dedekind to the rise of functors*, in *The architecture of modern mathematics*, 187–208, Oxford Univ. Press, Oxford, 2006.

[May29] W. Mayer, *Über abstrakte Topologie*, Monatshefte für Mathematik und Physik **36** (1929), 1–42, 219–258.

[Noe25] E. Noether, *Ableitung der Elementarteilertheorie aus der Gruppentheorie*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **34** (1926), 104 kursiv (2. Abteilung; Mitteilung der Math. Gesellschaft in Göttingen vom 27.

Januar 1925).
[Noe29] E. Noether, *Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie*, Mathematische Zeitschrift **30** (1929), 641–692.
[Pon34] L. Pontrjagin, *The general topological theorem of duality for closed sets*, Annals of Mathematics **35** (4) (1934), 904–914.
[Sar99] K. S. Sarkaria, *The topological work of Henri Poincaré*, History of Topology, 123–168, North-Holland, Amsterdam, 1999.
[Sch99] E. Scholz, *The concept of manifold, 1850–1950*, History of Topology, 25–64, North-Holland, Amsterdam, 1999.
[Van92] R. Vanden Eynde, *Historical evolution of the concept of homotopic paths*, Arch. Hist. Exact Sci. **45** (1992), no. 2, 127–188.
[Veb21] O. Veblen, *Analysis Situs*, 2° ed. AMS, New York, 1921.
[Vie26] L. Vietoris, *Über den höheren Zusammenhang von kompakten Räumen und eine Klasse von Abbildungen, welche ihn ungeändert läßt*, Proc. Amsterdam **29** (1926), 1008–1013.
[Vie27A] L. Vietoris, *Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen*, Mathematische Annalen **97** (1927), 454–472.
[Vie27B] L. Vietoris, *Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (2. Abt.) **36** (1927), 28–29.
[Vol02] K. Volkert, *Das Homöomorphismusproblem, insbesondere der* 3*-Mannigfaltigkeiten, in der Topologie 1892–1935*, Philosophia Scientiæ, Cahier spécial **4** (2002).
[Wae30] B. L. van der Waerden, *Kombinatorische Topologie*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung **39** (1930), 121–139.
[Wae31] B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra* 2, Berlin, 1931.
[Wae35] B. L. van der Waerden, *Nachruf auf Emmy Noether*, Mathematische Annalen **111** (1935), 469–476.
[Wae85] B. L. van der Waerden, *A History of Algebra, From al-Khwarizmi to Emmy Noether*, Springer, Berlin, 1985.
[Wei99] C. A. Weibel, *History of Homological Algebra*, History of topology, 797–836, North-Holland, Amsterdam, 1999.
[Wey23] H. Weyl, *Análisis situs combinatorio*, Revista Matematica Hispano-Americana **5** (1923), 43 S.

Der Autor absolvierte ein Mathematikstudium an der Université de Nice Sophia-Antipolis, das er im Jahr 2009 mit einer Dissertation in Geschichte der Mathematik mit dem Titel „La naissance de la cohomologie des groupes“ unter der Anleitung von Frédéric Patras abschloss.

Adresse des Autors: Nicolas Basbois, Laboratoire J.-A. Dieudonné, Parc Valrose, Université de Nice, 06108 Nice Cedex 2.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 217 (2011), 39–46

Nefarious Numbers

Douglas N. Arnold and Kristine K. Fowler
University of Minnesota

This article has appeared in the March 2011 issue of the Notices of the American Mathematical Society. *It is reprinted here with friendly permission by the authors and the publisher.*

Introduction

The impact factor has been widely adopted as a proxy for journal quality. It is used by libraries to guide purchase and renewal decisions, by researchers deciding where to publish and what to read, by tenure and promotion committees laboring under the assumption that publication in a higher impact factor journal represents better work, and by editors and publishers as a means to evaluate and promote their journals. The impact factor for a journal in a given year is calculated by ISI (Thomson Reuters) as the average number of citations in that year to the articles the journal published in the preceding two years. It has been widely criticized on a variety of grounds[1,2,3,4]:

— A journal's distribution of citations does not determine its quality.

— The impact factor is a crude statistic, reporting only one particular item of information from the citation distribution.

— It is a flawed statistic. For one thing, the distribution of citations among papers is highly skewed, so the mean for the journal tends to be misleading. For another, the impact factor only refers to citations within the first two years after publication (a particularly serious deficiency for mathematics, in which around 90% of citations occur after two years).

[1] P. O. Seglen, Why the impact factor of journals should not be used for evaluating research. BMJ 314 (1997), 498–502.

[2] J. Ewing, Measuring journals. Notices of the AMS 53 (2006), 1049–1053.

[3] R. Golubic, M. Rudes, N. Kovacic, M. Marusic, and A. Marusic, Calculating impact factor: how bibliographical classification of journal items affects the impact factor of large and small journals. Sci. Eng. Ethics 14 (2008), 41–49.

[4] R. Adler, J. Ewing, and P. Taylor, Citation statistics. Statistical Sciences 24 (2009), 1–14.

ISSN 0020-7926

— The underlying database is flawed, containing errors and including a biased selection of journals.

— Many confounding factors are ignored, for example, article type (editorials, reviews, and letters versus original research articles), multiple authorship, self-citation, language of publication, etc.

Despite these difficulties, the allure of the impact factor as a single, readily available number – not requiring complex judgments or expert input, but purporting to represent journal quality – has proven irresistible to many. Writing in 2000 in a newsletter for journal editors, Amin and Mabe[5] wrote that the "impact factor has moved in recent years from an obscure bibliometric indicator to become the chief quantitative measure of the quality of a journal, its research papers, the researchers who wrote those papers and even the institution they work in". It has become commonplace for journals to issue absurd announcements touting their impact factors, like this one which was mailed around the world by World Scientific, the publisher of the *International Journal of Algebra and Computation*: "IJAC's Impact Factor has improved from 0.414 in 2007 to 0.421 in 2008! Congratulations to the Editorial Board and contributors of IJAC." In this case, the 1.7% increase in the impact factor represents a single additional citation to one of the 145 articles published by the journal in the preceding two years.

Because of the (misplaced) emphasis on impact factors, this measure has become a target at which journal editors and publishers aim. This has in turn led to another major source of problems with the factor. Goodhart's law warns us that "when a measure becomes a target, it ceases to be a good measure."[6] This is precisely the case for impact factors. Their limited utility has been further compromised by impact factor manipulation, the engineering of this supposed measure of journal quality, in ways that increase the measure, but do not add to – indeed subtract from – journal quality.

Impact factor manipulation can take numerous forms. In a 2007 essay on the deleterious effects of impact factor manipulation, Macdonald and Kam[7] noted wryly that "the canny editor cultivates a cadre of regulars who can be relied upon to boost the measured quality of the journal by citing themselves and each other shamelessly". There have also been widespread complaints by authors of manuscripts under review, who were asked or required by editors to cite other papers from the journal. Given the dependence of the author on the editor's decision for publication, this practice borders on extortion, even when posed as a suggestion. In most

[5] M. Amin and M. Mabe, Impact factors: use and abuse. Perspectives in Publishing 1 (2000), 1–6.

[6] This succinct formulation is from M. Strathern, 'Improving ratings': audit in the British University system, European Review 5 (1997), 305–321.

[7] S. Macdonald and J. Kam, Aardvark et al.: quality journals and gamesmanship in management studies. Journal of Information Science 33 (2007), 702–717.

cases, one can only guess about the presence of such pressures, but overt instances were reported already in 2005 by Monastersky[8] in the *Chronicle of Higher Education* and Begley[9] in the *Wall Street Journal*. A third well-established technique by which editors raise their journals' impact factors, is by publishing review items with large numbers of citations to the journal. For example, the Editor-in-Chief of the *Journal of Gerontology A* made a practice of authoring and publishing a review article every January focusing on the preceding two years; in 2004, 195 of the 277 references were to the *Journal of Gerontology A*. Though the distortions these unscientific practices wreak upon the scientific literature have raised occasional alarms, many suppose that they either have minimal effect or are so easily detectable they can be disregarded. A counterexample should confirm the need for alarm.

The case of IJNSNS

The field of applied mathematics provides an illuminating case in which we can study such impact factor distortion. For the last several years, the *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation* (IJNSNS) has dominated the impact factor charts in the "Mathematics, Applied" category. It took first place in each year 2006, 2007, 2008, and 2009, generally by a wide margin, and came in second in 2005. However, as we shall see, a more careful look indicates that IJNSNS is nowhere near the top of its field. Thus we set out to understand the origin of its large impact factor.

In 2008, the year we shall consider in most detail, IJNSNS had an impact factor of 8.91, easily the highest among the 175 journals in the applied math category in ISI's Journal Citation Reports (JCR). As controls, we will also look at the two journals in the category with the second and third highest impact factors, *Communications on Pure and Applied Mathematics* (CPAM), and *SIAM Review* (SIREV), with 2008 impact factors of 3.69 and 2.80, respectively. CPAM is closely associated with the Courant Institute of Mathematical Sciences, and SIREV is the flagship journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).[10] Both journals have a reputation for excellence. Evaluation based on expert judgment is the best alternative to citation-based measures for journals. Though not without potential problems of its own, a careful rating by experts is likely to provide a much more accurate and holistic guide to journal quality than impact factor or similar metrics. In mathematics, as in many fields, researchers are widely in agreement about which are the best journals in their specialties. The Australian Research Council recently released such an evaluation, listing quality

[8] R. Monastersky, The number that's devouring science. Chronicle of Higher Education 52 (2005).

[9] S. Begley, Science journals artfully try to boost their rankings. Wall Street Journal, 5 June 2006, B1.

[10] The first author is the current president of SIAM.

ratings for over 20,000 peer-reviewed journals across disciplines. The list was developed through an extensive review process involving learned academies (such as the Australian Academy of Science), disciplinary bodies (such as the Australian Mathematical Society), and many researchers and expert reviewers.[11] This rating will be used in 2010 for the Excellence in Research Australia assessment initiative, and is referred to as the ERA 2010 Journal List. The assigned quality rating, which is intended to represent "the overall quality of the journal", is one of four values:

- A*: one of the best in its field or subfield
- A: very high quality
- B: solid, though not outstanding reputation
- C: does not meet the criteria of the higher tiers.

The ERA list included all but five of the 175 journals assigned a 2008 impact factor by JCR in the category "Mathematics, Applied". Figure 1 shows the impact factors for journals in each of the four rating tiers. We see that, as a proxy for expert opinion, the impact factor does rather poorly. There are many examples of journals with a higher impact factor than other journals which are one, two, and even three rating tiers higher. The red line is drawn so that 20% of the A* journals are below it; it is notable that 51% of the A journals have an impact factor above that level, as do 23% of the B journals and even 17% of those in the C category. The most extreme outlier is IJNSNS, which, despite its relatively astronomical impact factor, is not in the first or second, but rather third tier. The ERA rating assigned its highest score, A*, to 25 journals. Most of the journals with the highest impact factors are here, including CPAM and SIREV, but of the top 10 journals by impact factor, two were assigned an A, and only IJNSNS was assigned a B. There were 53 A-rated journals, and 69 B-rated journals altogether. If IJNSNS were assumed to be the best of the B journals, there would be 78 journals with higher ERA ratings, while if it were the worst, its ranking would fall to 147. In short, the ERA ratings suggest that IJNSNS is not only not the top applied math journal, but its rank should be somewhere in the range 75–150. This remarkable mismatch between reputation and impact factor begs an explanation.

Makings of a high impact factor

A first step to understanding IJNSNS's high impact factor is to look at how many authors contributed substantially to the counted citations, and who they were. The top-citing author to IJNSNS in 2008 was the journal's Editor-in-Chief, Ji-Huan He, who cited the journal (within the two-year window) 243 times. The second top-citer, D. D. Ganji, with 114 cites, is also a member of the editorial board, as

[11] Australian Research Council, Ranked Journal List Development, *http://www.arc.gov.au/era/journal_list_dev.htm*.

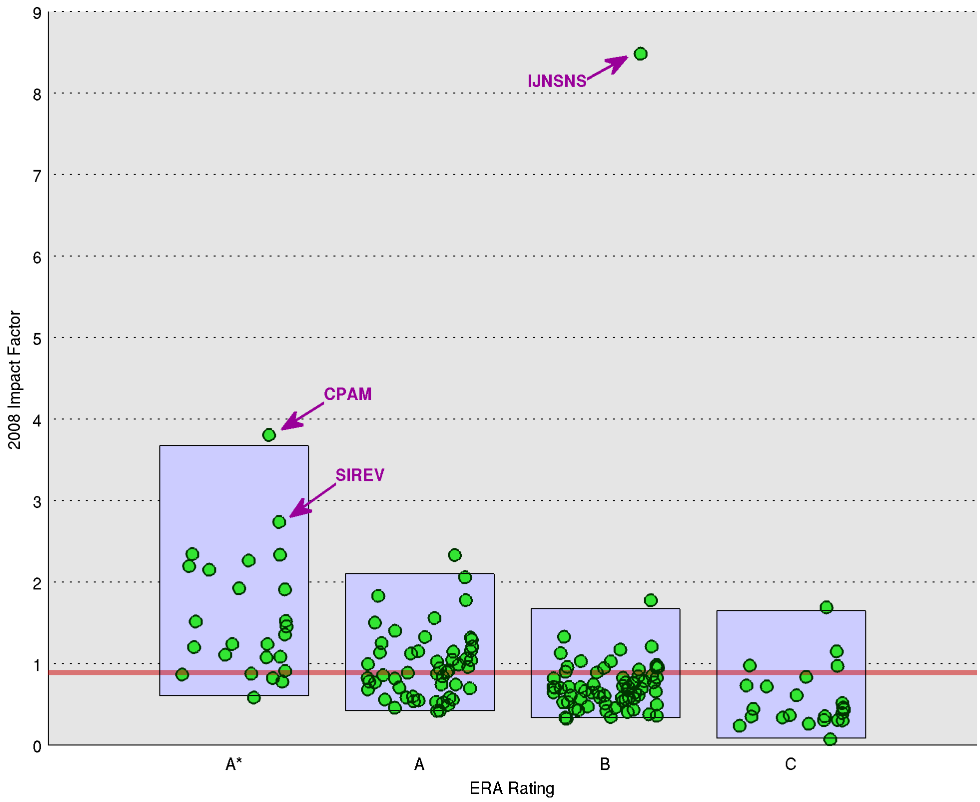


Figure 1: 2008 impact factors of 170 applied math journals grouped according to their 2010 ERA rating tier. In each tier, the band runs from the 2.5th to the 97.5th percentile, outlining the middle 95%. Horizontal position of the data points within tiers is assigned randomly to improve visibility. The red line is at the 20th percentile of the A^* tier.

is the third, regional editor Mohamed El Naschie, with 58 cites. Together these three account for 29% of the citations counted towards the impact factor. For comparison, the top three citers to SIREV contributed only 7, 4, and 4 citations, respectively, accounting for less than 12% of the counted citations, and none of these authors is involved in editing the journal. For CPAM the top three citers (9, 8, and 8) contributed about 7% of the citations, and, again, were not on the editorial board. Another significant phenomenon is the extent to which citations to IJNSNS are concentrated within the 2-year window used in the impact factor calculation. Our analysis of 2008 citations to articles published since 2000 shows that 16% of the citations to CPAM fell within that 2-year window, and only 8% of those to SIREV did; in contrast, 71.5% of the 2008 citations to IJNSNS fell within the 2-year window. In Table 1, we show the 2008 impact factors for the three journals, as well as a modified impact factor, which gives the average number of citations in 2008 to articles the journals published not in 2006 and 2007, but in the preceding six years. Since the cited half-life (the time it takes to generate half of all the eventual citations to an article) for applied mathematics is nearly 10 years,[12] this measure is at least as reasonable as the impact factor. It is also independent, unlike JCR's 5-Year Impact Factor, as its time period does not overlap with that targeted by the impact factor. Note that the impact factor of IJNSNS

Journal	2008 impact factor with normal 2006–7 window	Modified 2008 "impact factor" with 2000–5 window
IJNSNS	8.91	1.27
CPAM	3.69	3.46
SIREV	2.8	10.4

Table 1: *2008 impact factors computed with the usual two-preceding years window, and with a window going back eight years but neglecting the two immediately preceding.*

drops precipitously, by a factor of seven, when we consider a different citation window. By contrast the impact factor of CPAM stays about the same and that of SIREV increases markedly. One may simply note that, in distinction to the controls, the citations made to IJNSNS in 2008 greatly favor articles published in precisely the two years which are used to calculate the impact factor.

Further striking insights arise when we examine the high-citing journals rather than high-citing authors. The counting of journal self-citations in the impact factor is frequently criticized, and indeed it does come into play in this case. In 2008, IJNSNS supplied 102, or 7%, of its own impact factor citations. The corresponding numbers are 1 citation (0.8%) for SIREV and 8 citations (2.4%) for CPAM. The disparity in other recent years is similarly large or larger.

However, it was *Journal of Physics: Conference Series*, which provided the greatest number of IJNSNS citations. A single issue of that journal provided 294 citations to IJNSNS in the impact-factor window, accounting for more than 20% of its impact factor. What was this issue? It was the proceedings of a conference organized by IJNSNS Editor-in-Chief He at his home university. He was responsible for the peer review of the issue. The second top-citing journal for IJNSNS was *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, which contributed 206 citations (14%), again with all citations coming from a single issue. This was a special issue with Ji-Huan He as the guest editor; his co-editor, Lan Xu, is also on the IJNSNS editorial board. J.-H. He himself contributed a brief article to the special issue, consisting of 3 pages of text and 30 references. Of these, 20 were citations

[12] In 2010, Journal Citation Reports assigned the category "Mathematics, Applied" an aggregate cited half-life of 9.5 years.

to IJNSNS within the impact-factor window. The remaining 10 consisted of 8 citations to He and 2 to Xu.

Continuing down the list of IJNSNS high-citing journals, another similar circumstance comes to light: 50 citations from a single issue of the *Journal of Polymer Engineering* (which, like IJNSNS, is published by Freund), guest-edited by the same pair Ji-Huan He and Lan Xu. However, third place is held by the journal *Chaos, Solitons & Fractals*, with 154 citations spread over numerous issues. These are again citations which may be viewed as subject to editorial influence or control. In 2008 Ji-Huan He served on the editorial board of CS&F, and its Editor-in-Chief was Mohamed El Naschie, who was also a co-editor of IJNSNS. In a highly publicized case, the entire editorial board of CS&F was recently replaced, but El Naschie remained co-editor of IJNSNS.

Many other citations to IJNSNS came from papers published in journals for which He served as editor, such as *Zeitschrift für Naturforschung A*, which provided 40 citations; there are too many others to list here, since He serves in an editorial capacity on more than 20 journals (and has just been named Editor-in-Chief of four more journals from the newly-formed Asian Academic Publishers). Yet another source of citations came from papers authored by IJNSNS editors other than He, which accounted for many more. All told, the aggregation of such editor-connected citations, which are time-consuming to detect, account for more than 70% of all the citations contributing to the IJNSNS impact factor.

Bibliometrics for individuals

Bibliometrics are also used to evaluate individuals, articles, institutions and even nations. *Essential Science Indicators*, which is produced by Thomson Reuters, is promoted as a tool for ranking "top countries, journals, scientists, papers, and institutions by field of research". However, these metrics are primarily based on the same citation data used for journal impact factors and thus they can be manipulated just as easily, indeed simultaneously. The special issue of *Journal of Physics: Conference Series* which He edited and which garnered 243 citations for his journal, also garnered 353 citations to He himself. He claims a total citation count of over 6,800.[13] Even half that is considered highly noteworthy as evidenced by this announcement in ScienceWatch.com:[14] "According to a recent analysis of Essential Science Indicators from Thomson Scientific, Professor Ji-Huan He has been named a Rising Star in the field of Computer Science... His citation record in the Web of Science includes 137 papers cited a total of 3,193 times to date." Together with only a dozen other scientists in all fields of science, He was cited by ESI for the "Hottest Research of 2007–8" and again for the "Hottest Research of 2009".

The h-index is another popular citation-based metric for researchers, intended to

[13]This claim, and that of an h-index of 39, are made in the biographical notes of one of his recent papers (Nonl. Sci. Letters 1 (2010), page 1).

[14]ScienceWatch.com, April 2008, *http://sciencewatch.com/inter/aut/2008/08-apr/08aprHe/*.

measure productivity as well as impact. An individual's h-index is the largest number such that many of his or her papers have been cited at least that many times. It too is not immune from Goodhart's law. J.-H. He claims an h-index of 39, while Hirsch estimated the median for Nobel prize winners in physics to be 35.[15] Whether for judgment of individuals or journals, citation-based designations are no substitute for an informed judgment of quality.

Closing thoughts

Despite numerous flaws, the impact factor has been widely used as a measure of quality for journals, and even for papers and authors. This creates an incentive to manipulate it. Moreover, it is possible to vastly increase impact factor without increasing journal quality at all. The actions of a few interested individuals can make a huge difference, yet require considerable digging to reveal. We primarily discussed one extreme example, but there is little reason to doubt that such techniques are being used to a lesser – and therefore less easily detected – degree by many journals. The cumulative result of the design flaws and manipulation is that impact factor gives a very inaccurate view of journal quality. More generally, the citations which form the basis of the impact factor and various other bibliometrics are inherently untrustworthy.

The consequences of this unfortunate situation are great. Rewards are wrongly distributed, the scientific literature and enterprise are distorted, and cynicism about them grows. What is to be done? Just as for scientific research itself, the temptation to embrace simplicity when it seriously compromises accuracy, must be resisted. Scientists who give in to the temptation to suppress data or fiddle with statistics to draw a clearer point are censured. We must bring a similar level of integrity to the evaluation of research products. Administrators, funding agencies, librarians, and others needing such evaluations should just say no to simplistic solutions, and approach important decisions with thoughtfulness, wisdom, and expertise.

Douglas N. Arnold is McKnight Presidential Professor of Mathematics at the University of Minnesota and president of the Society for Industrial and Applied Mathematics. Kristine K. Fowler is mathematics librarian at the University of Minnesota. *The authors gratefully acknowledge the assistance of Susan K. Lowry, who developed and supported the database used in this study, and Molly T. White.*

Authors' address: University of Minnesota, Minneapolis, USA. email arnold@umn.edu, fowler@math.umn.edu.

[15] J. Hirsch, An index to quantify an individual's scientific research output. PNAS 102 (2005), 16569–16572.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 217 (2011), 47–54

Der Einfluss des Aufgabenformats bei Multiple-Choice-Aufgaben auf die Lösungshäufigkeit – in einem vereinfachten Modell

Hans Humenberger und Gerhard Kirchner
Universität Wien, Universität Innsbruck

In einem vereinfachten Modell wird gezeigt, dass der Einfluss des Formats bei Multiple Choice-Aufgaben ein wesentlicher zu sein scheint. Daher ist bei der Interpretation von Erfolgsquoten bei verschiedenen Aufgabenformaten sehr große Vorsicht angebracht. Dies zu betonen und plakativ darzustellen, ist der Inhalt des folgenden kurzen Artikels.

Ein Problem bei vielen Multiple Choice-Fragen ist, dass der Einfluss von „Raten“ nicht unerheblich ist. Insbesondere dann, wenn für Falschantworten keine Punkte abgezogen werden, wie bei Multiple Choice-Tests leider oft üblich. Denn das ist natürlich eine Aufforderung zum Raten, man hat ja nichts zu verlieren. Mit einem Punkteabzug bei falschen Antworten kann verhindert bzw. erschwert werden, dass man durch blindes Raten Punkte machen kann. Bei großen Tests (Aufnahme von Studierenden der Medizin, Prüfungen an der Wirtschaftsuniversität, etc.) wird dies unseres Wissens auch praktiziert. Auch beim bekannten jährlichen Wettbewerb *Känguru der Mathematik* (Multiple Choice-Fragen mit je 5 Antworten) werden Falschantworten „bestraft“.

Wenn Multiple Choice-Formate bei größeren Untersuchungen eingesetzt werden (z.B. bei den Pilottests des Projekts „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik“), so ist große Vorsicht geboten bei Interpretationen der Ergebnisse, z.B. von der Art: „Die Erfolgsquote bei Aufgabe X beträgt nur 30%, daher müssen massive Anstrengungen in Richtung des Aufgabenthemas im Unterricht unternommen werden“ oder „Die Erfolgsquote bei Aufgabe Y beträgt 74%, daher

ISSN 0020-7926

scheinen die Schülerinnen und Schüler dieses Gebiet einigermaßen zu beherrschen“.

Wir gehen dieser Frage nach anhand zweier Aufgaben des zweiten Pilottests des Projekts *Standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik*. Im Testheft A2 befinden sich zehn Aufgaben des Typs 1 (das sind leichtere, kürzere Aufgaben), davon sind vier Multiple Choice-Aufgaben (A201, A205, A207, A210). Wir nehmen hier die Aufgaben A201 und A205 etwas genauer ins Visier. Das ganze Testheft, die Korrekturanleitungen und die Ergebnisse sind online abrufbar unter *http://www.uni-klu.ac.at/idm/inhalt/627.htm*.

Oben genannte Interpretationen werden hier niemandem unterstellt, weder dem Österreichischen Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik Klagenfurt, das für die Pilottests verantwortlich ist, noch irgendjemand anderem! Es sollte nur darauf hingewiesen werden, dass diese sehr problematisch wären. Sie wären aber durch unbedarfte Leser(innen) der Ergebnisse durchaus möglich.

A201 Aussagen zur quadratischen Gleichung. Gegeben sind quadratische Gleichungen der Form $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, mit $a \neq 0$; $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung: Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen über die Lösungen von quadratischen Gleichungen der oben angegebenen Form zutreffend bzw. nicht zutreffend sind!

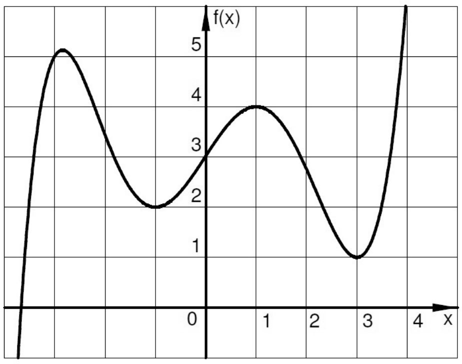
	zutreffend	nicht zutreffend
Jede dieser quadratischen Gleichungen hat genau zwei reelle Lösungen.	○	○
Jede dieser quadratischen Gleichungen hat maximal zwei reelle Lösungen.	○	○
Jede dieser quadratischen Gleichungen hat mindestens eine reelle Lösung.	○	○
Es gibt quadratische Gleichungen dieser Form, die keine reelle Lösung besitzen.	○	○

Inhaltliche Kritik bei dieser Aufgabe: Die einzelnen Aussagen sind keineswegs logisch unabhängig voneinander, die Aussagen 3 und 4 sind überhaupt das genaue logische Gegenteil voneinander. Es wäre bei Multiple Choice-Fragen unseren Erachtens wünschenswert, wenn man bei jeder Frage von der Sache her neu nachdenken müsste.

Damit Aufgabe A201 als richtig gewertet wurde, mussten alle vier Antworten richtig angekreuzt sein. Wir gehen hier nicht auf den Unterschied Pilot- und Vergleichsschulen ein; auch wollen wir hier nicht den Schwierigkeitsgrad, die Angemessenheit, das Thema, etc. der Aufgabe weiter diskutieren, sondern wollen den

Fokus auf den Multiple Choice-Charakter legen. Die Lösungshäufigkeiten beziehen sich jeweils auf die sogenannten ‚Pilotschulen', hier bei dieser Aufgabe betrug sie ca. 30%. D.h. ca. 30% der Testpersonen der Pilotschulen haben alle vier Kreuze bei dieser Aufgabe richtig gesetzt.

A205 Eigenschaften einer Funktion. Gegeben ist der Graph der Funktion f:



Aufgabenstellung: Kreuzen Sie an, welche Eigenschaften für die angegebene Funktion zutreffen bzw. nicht zutreffen!

	zutreffend	nicht zutreffend
f ist im Intervall $[0;1]$ streng monoton steigend	○	○
$x = 1$ ist globale Maximumstelle im Intervall $[-3;2]$	○	○
f ist im Intervall $[1;3]$ streng monoton fallend	○	○
$x = 3$ ist eine lokale Minimumstelle	○	○
f ist im Intervall $[-1;2]$ monoton steigend	○	○

Damit Aufgabe A205 als richtig gewertet wurde, mussten mindestens vier der fünf Antworten richtig angekreuzt sein. Die Erfolgsquote betrug hier 74%.

Bei diesen Stoffgebieten handelt es sich um sehr verbreitet unterrichtete Gebiete, die in fast jedem Unterricht eine zentrale Rolle spielen (im Gegensatz z.B. zu stochastischen Inhalten).

Man könnte hier geneigt sein, daraus abzulesen, dass die Schülerinnen und Schüler der Pilotschulen beim Thema Monotonie (genauer: Eigenschaften von Funktionen) ohnehin viel wissen (74% Erfolgsquote), dass allerdings beim Thema „Quadratische Gleichungen" erheblicher Nachholbedarf bestehe (nur 30% Erfolgsquote), dass also in Österreich im Unterricht viel mehr quadratische Gleichungen gelöst und behandelt werden müssten. Dass hier besondere Vorsicht geboten ist, und dass es hier sehr auf das Aufgabenformat ankommt, sollen folgende Überlegungen zeigen.

Als Quintessenz sei schon hier angemerkt: Uneinheitliche Aufgabenformate bei Multiple Choice-Tests sind nur sehr bedingt dazu geeignet, Schlüsse über den tatsächlichen Wissensstand der Schülerinnen und Schüler über spezielle Gebiete zu ziehen. Wenn es darum geht, tatsächlich über den Wissensstand von Schülern etwas auszusagen, sollten unseren Erachtens keine Multiple Choice-Aufgaben verwendet werden! Wenn Multiple Choice-Aufgaben vorliegen, bei denen richtige Kreuze positiv, falsche aber nicht negativ gewertet werden, muss die Devise natürlich heißen: „Wenn man etwas nicht weiß, dann sollte man zumindest blind drauflos raten, man hat ja nichts zu verlieren, es kann aber u.U. gut gehen."
Im Folgenden gehen wir davon aus, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit bei einer ja/nein-Frage im Falle von Nichtwissen $\frac{1}{2}$ beträgt (in Wirklichkeit ist diese vielleicht durch mögliche – wie auch immer geartete – „Schwindelarten" sogar etwas höher?).

Der Einfluss des Ratens ist bei dieser Art Aufgaben sicher nicht vernachlässigbar, was durch folgende Überlegungen untermauert werden soll:

Zu A201:

• Bei vier Fragen, die man alle richtig haben muss, beträgt die Wahrscheinlichkeit, alle vier Fragen durch bloßes Raten richtig zu beantworten $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 6,25\%$;
• wenn man hier noch hinzunimmt, dass Aussage 4 das logische Gegenteil von Aussage 3 ist, reduziert sich die Zahl der Ratevorgänge auf 3 und die Erfolgswahrscheinlichkeit durch bloßes Raten erhöht sich auf $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 12,5\%$ (vorausgesetzt, dass Schüler durch aufmerksames Lesen erkennen, dass sie bei 4 das Gegenteil von 3 ankreuzen müssen);
• auf dieselbe Erfolgswahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 12,5\%$ (primär) durch Raten kommt man auch, wenn man annimmt, dass jemand bei einer der vier Aussagen durch Wissen das Kreuz richtig setzen kann und die restlichen drei rät.

Zu A205:

• Bei fünf Fragen, von denen man mindestens vier richtig haben muss, beträgt die Erfolgswahrscheinlichkeit bei bloßem Raten immerhin schon $\frac{1+5}{32} = 18,75\%$;
• wenn man hier annimmt, dass man *eine* Frage beantworten kann und bei den restlichen vier rät, so beträgt die Erfolgswahrscheinlichkeit $\frac{1+4}{16} = 31,25\%$;
• bei *zwei* gewussten Antworten erhält man sogar $\frac{1+3}{8} = 50\%$ Erfolgswahrscheinlichkeit.

Gute Schülerinnen und Schüler werden bei solchen Fragen vieles wissen und brauchen nur wenig zu raten, schlechtere hingegen werden öfter raten (die Frage gar nicht zu beantworten wäre ja bei den gegebenen Rahmenbedingungen

– keine negativen Konsequenzen bei falschen Antworten – töricht). Für die weiteren Überlegungen bringen wir nicht hohe Statistik ins Spiel, sondern nur einige elementare Überlegungen. Diese mögen aus fachstatistischer Sicht durchaus angezweifelt werden, bringen aber prinzipielle Tendenzen vermutlich richtig ans Tageslicht. Anders formuliert: Wir stellen simplifizierend ein leicht verständliches Modell auf, um auf uns wichtig erscheinende Punkte hinzuweisen. Die erhaltenen Ergebnisse können nicht als professionelle statistische Analyse bezeichnet werden, sondern sind nur eine erste, bewusst grobe Näherung, primär dazu gedacht, herauszuarbeiten, welch großen Einfluss das Aufgabenformat bei Multiple Choice-Aufgaben haben kann.

Wir nehmen zunächst einmal an, dass bei üblichen Fragen die jeweiligen Aussagen innerhalb einer Aufgabe „gleich schwierig" zu beantworten sind; dies modellieren wir damit, dass wir bei jeder Aussage innerhalb einer Aufgabe eine konstante Wahrscheinlichkeit p für das Wissen der richtigen Antwort unterstellen.[1]

Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit, bei einer Frage richtig anzukreuzen (wissen oder richtig raten) $p + \frac{1-p}{2} = \frac{1+p}{2}$. Um die Dinge hinreichend einfach zu halten, sehen wir hier bewusst von der Tatsache ab, dass es außer den beiden Fällen *Wissen und dabei richtig liegen* und *Ohne Wissen raten* auch noch vermutlich den Fall gibt *Glauben zu wissen (d.h. nicht einfach raten) und dabei falsch liegen, d.h. sich irren*. Zunächst beschäftigen wir uns mit

Aufgabe A201: Angewandt auf A201 ergibt sich für die „Erfolgswahrscheinlichkeit" (Wahrscheinlichkeit, alle 4 Aussagen richtig anzukreuzen) der Ausdruck $(\frac{1+p}{2})^4$. Laut den Ergebnissen wurde diese Aufgabe bei 30% der Schüler richtig gewertet. Das ermöglicht uns eine einfache Punktschätzung des Wertes von p: Lösen der Gleichung $(\frac{1+p}{2})^4 = 0{,}30$ ergibt hier $p_{201} \approx 0{,}48$, d.h. eine erste Schätzung für die unterstellte Wissensquote bei den Aussagen dieser Aufgabe wäre, dass 48% der Antworten „gewusst", der Rest geraten wurde.[2]

[1] Wir sind uns bewusst, dass diese „Modellannahme" in Wirklichkeit vermutlich nicht zu rechtfertigen ist (z.B. sind die Bearbeitungen der einzelnen Aussagen bei einer Aufgabe in Wirklichkeit oft nicht unabhängig voneinander – nicht nur bei Aufgabe A201, wo die einzelnen Aussagen ja sogar logisch miteinander eng verbunden sind –, was unseres Erachtens so nicht sein sollte, sondern auch bei anderen Aufgaben. Wer z.B. bei Aussage 1 von A205 durch Wissen richtig ankreuzt, der/die wird es auch bei Aussage 3 leichter haben; ähnlich kann man sicher auch bei vielen anderen – hoffentlich logisch unabhängigen – Aussagen von Multiple Choice-Aufgaben argumentieren). Durch das unterstellte konstante p wird eigentlich so getan, als ob die Beantwortung der einzelnen Punkte einer Aufgabe ein sogenanntes Bernoulli-Experiment wäre, was eben nicht wirklich der Fall ist. Wenn aber die Aussagen logisch unabhängig voneinander sind, ist unsere Modellannahme zumindest näher der Wirklichkeit als dies bei Aufgabe A201 der Fall ist. Wir verwenden diese bewusste Vereinfachung absichtlich, um auf elementare Weise prinzipielle Schwierigkeiten mit den Multiple Choice-Formaten herauszustreichen.

[2] Auch hier gäbe es sicher „elaboriertere" Methoden, das unterstellte p zu schätzen, die einer intensiveren statistischen Prüfung standhielten, wir haben uns aber bewusst für diese einfache Version entschieden.

Aufgabe A205: Hier ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, mindestens 4 von 5 Aussagen richtig anzukreuzen, $5 \cdot (\frac{1+p}{2})^4 \cdot \frac{1-p}{2} + (\frac{1+p}{2})^5 = \frac{1}{16}(1+p)^4 \cdot (3-2p)$. Laut den Ergebnissen wurde diese Aufgabe bei 74% der Schülerinnen und Schüler richtig gewertet. Lösen der Gleichung $\frac{1}{16}(1+p)^4 \cdot (3-2p) = 0{,}74$ bringt mit einem Computeralgebra-System ungefähr $p_{205} \approx 0{,}60$, d.h. bei Aufgabe A205 hätten wir als Schätzwert, dass 60% der Antworten „gewusst", der Rest geraten wurde.

Angenommen, diese Schätzungen stimmen, dann kann man leicht die Erfolgsquote der Aufgabe bei vertauschten Aufgabeformaten ausrechnen, d.h. wenn bei A201 (quadratische Gleichungen) das Format „4 von 5" und bei den Eigenschaften von Funktionen das Format „4 von 4" verwendet würde. Wenn man bei A201 das Format „4 von 5" verwendete, erhielte man in unserem Modell nicht nur 30% Erfolgsquote, sondern sogar 61%:

$$\frac{1}{16}(1+p_{201})^4 \cdot (3-2p_{201}) \approx 0{,}61.$$

Umgekehrt, wenn man bei A205 das Format „4 von 4" verwendete, erhielte man statt 74% nur mehr 41% Erfolgsquote:

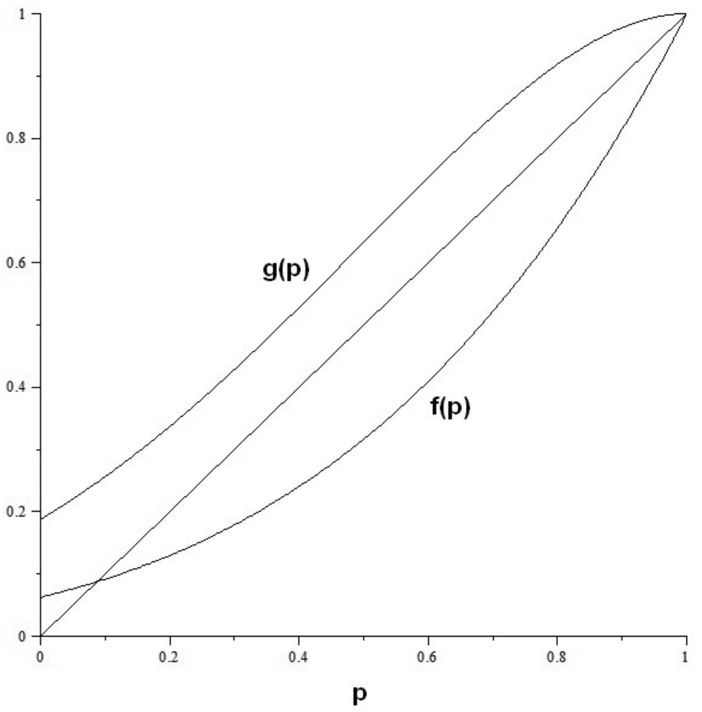
$$\left(\frac{1+p_{205}}{2}\right)^4 \approx 0{,}41.$$

Damit wäre die Einschätzung, welches Gebiet denn mehr Schwierigkeiten bereitet hat, genau anders herum: die Probleme schienen dann nicht primär bei den quadratischen Gleichungen zu liegen, sondern bei den Eigenschaften von Funktionen; die Einschätzung hätte sich quasi umgekehrt, und das als alleinige Folge der Wahl des Aufgabenformats! Diese sollte aber klarerweise keinen gewichtigen Einfluss haben, die Erfolgswahrscheinlichkeit bei einer Aufgabe sollte ja (fast) nur durch das Wissen der Schülerinnen und Schüler bestimmt sein!

Selbst wenn ein Teil dieser „Umkehr" (Einfluss des Aufgabenformats) durch unsere einfache Modellannahme zustande kommt, eine prinzipielle Schwierigkeit dürfte damit aufgezeigt sein. Auch wenn man hier mit höheren, elaborierteren Methoden analysierte, glauben wir, dass man den großen Einfluss des Aufgabenformats nachweisen könnte. Und ob durch die Wahl des Aufgabenformats aus (30%, 74%), dann (61%, 41%) oder z.B. (55%, 45%) oder gar nur (45%, 55%) werden – d.h. keine Umkehr, sondern nur mehr eine deutliche Reduktion des Unterschieds –, das ist hier nicht so entscheidend, ein großer Einfluss wird bleiben.

Natürlich sind „4 von 4-Aufgaben" schwieriger als „4 von 5-Aufgaben", dies ist einerseits wohl intuitiv klar, andererseits kann es auch schön graphisch veranschaulicht werden, indem die Graphen der beiden Funktionen für die Erfolgswahrscheinlichkeiten in unserem Modell verglichen werden:

$$\begin{aligned} &\text{„4 von 4“:} \quad f(p) := \left(\frac{1+p}{2}\right)^4 && (\text{für } 0 \le p \le 1), \\ &\text{„4 von 5“:} \quad g(p) := \tfrac{1}{16}(1+p)^4 \cdot (3-2p) && (\text{für } 0 \le p \le 1). \end{aligned}$$



In der Abbildung sieht man, dass der Graph von f immer unter jenem von g bleibt. Außerdem ist zu erkennen, dass durch „4 von 5-Aufgaben“ in diesem Modell Versuchspersonen gegenüber ihrem eigentlichen Wissen (p) systematisch bevorzugt werden (der Graph von $g(p)$ liegt immer über der 1. Mediane), durch „4 von 4-Aufgaben“ jedoch systematisch benachteiligt werden (zumindest für $p >$ ca. $0,1$).

Wenn die Ergebnisse von Multiple Choice-Aufgaben irgendwie miteinander verglichen werden sollten, ist es jedenfalls problematisch, wenn diese Aufgaben verschiedenes Format haben, weil der Einfluss des Formats ein erheblicher zu sein scheint.

Wenn man Aussagen darüber haben will, wie gut eine Schülerpopulation ein gewisses Stoffgebiet beherrscht, kann dies unseres Erachtens nur schlecht ausschließlich über Multiple Choice-Aufgaben geschehen (auch wenn das Format innerhalb des Tests nicht geändert wird). Einerseits, weil der Zufall eine nicht zu unterschätzende Rolle spielt („Raten“), andererseits weil man echtes Verständnis (ohne genaue Definition dafür) sicher besser durch *offene Aufgabenformate* (Erklärungen, Begründungen, Beschreibungen, etc.) überprüfen kann. Diese sind naturgemäß aufwendiger zu bewerten und zu korrigieren, weswegen sie bei den Verantwortlichen von großen Tests nicht sehr beliebt sind. Ein Großteil der Fachdidaktiker ist allerdings gegenüber Multiple Choice-Aufgaben aus den genannten Gründen (Aussagekraft?) eher skeptisch eingestellt.

Wenn in Zukunft (ab 2014, verantwortlich dafür wird das Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation und Entwicklung des österreichischen Schulwesens, BIFIE, sein) die schriftliche Reifeprüfung in Mathematik zentral gestellt werden soll, sind Multiple Choice-Aufgaben sicher nicht vermeidbar, und dies ist auch nicht nur negativ zu sehen, es gibt da auch gute Möglichkeiten. Aber diese sollten nicht den Löwenanteil einer solchen zentralen schriftlichen Prüfung ausmachen. Der Druck vonseiten Psychologie, Bildungswissenschaft, Testtheorie, etc. wird da in Zukunft sicher sehr stark sein, Multiple Choice-Aufgaben zu favorisieren; aus fachlicher bzw. fachdidaktischer Sicht sollen diese aber nicht das Hauptgewicht bekommen.

Adresse der Autoren:

Hans Humenberger,
Fakultät für Mathematik, Universität Wien,
Nordbergstraße 15 (UZA 4), 1090 Wien.
email hans.humenberger@univie.ac.at

Gerhard Kirchner,
Universität Innsbruck, Institut für Mathematik,
Technikerstraße 13/7, 6020 Innsbruck.
email gerhard.kirchner@uibk.ac.at

Buchbesprechungen

V. Araújo, M. J. Pacifico: Three-Dimensional Flows. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. 53.) Springer, Berlin, Heidelberg, 2010, xix+358 S. ISBN 978-3-642-11413-7 H/b € 153,95.

The present research monograph considers continuous dynamical systems on three-dimensional compact manifolds. While in two dimensions the picture is quite clear, the knowledge in three (and more) dimensions drops drastically since chaos enters the scene. After briefly collecting some background material the authors start by discussing three central examples of 3-flows with singular cycles, namely, the singular horseshoe, a homoclinic connection associated to hyperbolic singularities of saddle type, and the geometric Lorenz attractor. Moreover, several illustrations (partly in color) are present to enhance understanding of the text. In the main body the authors survey the recent results on robustness for 3-flows including both hyperbolic systems and Lorenz-type systems. They collect many results previously only available in the original research literature and streamline their proofs along the way (including some extensions as well).

As a consequence, it can be recommended as a valuable source for any reader with an advanced background in hyperbolic dynamics.

G. Teschl (Wien)

T. Banchoff, S. Lovett: Differential Geometry of Curves and Surfaces. A. K. Peters, Natick, Massachusetts, 2010, xvi+331 S. ISBN 978-1-56881-456-8 H/b $ 49,–.

The content of this textbook is an undergraduate introduction to differential geometry of curves and surfaces to be used for a single semester course. Coming from intuitive considerations to precise definitions the authors have written a very readable book. Every section contains many examples, problems and figures visualizing geometric properties. The understanding of geometric phenomena is supported by a number of available Java applets (*http://www.akpeters.com/DiffGeo*). This special feature distinguishes the textbook from others and makes it recommendable for self studies, too. Prerequisites are first year courses on calculus and linear algebra only. The book is to be seen as one of a pair, the second of which is written by the second author entitled *Differential Geometry of Manifolds and Applications to Physics* (A.K. Peters, 2010). The content of this highly recommendable book is: 1. *Plane Curves: Local Properties*, 2. *Plane Curves: Global Properties*, 3. *Curves in Space: Local Properties*, 4. *Curves in Space: Global Properties*, 5. *Regular Surfaces*, 6. *The First and Second Fundamental Forms*, 7. *The Fundamental Equations of Surfaces* , 8. *Curves on Surfaces*.

F. Manhart (Wien)

J. Barnes: Gems of Geometry. Springer, Berlin, Heidelberg, 2009, xiii+311 S. ISBN 978-3-642-05091-6 H/b € 39,95.

Der vorliegende Band ist aus einer Vorlesungsserie für Erwachsene hervorgegangen, die der Autor (ein ausgebildeter Mathematiker, der den Großteil seiner Karriere in der Welt des Programmierens verbracht hat) an der Reading University in den letzten zehn Jahren gehalten hat. Der Hauptteil des Buchs besteht aus zehn Kapiteln zu populären geometrischen Themen, wie der Goldene Schnitt, Vierdimensionale Geometrie, oder Fraktale, die auch sonst in der populären mathematischen Literatur sehr beliebt sind. Die Texte der einzelnen Abschnitte sind sehr übersichtlich und für interessierte Laien problemlos verständlich. Außerdem geizt der Autor nicht mit Illustrationen, und die vielen Graphiken sind sehr ansprechend und anschaulich. Das Buch ist mathematisch interessierten Laien allen Alters sehr zu empfehlen und sicher auch eine wunderbare Quelle für Schulprojekte.

R. Geretschläger (Graz)

B. Bekka, P. de la Harpe, A. Valette: Kazhdan's Property (T). (New Mathematical Monographs 11.) Cambridge University Press, 2008, xiii+472 S. ISBN 978-0-521-88720-5 H/b £ 50,–.

The book under review offers a comprehensive introduction to the theory of Property (T), which has turned out to be an important notion in a variety of subjects, e.g. it has found applications in ergodic theory, random walks, operator theory, combinatorics and theoretical computer science.

The book is divided into two parts: Part I and Part II. Part I consists of six chapters, where Chapter 1 provides the original definition of Property (T) due to D. Kazhdan and some basic examples. In Chapter 2 the equivalence of Property (T) to a fixed point property for affine isometric actions on Hilbert spaces, the so called Property (FH), is demonstrated. Chapter 3 is devoted to Shalom's characterization of Property (T) for compactly generated, locally compact groups, which amounts to the vanishing of the reduced 1-cohomology of all their unitary representations. An important application of Property (T) to groups of bounded generation is given in Chapter 4. There also exists a spectral characterization of Property (T) due to Zuk, that relates the smallest non-zero eigenvalue of the Laplace operator corresponding to a simple random walk on a Cayley graph of a group, which is explained in Chapter 5. The final chapter of Part I deals with applications to expander graphs, orbit equivalence and ergodic theory. Furthermore, the authors discuss the Schmidt-Connes-Weiss dynamical characterization of Property (T).

The theory of Property (T) relies on the theory of unitary group representations. In Part II of the book the authors treat those aspects of unitary group representations that are of relevance in their treatment of Property (T) in Part I. After the formulation of the basic definitions Part II consists of the following sections: measures in homogeneous spaces, functions of positive type and GNS construction, unitary representations of locally compact abelian groups, induced representations, weak containment and Fell topology, amenability. The treatment of unitary group representations and the organization of the material makes this well-written book a pleasure to read and accessible to a general audience from various areas of mathematics.

F. Luef (Wien)

J. Cerdà: Linear Functional Analysis. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 116.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010, xiii+330 S. ISBN 978-0-8218-5115-9 H/b $ 62,–.

The present book gives a solid introduction to linear functional analysis assuming some familiarity with linear algebra, measure theory, and general topology. In particular, the necessary topics from topology and measure and integration theory are briefly reviewed in the first chapter. The subsequent five chapters cover the usual topics for an introductory course; the only notable items here are the special emphasis on convolutions as well as the Riesz-Thorin interpolation theorem and the early introduction of Fréchet spaces. Then there are two chapters on distributions, the Fourier transform, and Sobolev spaces including applications to ordinary and partial differential equations. Finally, there are two chapters on the Gelfand theory for Banach algebras and the spectral theorem (for unbounded operators) plus applications in quantum mechanics.

The book is well written and contains numerous worked-out examples as well as many exercises plus some hints for further reading at the end of each chapter. In summary, it is a nice contribution to the existing literature on this topic.

G. Teschl (Wien)

O. Goldreich: A Primer on Pseudorandom Generators. (University Lecture Series, Vol. 55.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010, x+114 S. ISBN 978-0-8218-5192-0 P/b $ 36,–.

The book focuses on the computational complexity approach of randomness (pseudorandomness) where an object (for example a bit sequence) is pseudorandom if it is computationally infeasible to distinguish it from a uniformly distributed random object.

Chapter 1 gives a historical overview of the ‘question of randomness’. In Chapter 2 the theoretical framework of general-purpose pseudorandom generators is treated. Chapter 3 discusses the derandomization of probabilistic polynomial-time algorithms. Chapter 4 explores pseudorandom generators withstanding space-bounded distinguishers. Chapter 5 considers special purpose generators.

Additionally, the book contains appendices on hash functions, extractors, randomized algorithms, cryptographic primitives, and complexity classes.

This primer is an abbreviated and revised version of Chapter 8 in the authors book *Computational Complexity: A Conceptual Perspective* (Cambridge University Press, 2008).

A. Winterhof (Linz)

V. Kanovei: Borel Equivalence Relations. Structure and Classification. (University Lecture Series, Vol. 44.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2008, x+240 S. ISBN 978-0-8218-4453-3 P/b \$ 45,–.

Given two analytic equivalence relations E and F on Polish spaces, respectively, X and Y, we say that E is *Borel reducible* to F ($E \leq_B F$ in symbols) if there is a Borel function $f\colon X \to Y$ which reduces E to F, i.e. such that $x E y \iff f(x) F f(y)$ for every $x, y \in X$. The Borel reduction between E and F shows that E is not more complicated than F, i.e. that the elements of X can be classified up to E-equivalence (in a reasonably concrete way) using the F-equivalence classes as invariants.

In the last twenty years, the analysis of the structure of analytic equivalence relations with respect to the relation $\leq_B$ has been a very active and fast-growing subfield of Descriptive Set Theory, which led to a huge amount of deep and interesting results with many applications in various areas of mathematics. The aim of this book is to give a unified and self-contained presentation of the main results concerning the structure of Borel equivalence relations up to Borel reducibility, which all together allow to give a rough description of such structure (see Figure 1 on p. 68). Of course the book does not pretend to give a comprehensive presentation of all the results in this vast topic, but all theorems which can be considered as milestones in the subject, as well as many recent developments, are carefully analyzed: in particular, several key Borel equivalence relations are introduced, and the related dichotomy theorems are discussed in detail.

After a quick presentation of the basic results of Descriptive Set Theory needed in the sequel (Chapters 1 and 2) and of Borel ideals (Chapter 3), the author introduces the notions of Borel equivalence relation (Chapter 4) and Borel reducibility (Chapter 5), providing several interesting and natural examples. Some elementary results are then discussed in Chapter 6, while Chapters 7, 8 and 9 are devoted to the study of various specific aspects (like hyperfiniteness, amenability, treeability, etc.) of countable Borel equivalence relations. Chapters 10 and 11 present the first three dichotomy theorems (Silver's classical perfect set theorem, the Glimm-Effros dichotomy for Borel equivalence relations proved by Harrington-Kechris-Louveau, and the dichotomy involving E_1, due to Kechris-Louveau). Chapter 12 deals with actions of the infinite symmetric group S_∞ and, in particular, with the equivalence relation of isomorphism between countable structures, while Chapter 13 introduce the notion of turbulence and prove Hjorth's result on classifiability by countable structures. Chapters 14 and 15 present two other dichotomies related to the equivalence relations E_3 and E_2, respectively. Chapter 16 discusses results about the family of $\mathbf{c}_0$-equalities, while Chapter 17 deals with pinned equivalence relations. Finally, Chapter 18 presents a recent result of Rosendal on the cofinality of (equivalence relations associated to) Borel ideals in the $\leq_B$-structure of Borel equivalence relations. A brief appendix explains the basic terminology and discusses important details regarding the Gandy-Harrington forcing, one of the main tool used in the book to prove many dichotomy theorems.

L. Motto Ros (Freiburg i.Br.)

A. Kasman: Glimpses of Soliton Theory. The Algebra and Geometry of Nonlinear PDEs. (Student Mathematical Library, Vol. 54.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010, xvi+304 S. ISBN 978-0-8218-5245-3 P/b $ 46,–.

Soliton theory is a major field in both mathematics and physics, and one cannot say that there is a lack of textbooks on the subject. However, the novel feature of the present text is the fact that it is aimed at undergraduate students, requiring only a little multivariable calculus and basic linear algebra as prerequisites. Given these restrictions, the text focuses on algebraic (as well as geometric) aspects of the theory and how to obtain explicit solutions. Involved computations are delegated to the computer algebra system *Mathematica*, which is also used for visualization.

The book starts out with an informal discussion of differential equations, including a bit on dispersion and wave breaking. It then continues with the history of solitons plus some basic facts about the N-soliton solution of the Korteweg-de Vries equation and periodic traveling wave solutions in terms of the Weierstrass elliptic function $\wp$. Since no complex analysis is assumed, $\wp$ is treated as a black box and its properties are verified using the computer. The connections with algebraic geometry are touched upon.

Further topics are factorization of ordinary differential operators, Lax formalism, the Kadomtsev-Petviashvili equation and Hirota's bilinear version, the Grassmannian cone, pseudodifferential operators and a glimpse at Sato's theory.

Finally, there are three appendices introducing *Mathematica*, discussing complex numbers, and providing ideas for further study.

The book is well written and contains numerous worked-out examples as well as many exercises and a guide to the literature for further reading. In particular, I feel that it serves its intended purpose quite well.

G. Teschl (Wien)

G. F. Lawler: Random Walk and the Heat Equation. (Student Mathematical Library, Vol. 55.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010, ix+156 S. ISBN 978-0-8218-4829-6 P/b $ 29,00.

Ausgehend von der einfachen Irrfahrt in $\mathbb{Z}^d$ führt der Autor in verwandte Themen wie die Wärmeleitungsgleichung, harmonische Funktionen, das Dirichletproblem, die Brownsche Bewegung, Martingale und fraktale Dimension ein.

Das Buch ist aus einer probabilistischen Perspektive geschrieben, es werden dabei aber nur Grundkenntnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie vorausgesetzt. Intuition wird groß geschrieben, und so werden oft erst heuristische Argumente gebracht ehe es an die formalen Beweise geht. Auf diese Art ist das Buch vergnüglich und angenehm zu lesen. Es kann zum Selbststudium für interessierte Studierende ebenso wie als Unterlage für eine Spezialvorlesung empfohlen werden.

Die vier Kapitel (Random Walk and Discrete Heat Equation, Brownian Motion and the Heat Equation, Martingales, Fractal Dimension) werden jeweils mit einer umfangreichen Kollektion an Übungsbeispielen abgeschlossen. Am Ende des Buches findet sich eine Liste mit Literaturempfehlungen für Leser, die bei der Lektüre auf den Geschmack gekommen sind.

S. Wagner (Stellenbosch)

G. F. Lawler, V. Limic: Random Walk: A Modern Introduction. (Cambridge studies in advanced mathematics 123.) Cambridge University Press, 2010, xii+364 S. ISBN 978-0-521-51918-2 H/b £ 45,–.

Im hier ebenfalls besprochenen Buch *Random Walk and the Heat Equation* des ersten Autors wird *Random Walk: A Modern Introduction* zum weiterführenden Studium empfohlen. In der Tat bietet dieses Buch eine noch umfangreichere und fundiertere Einführung in die Theorie der Irrfahrten und verwandter Gebiete. Es richtet sich an Mathematiker, die in der Wahrscheinlichkeitstheorie oder einem verwandten Gebiet tätig sind, sowie an fortgeschrittene Studierende, die bereits über gewisse Basiskenntnisse verfügen. Für Experten des Fachs ist das Buch von Lawler und Limic sicherlich ein wertvolles Referenzwerk.

Zunächst wird die gewöhnliche Irrfahrt in diskreter und stetiger Zeit eingeführt. Es folgt ein Ausflug in die reine Wahrscheinlichkeitstheorie mit einem Beweis einer lokalen Version des Zentralen Grenzwertsatzes. Daran schließt sich die Konstruktion der Brownschen Bewegung an, gefolgt von Green-Funktionen und Potentialtheorie. Gegen Ende des Buchs werden zahlreiche Querverbindungen zu verwandten Themen ausgeführt, wie etwa das Erzeugen zufälliger Spannbäume mithilfe von Wilsons Algorithmus oder der ‘loop-erased random walk’.

Obwohl das Buch auf einem fortgeschrittenen Niveau gehalten ist, ist es durchwegs gut verständlich, wozu auch eine Reihe an erläuternden Kommentaren und ein Verzeichnis nützlicher Resultate aus Analysis und Wahrscheinlichkeitstheorie im Appendix beitragen.

S. Wagner (Stellenbosch)

J. M. Lee: Manifolds and Differential Geometry. (Graduate Studies in Mathematics 107.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2009, xiv+671 S. ISBN 978-0-8218-4815-9 H/b \$ 89,–.

Das Buch stellt eine Einführung in das Gebiet der Differentialgeometrie dar. In den ersten vier Kapiteln werden die wichtigsten Begriffe, wie Manigfaltigkeiten, Tangentenbündel, Einbettungen, Krümmung, usw. eingeführt. Danach werden ausführlich Liegruppen, Faserbündel, Tensoren und Differentialformen behandelt. Auf diesen grundlegenden Begriffen der Differentialgeometrie wird der Satz von Stokes für Ketten und Hodgezerlegung behandelt. In diesem Kapitel werden auch die Maxwell-Gleichungen in der Minkowski-Raumzeit behandelt, was man als eine der ersten Anwendungen der Eichtheorie ansehen kann. Danach folgt jeweils ein Kapitel über De Rham-Kohomologie, Verteilungen und Zusammenhänge. Im letzten Kapitel werden (Semi-)Riemannsche Metriken untersucht, was in einem Exkurs in die allgemeine Relativitätstheorie endet. Im Anhang wird noch ein kurzer Einblick in Kategorientheorie, Topologie, den Satz über impliziten Funktionen und multilineare Algebra gegeben.

Der Autor legt sehr viel Wert darauf, die Begriffe ausführlich zu erklären. Obwohl sehr viele Begriffe und Konzepte sehr allgemein gehalten werden, hat man als Leser nie das Gefühl, den Überblick und die Bedeutung dieser zu verlieren. Dies erreicht der Autor unter anderem dadurch, dass er oft mehrere Zugänge zu einem Thema bereitstellt. Dadurch bekommt der Leser auch einen tieferen Einblick in dieses Gebiet. Neben den vielen Übungsaufgaben am Ende eines jeden Kapitels hat der Autor etliche Übungsbeispiele in den Text eingebaut, um den Leser immer wieder zu eigenen Überlegungen anzuregen. Ein besonders Highlight dieses Buchs ist das Online-Supplement (*http://webpages.acs.ttu.edu/jlee/Supp.pdf*). Dieses enthält neben Beweisen, die im Buch ausgelassen wurden, viele zusätzliche Ergänzungen.

V. Ziegler (Graz)

S. Lovett: Differential Geometry of Manifolds. A. K. Peters, Natick, Massachusetts, 2010, xiii+421 S. ISBN 978-1-56881-457-5 H/b \$ 79,–.

This book is the second in a series of two. The first volume, *Differential Geometry of Curves and Surfaces* by Th. Banchoff and St. Lovett, treats the classical theory while the book under review is dedicated to the modern and abstract approach. Driven by the desire to generalize multivariate analysis to manifolds, the author guides the reader through the concepts of differential manifolds, their tangent spaces, vector fields, and differential forms and their integration. The mathematical part ends with an introduction to Riemannian Geometry. The last chapter distinguishes this book from others in the field. It features applications of the mathematical theory to physics, namely to Hamiltonian Mechanics, electromagnetism, string theory and general relativity. Since the mathematical foundations have already been laid, fundamental and deep results can be explained in short time.

This book has high didactic ambitions. The basics of multivariate analysis and curvilinear coordinates are covered before the first occurrence of differential manifolds in Chapter 3. Throughout the book, the introduction of a new notion is clearly motivated, relations to the classical theory are established, and notational conventions are explained. The style is colloquial but the definitions are accurate. This concepts works very well, maybe with the exception of the rather sloppy initial introduction of tensors via their transformation properties before their later proper but indirect and abstract definition via tensor fields. The author only assumes prior knowledge of calculus in $\mathbb{R}^3$ and linear algebra. Results from point set topology, calculus of variations and multilinear algebra are covered in three appendices. Thus, the book is self-contained to a high degree and suitable as textbook for a lecture or for self-study. In this context, one welcomes the extensive exercise sections but wishes for a more careful proofreading that could have eliminated some minor errors which are easily spotted by an experienced reader but might confuse a beginner.

H.-P. Schröcker (Innsbruck)

Yu. I. Manin: A Course in Mathematical Logic for Mathematicians. Second Edition. Chapters I–VIII translated from the Russian by N. Koblitz. With new chapters by B. Zilber and Yu. I. Manin. Springer, Berlin, Heidelberg, 2010, xvii+384 S. ISBN 978-1-4419-0614-4 H/b € 65,95.

Manin's book on mathematical logic is addressed to a working-mathematician with some knowledge of naive set theory, and is an enlarged and revised version of the first edition from 1977. Manin has decided to incorporate some of the exciting developments in mathematical logic of the last four decades into this edition. The most notable addition is an extensive treatment of model theory and some of its applications. The exquisite taste and the elegant style of the author have produced an outstanding treatment of mathematical logic that allows one to understand some of the pillars of this area of mathematical research, e.g. Gödel's completeness and incompleteness theorems, continuum hypothesis, forcing and constructible sets, Diophantine sets and Gödel's completeness and incompleteness theorems, continuum hypothesis, forcing and constructible sets, Diophantine sets and Manin's original treatment of the subject provides an extraordinary introduction to mathematical logic.

F. Luef (Wien)

H. L. Smith, H. R. Thieme: Dynamical Systems and Population Persistence. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 118.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2011, xvii+405 S. ISBN 978-0-8218-4945-3 H/b $ 75,–.

This monograph began as a set of lecture notes for graduate students in a course on dynamical systems in biology. It presents the state of the art as well as a very good summary of the field of population persistence. This concept gives answer to the question of survival of interacting species over the long term. Persistence theory developed rapidly in the 1980s. Early work focused on persistence of components of systems of ordinary differential equations. Later this was extended to discrete time or difference equations, and then to infinite dimensional dynamical systems generated by delay differential equations and partial differential equations. This book is recommended to all who are interested to read, learn or to teach this topic of persistence.

G. Schranz-Kirlinger (Wien)

L. Tunçel: Polyhedral and Semidefinite Programming Methods in Combinatorial Optimization. (Fields Institute Monographs.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010, x+219 S. ISBN 978-0-8218-3352-0 H/b $ 77,–.

Lineare Optimierung mit positiv semidefiniten Matrizen, oder kurz „semidefinite Optimierung“, hat sich in den letzten 15 Jahren als ein sehr mächtiges Hilfsmittel bei der Behandlung von NP-schweren kombinatorischen Optimierungsproblemen herausgestellt. Tunçel legt eine Monographie vor, die in 12 Kapiteln folgende Themenbereiche abhandelt: Nach einer Einleitung in die Thematik folgt ein umfangreiches Kapitel über Dualitätstheorie, basierend auf Trennungssätzen für konvexe Mengen. Aus algorithmischer Sicht wird sowohl auf die Ellipsoidmethode, als auch auf die praktisch effizienteren primal-dualen Innere-Punkte-Techniken eingegangen.

Der zweite Teil des Werks umfasst Anwendungen semidefiniter Optimierung. Dabei wird die Approximationsmethode von Goemans und Williamson ausführlich erörtert. Weiters folgen Betrachtungen zur geometrischen Einbettbarkeit von Graphen. Auch hier gibt es enge Zusammenhänge zu Eigenwerttheorie und semidefiniten Programmen. Ausführlicher Raum wird auch Lift-and-Project-Ansätzen gewidmet, die auf Hierarchien von Relaxationen mit immer besserer Genauigkeit führen. Das Buch schließt mit einigen „Nicht-Standard“-Anwendungen im Bereich Diskrepanztheorie.

Dem Autor gelingt es auf eindrucksvolle Weise, einen Überlick über den steigenden Einfluss von semidefiniter Optimierung zu geben, der sich vor allem in der Schnittmenge der Bereiche Graphentheorie, konvexe Analysis sowie Komplexitätstheorie manifestiert. Das Buch ist gut lesbar, enthält eine Fülle bibliographischer Notizen und kann als ergänzende Quelle zu einer höhersemestrigen Vorlesung über kombinatorische Optimierung verwendet werden.

F. Rendl (Klagenfurt)

Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

Einladung zur Generalversammlung der ÖMG

Zeit: Montag, 26. September 2011, 18:30 Uhr
Ort: Donau-Universität Krems, Audi Max
Tagesordnung:

1. Feststellung der Beschlussfähigkeit
2. Berichte des Vorsitzenden und weiterer Vorstandsmitglieder, insbesondere des Kassiers
3. Berichte aus den Landessektionen
4. Bericht der Rechnungsprüfer und gegebenenfalls Entlastung des Vorstands
5. Neuwahl des Vorstands
6. Verleihung des Förderungspreises und der Studienpreise
7. Allfälliges.

(Michael Drmota)

MATHMOD 2012 Conference

7th Vienna International Conference on Mathematical Modelling: February 15–17, 2012, Vienna University of Technology.

The scope of the conference covers theoretic and applied aspects of the various types of mathematical modelling (equations of various types, automata, Petri nets, bond graphs, qualitative and fuzzy models, etc.) for systems of dynamic nature (deterministic, stochastic, continuous, discrete or hybrid with respect to time, etc.). Comparison of modelling approaches, model simplification, modelling uncertainties, port-based modelling, and the impact of items such as these on problem solution, numerical techniques, validation, automation of modelling and software support for modelling, co-simulation, etc. will be discussed in special sessions as well as applications of modelling in control, design or analysis of systems in engineering and other fields of application. The topics to be discussed include the following:

Modelling theory / processes and methods for model formulation, identification, development, reduction and validation / automation of modelling and software aids for modelling / computer modelling and modelling for/by simulation / qualitative modelling including fuzzy and iterative approaches to modelling / modular modelling and interdisciplinary modelling / learning networks, uncertainties in modelling / methodologies for model validation / fitting mathematical models to real processes / relationship between the modelling approach and problem solutions / comparison of methods for modelling, model reduction and model validation / effects of modelling errors on overall performance of an engineering system / applications in the field of engineering systems and in natural sciences / applications in other fields (such as environmental systems, biotechnology, etc.) / case studies of comparisons for ideas or methods / education in modelling / modelling aspects in scientific computing / fractional calculus.

For organisation, details, submission, etc. see *http://www.mathmod.at/*. Contact: *inge.troch@tuwien.ac.at*.

(Inge Troch)

Schülerpreis für herausragende Fachbereichsarbeiten in Mathematik oder Darstellender Geometrie 2011

Bereits zum dritten Mal fand dieses Jahr der neu belebte Schülerpreis der ÖMG für herausragende Fachbereichsarbeiten statt. Dankenswerterweise wurde die Ausschreibung auch dieses Jahr vom Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur mit einem Bekanntgabeerlass unterstützt.

Die vom Vorstand der ÖMG eingesetzte Jury hat aus 15 Einreichungen vier Preisträger ausgewählt:

- *Adrian Fuchs*, Bundesrealgymnasium Schloss Wagrain: Symmetrische Polynome und deren Eigenschaften unter besonderer Betrachtung der Koeffizienten (Betreuer: Dr. Rupert Sodl)
- *Martin Nägele*, Gymnasium Schillerstraße, Feldkirch: Erzeugende Funktionen (Betreuer: Mag. Johannes Strassmair)
- *Patrick Reiner*, BRG und BORG Dornbirn Schoren: Shapley-Wert: ein Lösungskonzept von Koalitionsspielen: (Betreuer: Mag. Raimund Hermann)
- *Michael Sedlmayer*, BG und BRG Purkersdorf: Ausgewählte Probleme der Graphentheorie (Betreuerin: Dr. Evelyn Stepancik).

Die Preisträger wurden eingeladen, ihre Arbeiten im Anschluss an die Eröffnung der von der ÖMG veranstalteten Fortbildungstagung für Lehrerinnen und Lehrer am 29. April 2011 an der Universität Wien in einem kurzen Referat vorzustellen. Herr Sedlmayer konnte leider nicht zur Präsentation kommen, da am selben Tag

Die Schülerpreisträger 2011 der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (v.l.n.r.): Adrian Fuchs, Martin Nägele, Patrick Reiner. Ganz rechts: Christian Krattenthaler.

seine schriftliche Matura stattfand. Er ist jedenfalls sehr erfreulich, dass die Qualität der Vorträge sowie die eingereichten Arbeiten wiederum sehr hoch war. Der Schülerpreis wird nächstes Jahr wieder ausgeschrieben werden.

(Michael Drmota, Vorsitzender der Schülerpreisjury)

Neue Mitglieder

Kerstin Amman, Mag. – Universität Wien, Fakultät für Mathematik. Nordbergstraße 15, 1090 Wien. geb. 1977. Forschungsassistentin an der Universität Wien. email *kerstin.amman@univie.ac.at*, *http://www.math.univie.ac.at/∼kerstin*.

Adrian Fuchs – Parkstr. 15/69, 4840 Vöcklabruck. geb. 1992. Schülerpreisträger der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft. email *adrian.fuchs@asak.at*.

Patrick Reiner – Vibrütterweg 34, 6840 Götzis. geb. 1992. Schülerpreisträger der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft. email *patrickreiner1@gmx.net*.

Eberhard Mayerhofer, Dipl.-Ing. Dr. – Vienna Inst. of Finance, Heiligenstädterstr. 46–48, 1190 Wien. geb. 1977. Studium der Technischen Mathematik bis 2003 an der TU Graz, Promotion 2006 an der TU Wien. 2007–2011 Senior Researcher am Vienna Institute of Finance. *http://www.vif.ac.at/mayerhofer*, email *eberhard.mayerhofer@vif.ac.at*.