Das Kreuz mit dem Kreuzprodukt

Franz Pauer

Universität Innsbruck

10. April 2026

Inhalt

Inhalt

- Das Kreuzprodukt im physikalischen Raum
- Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

Inhalt

- Das Kreuzprodukt im physikalischen Raum
- Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$
- Volumen, Orientierung und Determinante

Inhalt

- Das Kreuzprodukt im physikalischen Raum
- Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$
- Volumen, Orientierung und Determinante
- Das Kreuzprodukt als Multiplikation auf $\mathbb{R}^3$

Inhalt

- Das Kreuzprodukt im physikalischen Raum
- Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$
- Volumen, Orientierung und Determinante
- Das Kreuzprodukt als Multiplikation auf $\mathbb{R}^3$
- Drehungen im Raum, orthogonale und schiefsymmetrische Matrizen

Inhalt

- Das Kreuzprodukt im physikalischen Raum
- Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$
- Volumen, Orientierung und Determinante
- Das Kreuzprodukt als Multiplikation auf $\mathbb{R}^3$
- Drehungen im Raum, orthogonale und schiefsymmetrische Matrizen
- Kreuzprodukt und Drehmoment

Das Kreuzprodukt im physikalischen Raum

Wähle Nullpunkt 0 im Raum ($\longleftrightarrow$ Vektorraum).

Voraussetzungen:

- Abstände zwischen Punkten (Länge von Strecken)

Das Kreuzprodukt im physikalischen Raum

Wähle Nullpunkt 0 im Raum ($\longleftrightarrow$ Vektorraum).

Voraussetzungen:

- Abstände zwischen Punkten (Länge von Strecken)
- rechte Winkel zwischen einander schneidenden Geraden und zwischen Geraden und Ebenen

Das Kreuzprodukt im physikalischen Raum

Wähle Nullpunkt 0 im Raum ($\longleftrightarrow$ Vektorraum).

Voraussetzungen:

- Abstände zwischen Punkten (Länge von Strecken)
- rechte Winkel zwischen einander schneidenden Geraden und zwischen Geraden und Ebenen
- Flächeninhalt von Parallelogrammen

Das Kreuzprodukt im physikalischen Raum

Wähle Nullpunkt 0 im Raum ($\longleftrightarrow$ Vektorraum).

Voraussetzungen:

- Abstände zwischen Punkten (Länge von Strecken)
- rechte Winkel zwischen einander schneidenden Geraden und zwischen Geraden und Ebenen
- Flächeninhalt von Parallelogrammen
- rechte Hand

Das Kreuzprodukt im physikalischen Raum

A, B Punkte im physikalischen Raum

Das *Kreuzprodukt* (oder *Vektorprodukt*) $A \times B$ von A und B ist der durch die folgenden Eigenschaften eindeutig bestimmte Punkt im (physikalischen) Raum:

- Der Abstand zwischen $A \times B$ und 0 ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Eckpunkten $0, A, B, A + B$. Insbesondere: $A \times B = 0 \iff 0, A, B$ kollinear.

Das Kreuzprodukt im physikalischen Raum

A, B Punkte im physikalischen Raum

Das *Kreuzprodukt* (oder *Vektorprodukt*) $A \times B$ von A und B ist der durch die folgenden Eigenschaften eindeutig bestimmte Punkt im (physikalischen) Raum:

- Der Abstand zwischen $A \times B$ und 0 ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Eckpunkten $0, A, B, A + B$. Insbesondere: $A \times B = 0 \iff 0, A, B$ kollinear.
- Wenn $0, A, B$ nicht kollinear sind: die Gerade durch $A \times B$ und 0 steht normal auf Ebene durch $0, A, B$.

Das Kreuzprodukt im physikalischen Raum

A, B Punkte im physikalischen Raum

Das *Kreuzprodukt* (oder *Vektorprodukt*) $A \times B$ von A und B ist der durch die folgenden Eigenschaften eindeutig bestimmte Punkt im (physikalischen) Raum:

- Der Abstand zwischen $A \times B$ und 0 ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Eckpunkten $0, A, B, A + B$. Insbesondere: $A \times B = 0 \iff 0, A, B$ kollinear.
- Wenn $0, A, B$ nicht kollinear sind: die Gerade durch $A \times B$ und 0 steht normal auf Ebene durch $0, A, B$.
- Liegt der Daumen der rechten Hand auf der Halbgeraden von 0 durch A, der Zeigefinger der rechten Hand auf der Halbgeraden von 0 durch B, dann kann der Mittelfinger der rechten Hand auf die Halbgerade von 0 nach $A \times B$ gelegt werden.

Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

- $(0,0,0)$ ist der Nullpunkt 0, $A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3)$

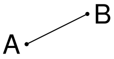
Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

- $(0, 0, 0)$ ist der Nullpunkt 0, $A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3)$
- Skalarprodukt $\quad A \cdot B := a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

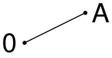
- $(0,0,0)$ ist der Nullpunkt 0, $A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3)$
- Skalarprodukt $A \cdot B := a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
- Abstand (Länge der Strecke) zwischen A und B

$$\|A - B\| := \sqrt{(A - B) \cdot (A - B)}$$



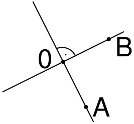
Norm von A: = Abstand zwischen A und 0

$$\|A\| = \|A - 0\|$$



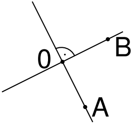
Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

- die Geraden $\mathbb{R}A$ und $\mathbb{R}B$ stehen zueinander senkrecht (normal, schließen rechten Winkel ein) $\iff A \cdot B = 0$



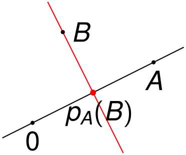
Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

- die Geraden $\mathbb{R}A$ und $\mathbb{R}B$ stehen zueinander senkrecht (normal, schließen rechten Winkel ein) $\iff A \cdot B = 0$



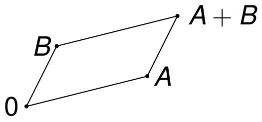
- Fußpunkt des Lotes $p_A(B)$ von B auf $\mathbb{R}A$:

$$p_A(B) = \frac{A \cdot B}{A \cdot A} A$$



Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

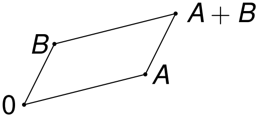
- Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Eckpunkten

  $0, A, B, A + B$ ist „Grundlinie mal Höhe“: 

Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

- Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Eckpunkten

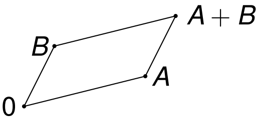
  $0, A, B, A + B$ ist „Grundlinie mal Höhe“:



$$\|A\| \, \|B - p_A(B)\| =$$

Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

- Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Eckpunkten



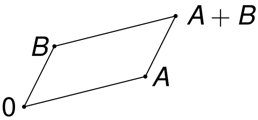
$0, A, B, A+B$ ist „Grundlinie mal Höhe“:

$$\|A\|\,\|B - p_A(B)\| =$$

$$= \sqrt{(A\cdot A)\Big((B - \frac{A\cdot B}{A\cdot A}A)\cdot(B - \frac{A\cdot B}{A\cdot A}A)\Big)} =$$

Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

- Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Eckpunkten



  $0, A, B, A+B$ ist „Grundlinie mal Höhe“:

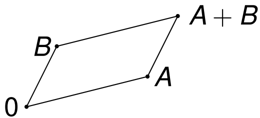
$$\|A\|\,\|B - p_A(B)\| =$$

$$= \sqrt{(A\cdot A)\Big((B - \frac{A\cdot B}{A\cdot A}A)\cdot(B - \frac{A\cdot B}{A\cdot A}A)\Big)} =$$

$$= \sqrt{(A\cdot A)(B\cdot B) - (A\cdot B)(A\cdot B)} =$$

Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

- Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Eckpunkten



$0, A, B, A+B$ ist „Grundlinie mal Höhe“:

$$\|A\|\,\|B - p_A(B)\| =$$

$$= \sqrt{(A\cdot A)\Big((B - \frac{A\cdot B}{A\cdot A}A)\cdot(B - \frac{A\cdot B}{A\cdot A}A)\Big)} =$$

$$= \sqrt{(A\cdot A)(B\cdot B) - (A\cdot B)(A\cdot B)} =$$

$$= \sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}$$

Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

$0, A, B$ nicht kollinear

- Gerade durch $A \times B$ und 0 steht normal auf der Ebene durch $0, A, B$, also:

Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

$0, A, B$ nicht kollinear

- Gerade durch $A \times B$ und 0 steht normal auf der Ebene durch $0, A, B$, also:
- $A \times B =: (x_1, x_2, x_3)$ ist eine Lösung des Systems (homogener) linearer Gleichungen (3 Unbekannte, 2 Gleichungen)

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \tag{1}$$
$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0 \tag{2}$$

Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

$0, A, B$ nicht kollinear

- Gerade durch $A \times B$ und 0 steht normal auf der Ebene durch $0, A, B$, also:
- $A \times B =: (x_1, x_2, x_3)$ ist eine Lösung des Systems (homogener) linearer Gleichungen (3 Unbekannte, 2 Gleichungen)

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \tag{1}$$
$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0 \tag{2}$$

- Multiplikation von (1) mit b_1 und von (2) mit a_1:

$$a_1 b_1 x_1 + a_2 b_1 x_2 + a_3 b_1 x_3 = 0 \tag{3}$$
$$a_1 b_1 x_1 + a_1 b_2 x_2 + a_1 b_3 x_3 = 0 \tag{4}$$

Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

- Ersetze (4) durch (4)-(3):

$$a_1 b_1 x_1 + a_2 b_1 x_2 + a_3 b_1 x_3 = 0 \tag{5}$$

$$0 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) x_2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1) x_3 = 0 \tag{6}$$

Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

- Ersetze (4) durch (4)-(3):

$$a_1 b_1 x_1 + a_2 b_1 x_2 + a_3 b_1 x_3 = 0 \tag{5}$$

$$0 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) x_2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1) x_3 = 0 \tag{6}$$

- Lösungsmenge der Gleichung (6) mit 2 Unbekannten x_2 und x_3:

$$\{ t(a_1 b_3 - a_3 b_1, -a_1 b_2 + a_2 b_1) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

- Ersetze (4) durch (4)-(3):

$$a_1 b_1 x_1 + a_2 b_1 x_2 + a_3 b_1 x_3 = 0 \quad (5)$$
$$0 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) x_2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1) x_3 = 0 \quad (6)$$

- Lösungsmenge der Gleichung (6) mit 2 Unbekannten x_2 und x_3:

$$\{t(a_1 b_3 - a_3 b_1, -a_1 b_2 + a_2 b_1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

- Einsetzen in (1) ergibt:
  $a_1 x_1 + t a_2 (a_1 b_3 - a_3 b_1) + t a_3 (-a_1 b_2 + a_2 b_1) = 0$ und

  $x_1 = t(a_3 b_2 - a_2 b_3)$

Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

- Ersetze (4) durch (4)-(3):

$$a_1 b_1 x_1 + a_2 b_1 x_2 + a_3 b_1 x_3 = 0 \qquad (5)$$
$$0 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) x_2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1) x_3 = 0 \qquad (6)$$

- Lösungsmenge der Gleichung (6) mit 2 Unbekannten x_2 und x_3:

$$\{t(a_1 b_3 - a_3 b_1, -a_1 b_2 + a_2 b_1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

- Einsetzen in (1) ergibt:
  $a_1 x_1 + ta_2(a_1 b_3 - a_3 b_1) + ta_3(-a_1 b_2 + a_2 b_1) = 0$ und

  $x_1 = t(a_3 b_2 - a_2 b_3)$

- Lösungsmenge des Systems (1) und (2):

$$\{t(a_3 b_2 - a_2 b_3, a_1 b_3 - a_3 b_1, a_2 b_1 - a_1 b_2) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

- Abstand zwischen 0 und $t(a_3b_2 - a_2b_3, a_1b_3 - a_3b_1, a_2b_1 - a_1b_2)$:

  $$|t|\sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2},$$

  das ist $|t|$ mal Flächeninhalt des Parallelogramms $0, A, B, A + B$.

Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

- Abstand zwischen 0 und $t(a_3b_2 - a_2b_3, a_1b_3 - a_3b_1, a_2b_1 - a_1b_2)$:

$$|t|\sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2},$$

  das ist $|t|$ mal Flächeninhalt des Parallelogramms $0, A, B, A + B$.
- Also: $t = -1$ oder $t = 1$ und

$$A \times B = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

  oder

$$A \times B = (a_3b_2 - a_2b_3, a_1b_3 - a_3b_1, a_2b_1 - a_1b_2)$$

Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

Beispiel: $A = (-1, 0, 1)$, $B = (1, 2, 2)$

- Fußpunkt des Lotes von B auf $\mathbb{R}A$: $\frac{A \cdot B}{A \cdot A} A = \frac{1}{2}(-1, 0, 1)$

Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

Beispiel: $A = (-1, 0, 1)$, $B = (1, 2, 2)$

- Fußpunkt des Lotes von B auf $\mathbb{R}A$: $\frac{A \cdot B}{A \cdot A} A = \frac{1}{2}(-1, 0, 1)$
- Flächeninhalt des Parallelogramms $0, A, B, A + B$:
  $\|A\| \, \|B - p_A(B)\| = \sqrt{2} \|(1, 2, 2) - \frac{1}{2}(-1, 0, 1)\| = \sqrt{17}$

Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

Beispiel: $A = (-1, 0, 1)$, $B = (1, 2, 2)$

- Fußpunkt des Lotes von B auf $\mathbb{R}A$: $\frac{A \cdot B}{A \cdot A} A = \frac{1}{2}(-1, 0, 1)$
- Flächeninhalt des Parallelogramms $0, A, B, A + B$:
  $\|A\| \, \|B - p_A(B)\| = \sqrt{2}\|(1, 2, 2) - \frac{1}{2}(-1, 0, 1)\| = \sqrt{17}$
- Lösungsmenge von

$$-x_1 + 0x_2 + x_3 = 0 \tag{7}$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \tag{8}$$

Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

Beispiel: $A = (-1, 0, 1)$, $B = (1, 2, 2)$

- Fußpunkt des Lotes von B auf $\mathbb{R}A$: $\frac{A \cdot B}{A \cdot A} A = \frac{1}{2}(-1, 0, 1)$
- Flächeninhalt des Parallelogramms $0, A, B, A + B$: $\|A\| \, \|B - p_A(B)\| = \sqrt{2}\|(1, 2, 2) - \frac{1}{2}(-1, 0, 1)\| = \sqrt{17}$
- Lösungsmenge von

$$-x_1 + 0x_2 + x_3 = 0 \tag{7}$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \tag{8}$$

- ist $\{t(2, -3, 2) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

Beispiel: $A = (-1, 0, 1)$, $B = (1, 2, 2)$

- Fußpunkt des Lotes von B auf $\mathbb{R}A$: $\frac{A \cdot B}{A \cdot A} A = \frac{1}{2}(-1, 0, 1)$
- Flächeninhalt des Parallelogramms $0, A, B, A + B$:
  $\|A\| \, \|B - p_A(B)\| = \sqrt{2} \|(1, 2, 2) - \frac{1}{2}(-1, 0, 1)\| = \sqrt{17}$
- Lösungsmenge von

$$-x_1 + 0x_2 + x_3 = 0 \tag{7}$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \tag{8}$$

- ist $\{t(2, -3, 2) \mid t \in \mathbb{R}\}$
- $\|(2, -3, 2)\| = \sqrt{17}$, also: $A \times B = (2, -3, 2)$ oder $(-2, 3, -2)$.

Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

Anwendungen im Mathematikunterricht in der Schule
(**benötigen Orientierung nicht**).

$0, A, B$ nicht kollinear

- $\mathbb{R}(A \times B)$ steht normal auf Ebene durch $0, A, B$

Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

Anwendungen im Mathematikunterricht in der Schule
(**benötigen Orientierung nicht**).

$0, A, B$ nicht kollinear

- $\mathbb{R}(A \times B)$ steht normal auf Ebene durch $0, A, B$
- Ebene durch $0, A, B$
  (in *expliziter Form* $\{sA + tB \mid s, t \in \mathbb{R}\}$)

  ist Lösungsmenge der Gleichung $c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0$, wobei
  $(c_1, c_2, c_3) = A \times B$ (*implizite Form* dieser Ebene)

Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

Anwendungen im Mathematikunterricht in der Schule
(**benötigen Orientierung nicht**).

$0, A, B$ nicht kollinear

- $\mathbb{R}(A \times B)$ steht normal auf Ebene durch $0, A, B$
- Ebene durch $0, A, B$
  (in *expliziter Form* $\{sA + tB \mid s, t \in \mathbb{R}\}$)

  ist Lösungsmenge der Gleichung $c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0$, wobei
  $(c_1, c_2, c_3) = A \times B$ (*implizite Form* dieser Ebene)
- Flächeninhalt des Parallelogramms $0, A, B, A + B$:

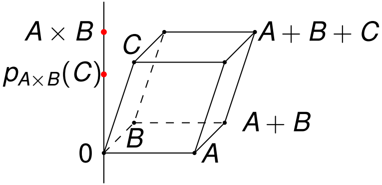
$$\|A \times B\|$$

Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

Anwendungen im Mathematikunterricht in der Schule
(**benötigen Orientierung nicht**).

- Volumen des von A, B, C erzeugten Parallelepipeds:

$$|(A \times B) \cdot C| \quad (\textit{Spatprodukt})$$

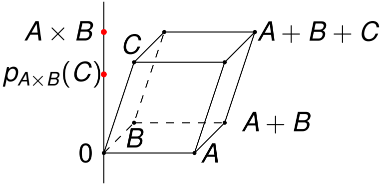


Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

Anwendungen im Mathematikunterricht in der Schule
(**benötigen Orientierung nicht**).

- Volumen des von A, B, C erzeugten Parallelepipeds:

$$|(A \times B) \cdot C| \quad (\textit{Spatprodukt})$$



- Denn: Volumen =

$$= \|A \times B\| \, \|p_{A\times B}(C)\| = \|A \times B\| \, \left\| \frac{(A \times B) \cdot C}{(A \times B) \cdot (A \times B)} A \times B \right\| =$$

$$= |(A \times B) \cdot C|$$

Volumen, Orientierung und Determinante

$$E_1 := (1,0,0),\ E_2 := (0,1,0),\ E_3 := (0,0,1)$$
$$A = (a_1, a_2, a_3) = a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3$$

- Skalarprodukt $\longleftrightarrow$ Abstand und Winkel

Volumen, Orientierung und Determinante

$$E_1 := (1, 0, 0),\ E_2 := (0, 1, 0),\ E_3 := (0, 0, 1)$$

$$A = (a_1, a_2, a_3) = a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3$$

- Skalarprodukt $\longleftrightarrow$ Abstand und Winkel
- Determinante $\longleftrightarrow$ Volumen und Orientierung

Volumen, Orientierung und Determinante

$$E_1 := (1, 0, 0),\ E_2 := (0, 1, 0),\ E_3 := (0, 0, 1)$$
$$A = (a_1, a_2, a_3) = a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3$$

- Skalarprodukt $\longleftrightarrow$ Abstand und Winkel
- Determinante $\longleftrightarrow$ Volumen und Orientierung
- $A, B, C \in \mathbb{R}^3$

Volumen, Orientierung und Determinante

$$E_1 := (1,0,0),\ E_2 := (0,1,0),\ E_3 := (0,0,1)$$
$$A = (a_1, a_2, a_3) = a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3$$

- Skalarprodukt $\longleftrightarrow$ Abstand und Winkel
- Determinante $\longleftrightarrow$ Volumen und Orientierung
- $A, B, C \in \mathbb{R}^3$
  Volumen des von A, B, C erzeugten Parallelepipeds $\{rA + sB + tC \mid 0 \leq r, s, t \leq 1\}$:

$$vol(A, B, C) := |\det(A, B, C)|$$

Volumen, Orientierung und Determinante

$$E_1 := (1, 0, 0), \; E_2 := (0, 1, 0), \; E_3 := (0, 0, 1)$$

$$A = (a_1, a_2, a_3) = a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3$$

- Skalarprodukt $\longleftrightarrow$ Abstand und Winkel
- Determinante $\longleftrightarrow$ Volumen und Orientierung
- $A, B, C \in \mathbb{R}^3$
  Volumen des von A, B, C erzeugten Parallelepipeds $\{rA + sB + tC \,|\, 0 \leq r, s, t \leq 1\}$:

  $$vol(A, B, C) := |\det(A, B, C)|$$

- $\det(A, B, C) = 0 \iff 0, A, B, C$ koplanar (liegen in einer Ebene).

Volumen, Orientierung und Determinante

- $\det(E_1, E_2, E_3) = \det(E_3, E_1, E_2) = \det(E_2, E_3, E_1) = 1,$

  $\det(E_2, E_1, E_3) = \det(E_3, E_2, E_1) = \det(E_1, E_3, E_2) = -1.$

Volumen, Orientierung und Determinante

- $\det(E_1, E_2, E_3) = \det(E_3, E_1, E_2) = \det(E_2, E_3, E_1) = 1,$

  $\det(E_2, E_1, E_3) = \det(E_3, E_2, E_1) = \det(E_1, E_3, E_2) = -1.$
- $$\det(A, B, C) = \det(\sum_{i=1}^{3} a_i E_i, \sum_{j=1}^{3} b_j E_j, \sum_{k=1}^{3} c_k E_k) =$$

  $$= \sum_{i,j,k=1}^{3} a_i b_j c_k \det(E_i, E_j, E_k) =$$

  $$= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

Volumen, Orientierung und Determinante

- $\det(E_1, E_2, E_3) = \det(E_3, E_1, E_2) = \det(E_2, E_3, E_1) = 1,$

  $\det(E_2, E_1, E_3) = \det(E_3, E_2, E_1) = \det(E_1, E_3, E_2) = -1.$

- $$\det(A, B, C) = \det(\sum_{i=1}^{3} a_i E_i, \sum_{j=1}^{3} b_j E_j, \sum_{k=1}^{3} c_k E_k) =$$

  $$= \sum_{i,j,k=1}^{3} a_i b_j c_k \det(E_i, E_j, E_k) =$$

  $$= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

- Beispiel:

  $$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = 1$$

Volumen, Orientierung und Determinante

- Vereinbarung: (E_1, E_2, E_3) *positiv orientiert*.
  Dadurch wird auf $\mathbb{R}^3$ eine *Orientierung* gewählt.

Volumen, Orientierung und Determinante

- Vereinbarung: (E_1, E_2, E_3) *positiv orientiert*.
  Dadurch wird auf $\mathbb{R}^3$ eine *Orientierung* gewählt.
- (A, B, C) *positiv orientiert*: $\Leftrightarrow \det(A, B, C) > 0$

Volumen, Orientierung und Determinante

- Vereinbarung: (E_1, E_2, E_3) *positiv orientiert*.
  Dadurch wird auf $\mathbb{R}^3$ eine *Orientierung* gewählt.
- (A, B, C) *positiv orientiert*: $\Leftrightarrow \mathtt{det}(A, B, C) > 0$
- (E_1, E_3, E_2) nicht positiv orientiert, (E_2, E_3, E_1) positiv orientiert

Volumen, Orientierung und Determinante

- Vereinbarung: (E_1, E_2, E_3) *positiv orientiert*.
  Dadurch wird auf $\mathbb{R}^3$ eine *Orientierung* gewählt.
- (A, B, C) *positiv orientiert*: $\Leftrightarrow \mathtt{det}(A, B, C) > 0$
- (E_1, E_3, E_2) nicht positiv orientiert, (E_2, E_3, E_1) positiv orientiert
- Im physikalischen Raum: (Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger) der rechten Hand sind anders orientiert als die der linken Hand.

Volumen, Orientierung und Determinante

- Vereinbarung: (E_1, E_2, E_3) *positiv orientiert*.
  Dadurch wird auf $\mathbb{R}^3$ eine *Orientierung* gewählt.
- (A, B, C) *positiv orientiert*: $\Leftrightarrow \det(A, B, C) > 0$
- (E_1, E_3, E_2) nicht positiv orientiert, (E_2, E_3, E_1) positiv orientiert
- Im physikalischen Raum: (Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger) der rechten Hand sind anders orientiert als die der linken Hand.
- Im $\mathbb{R}^3$ (E_1, E_2, E_3) positiv orientiert:
  $(A, B, A \times B)$ ist positiv orientiert. Daher

$$A \times B = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Volumen, Orientierung und Determinante

- Vereinbarung: (E_1, E_2, E_3) *positiv orientiert*.
  Dadurch wird auf $\mathbb{R}^3$ eine *Orientierung* gewählt.
- (A, B, C) *positiv orientiert*: $\Leftrightarrow \mathtt{det}(A, B, C) > 0$
- (E_1, E_3, E_2) nicht positiv orientiert, (E_2, E_3, E_1) positiv orientiert
- Im physikalischen Raum: (Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger) der rechten Hand sind anders orientiert als die der linken Hand.
- Im $\mathbb{R}^3$ (E_1, E_2, E_3) positiv orientiert:
  $(A, B, A \times B)$ ist positiv orientiert. Daher

  $$A \times B = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

  Denn:

  $$\mathtt{det}(A, B, A \times B) = \|A \times B\|^2$$

  Volumen des von $A, B, A \times B$ erzeugten Parallelepipeds

Das Kreuzprodukt als Multiplikation auf $\mathbb{R}^3$

- Multiplikation auf $\mathbb{R}^3$: bilineare Funktion $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(A, B) \longmapsto A \times B$, also durch die Vorgabe der Funktionswerte an den Stellen $(E_i, E_j),\ 1 \leq i, j, \leq 3$ eindeutig bestimmt.

Das Kreuzprodukt als Multiplikation auf $\mathbb{R}^3$

- Multiplikation auf $\mathbb{R}^3$: bilineare Funktion $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(A, B) \longmapsto A \times B$, also durch die Vorgabe der Funktionswerte an den Stellen $(E_i, E_j),\ 1 \leq i, j, \leq 3$ eindeutig bestimmt.

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 := E_3 & E_2 \times E_3 := E_1 & E_3 \times E_1 := E_2 \\ E_2 \times E_1 := -E_3 & E_3 \times E_2 := -E_1 & E_1 \times E_3 := -E_2 \\ E_1 \times E_1 := 0 & E_2 \times E_2 := 0 & E_3 \times E_3 := 0 \end{array}$$

Das Kreuzprodukt als Multiplikation auf $\mathbb{R}^3$

- Multiplikation auf $\mathbb{R}^3$: bilineare Funktion $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(A, B) \longmapsto A \times B$, also durch die Vorgabe der Funktionswerte an den Stellen $(E_i, E_j),\ 1 \leq i, j, \leq 3$ eindeutig bestimmt.

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 := E_3 & E_2 \times E_3 := E_1 & E_3 \times E_1 := E_2 \\ E_2 \times E_1 := -E_3 & E_3 \times E_2 := -E_1 & E_1 \times E_3 := -E_2 \\ E_1 \times E_1 := 0 & E_2 \times E_2 := 0 & E_3 \times E_3 := 0 \end{array}$$

- Dann: für alle $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)$ ist

$$(a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3) \times (b_1 E_1 + b_2 E_2 + b_3 E_3) =$$

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2) E_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) E_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1 a_2) E_3 =$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Das Kreuzprodukt als Multiplikation auf $\mathbb{R}^3$

Rechenregeln für das Kreuzprodukt:

- Distributivgesetz: $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$

Das Kreuzprodukt als Multiplikation auf $\mathbb{R}^3$

Rechenregeln für das Kreuzprodukt:

- Distributivgesetz: $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$
- $(sA) \times (tB) = (st)(A \times B)$

Das Kreuzprodukt als Multiplikation auf $\mathbb{R}^3$

Rechenregeln für das Kreuzprodukt:

- Distributivgesetz: $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$
- $(sA) \times (tB) = (st)(A \times B)$
- Kreuzprodukt nicht kommutativ, sondern *antikommutativ*
  $A \times B = -B \times A$, insbesondere $A \times A = 0$

Das Kreuzprodukt als Multiplikation auf $\mathbb{R}^3$

Rechenregeln für das Kreuzprodukt:

- Distributivgesetz: $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$
- $(sA) \times (tB) = (st)(A \times B)$
- Kreuzprodukt nicht kommutativ, sondern *antikommutativ* $A \times B = -B \times A$, insbesondere $A \times A = 0$
- Kreuzprodukt nicht assoziativ:

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$$

Das Kreuzprodukt als Multiplikation auf $\mathbb{R}^3$

Rechenregeln für das Kreuzprodukt:

- Distributivgesetz: $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$
- $(sA) \times (tB) = (st)(A \times B)$
- Kreuzprodukt nicht kommutativ, sondern *antikommutativ* $A \times B = -B \times A$, insbesondere $A \times A = 0$
- Kreuzprodukt nicht assoziativ:

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$$

- Für alle $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ gilt *Jacobi-Identität*

$$(A \times B) \times C + (B \times C) \times A + (C \times A) \times B = 0$$

Das Kreuzprodukt als Multiplikation auf $\mathbb{R}^3$

Rechenregeln für das Kreuzprodukt:

- Distributivgesetz: $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$
- $(sA) \times (tB) = (st)(A \times B)$
- Kreuzprodukt nicht kommutativ, sondern *antikommutativ* $A \times B = -B \times A$, insbesondere $A \times A = 0$
- Kreuzprodukt nicht assoziativ:

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$$

- Für alle $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ gilt *Jacobi-Identität*

$$(A \times B) \times C + (B \times C) \times A + (C \times A) \times B = 0$$

- $(\mathbb{R}^3, +, \times)$ ist eine *Lie-Algebra* .

Drehungen im $\mathbb{R}^3$, orthogonale und schiefsymmetrische Matrizen

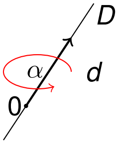
- *Drehung d* : $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $d(0) = 0$:
  $d(A) \in \mathbb{R}^3$ ist der Punkt, den man durch Drehung von A um Drehwinkel α ($0 \leq \alpha < 2\pi$) um die Drehachse D (Gerade durch 0) in der Drehrichtung (2 Möglichkeiten) erhält.

Drehungen im $\mathbb{R}^3$, orthogonale und schiefsymmetrische Matrizen

- *Drehung* $d : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $d(0) = 0$:
  $d(A) \in \mathbb{R}^3$ ist der Punkt, den man durch Drehung von A um Drehwinkel α ($0 \leq \alpha < 2\pi$) um die Drehachse D (Gerade durch 0) in der Drehrichtung (2 Möglichkeiten) erhält.
- Drehungen erhalten Abstand und Orientierung, dh.:
  $\|d(A) - d(B)\| = \|A - B\|$ und $(d(A), d(B), d(C))$ ist gleich orientiert wie (A, B, C).
  Jede abstands- und orientierungserhaltende Funktion d mit $d(0) = 0$ ist eine Drehung.

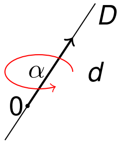
Drehungen im $\mathbb{R}^3$, orthogonale und schiefsymmetrische Matrizen

- Darstellung von *d* durch einen Pfeil: Pfeil liegt in der Drehachse *D*, Schaft 0, Länge des Pfeils = Drehwinkel α, Spitze legt Drehrichtung fest.



Drehungen im $\mathbb{R}^3$, orthogonale und schiefsymmetrische Matrizen

- Darstellung von *d* durch einen Pfeil: Pfeil liegt in der Drehachse *D*, Schaft 0, Länge des Pfeils = Drehwinkel α, Spitze legt Drehrichtung fest.



- Vorsicht: Dieser Pfeil ist kein Vektor (weder Addition noch Multiplikation mit Zahlen möglich)!

  „Merksatz“:
  Nicht jeder Vektor ist ein Pfeil und nicht jeder Pfeil ist ein Vektor!

Drehungen im Raum, orthogonale und schiefsymmetrische Matrizen

- Darstellung von d durch eine Matrix:

$$M \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$M = \begin{pmatrix} d(E_1) & d(E_2) & d(E_3) \end{pmatrix}$$

Drehungen im Raum, orthogonale und schiefsymmetrische Matrizen

- Darstellung von d durch eine Matrix:

$$M \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = d(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix})$$

$$M = \begin{pmatrix} d(E_1) & d(E_2) & d(E_3) \end{pmatrix}$$

- Matrix der Drehung um Drehachse $\mathbb{R}E_1$, $\mathbb{R}E_2$, $\mathbb{R}E_3$ mit Drehwinkel α und Orientierung (E_1, E_2, E_3):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Drehungen im Raum, orthogonale und schiefsymmetrische Matrizen

- $SO_3 := \{M \mid M \text{ Matrix einer Drehung mit Drehachse durch } 0\}$
  spezielle orthogonale Gruppe

Drehungen im Raum, orthogonale und schiefsymmetrische Matrizen

- $SO_3 := \{M \mid M$ Matrix einer Drehung mit Drehachse durch $0\}$
  spezielle orthogonale Gruppe

- $SO_3 = \{M \mid M \cdot M^T = I_3,\ det(M) = 1\}$ ist Untergruppe der Gruppe aller invertierbaren 3×3-Matrizen und 3-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit

Drehungen im Raum, orthogonale und schiefsymmetrische Matrizen

- $SO_3 := \{M \mid M$ Matrix einer Drehung mit Drehachse durch $0\}$
  spezielle orthogonale Gruppe
- $SO_3 = \{M \mid M \cdot M^T = I_3,\ det(M) = 1\}$ ist Untergruppe der Gruppe aller invertierbaren 3×3-Matrizen und 3-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit
- SO_3 ist eine 3-dimensionale kompakte *Lie-Gruppe* .

Drehungen im Raum, orthogonale und schiefsymmetrische Matrizen

$$I_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Tangentialraum an SO_3 an der Stelle I_3:

$$so_3 := \{M \mid M^T = -M\}$$

Menge der *schiefsymmetrischen Matrizen*

Drehungen im Raum, orthogonale und schiefsymmetrische Matrizen

$$I_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Tangentialraum an SO_3 an der Stelle I_3:

  $$so_3 := \{M \mid M^T = -M\}$$

  Menge der *schiefsymmetrischen Matrizen*

- $M \in so_3,\ \varepsilon$ „sehr klein“,
  dann ist $I_3 + \varepsilon M$ eine „infinitesimale Drehung“

Drehungen im Raum, orthogonale und schiefsymmetrische Matrizen

- so_3 ist mit Kommutator

$$[M, N] := M \circ N - N \circ M$$

  als Multiplikation: eine 3 -dimensionale Lie-Algebra.

Drehungen im Raum, orthogonale und schiefsymmetrische Matrizen

- so_3 ist mit Kommutator

$$[M, N] := M \circ N - N \circ M$$

  als Multiplikation: eine 3 -dimensionale Lie-Algebra.

- Wegen

$$M_A := \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} = a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3$$

  und

$$M_A + M_B = M_{A+B} \text{ und } [M_A, M_B] = M_{A \times B}$$

Drehungen im Raum, orthogonale und schiefsymmetrische Matrizen

- so_3 ist mit Kommutator

$$[M, N] := M \circ N - N \circ M$$

  als Multiplikation: eine 3 -dimensionale Lie-Algebra.

- Wegen

$$M_A := \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} = a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3$$

  und

$$M_A + M_B = M_{A+B} \text{ und } [M_A, M_B] = M_{A \times B}$$

  können die Lie-Algebren $(so_3, +, [.,.])$ und $(\mathbb{R}^3, +, \times)$ durch

$$(a_1, a_2, a_3) = A = M_A$$

  als gleich aufgefasst werden.

Kreuzprodukt und Drehimpuls

- Tangentialabbildung an der Stelle $(I_3, 0)$ der Operation

$$SO_3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(M, B) \longmapsto M \circ B$$

ist

$$so_3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(M, B) \longmapsto M \circ B$$

Kreuzprodukt und Drehimpuls

- Tangentialabbildung an der Stelle $(I_3, 0)$ der Operation

$$SO_3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(M, B) \longmapsto M \circ B$$

  ist

$$so_3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(M, B) \longmapsto M \circ B$$

- Wenn $M = a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3$ ist, dann ist $M \circ B = A \times B$

Kreuzprodukt und Drehimpuls

- Tangentialabbildung an der Stelle $(I_3, 0)$ der Operation

$$SO_3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(M, B) \longmapsto M \circ B$$

ist

$$so_3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(M, B) \longmapsto M \circ B$$

- Wenn $M = a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3$ ist, dann ist $M \circ B = A \times B$
- Drehimpuls in der Physik: Kreuzprodukt des Ortsvektors mit dem Impuls (Masse mal Geschwindigkeit) eines Teilchens.
Nach Wahl von Koordinaten: Ort, Impuls, Drehimpuls $\in \mathbb{R}^3$.

Kreuzprodukt und Drehimpuls

- Tangentialabbildung an der Stelle $(I_3, 0)$ der Operation

$$SO_3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(M, B) \longmapsto M \circ B$$

ist

$$so_3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(M, B) \longmapsto M \circ B$$

- Wenn $M = a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3$ ist, dann ist $M \circ B = A \times B$
- Drehimpuls in der Physik: Kreuzprodukt des Ortsvektors mit dem Impuls (Masse mal Geschwindigkeit) eines Teilchens.
  Nach Wahl von Koordinaten: Ort, Impuls, Drehimpuls $\in \mathbb{R}^3$.
- Vor Wahl von Koordinaten: Interpretation des (Dreh-)Impulses als Element von so_3 ?

Danke für die Aufmerksamkeit!

http://www.uibk.ac.at/mathematik/personal/pauer/

franz.pauer@uibk.ac.at