universität wien

Kreatives Denken statt Routine

Problemlösen im Mathematikunterricht

Mag. Felix Woltron, PhD

universität wien

Ablauf

- Problemlösen vs. Routineaufgaben
- Beliefs
- Umsetzungsstrategien und Kostproben
- Ausblick

universität wien

Problemlösen in der Mathematik(didaktik)

- „[...] the mathematician's main reason for existence is to solve problems, [...] what mathematics really consists of is problems and solutions." (Halmos, 1980, S. 519)

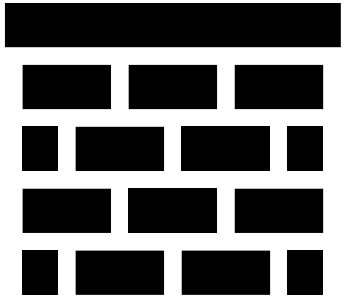
- „The field of mathematics education has been focused on problem solving for well over 50 years. […] much has been written about problem solving, the sum of which has created a taken as-shared belief that problem solving is, and should be, an important part of what it means to teach and learn mathematics." (Liljedahl & Cai, 2021, S.724).

- Die Umsetzung des problemorientierten Mathematikunterrichts bleibt für viele Lehrkräfte eine Herausforderung (ebd., S. 725).

universität wien

Problemlösen im Mathematikunterricht

- Keine bekannten Lösungsschemata oder Algorithmen für den Bearbeiter/die Bearbeiterin verfügbar
- Abgrenzung zu Routineaufgaben, die mit bekannten Verfahren gelöst werden können
- Vier essentielle Kategorien nach Schoenfeld (1985):
  - Heurismen (Denkoperationen, die bei diesem Prozess von Nutzen sind)
  - Ressourcen (Vorwissen)
  - **Beliefs**
  - Kontrolle (z.B. Frustrationstoleranz)
- Fokus: „Wirkliche“ Probleme, nicht nur schwierige Aufgaben



universität wien

Aufgaben / Problemtypen	Start	Weg	Ziel	Beispiele
Gelöste Aufgabe	×	×	×	F = 1/2 * 2cm * 1cm = $1cm^2$
(geschlossene) Aufgabe, Routineaufgabe	×	×	○	F = ?
Problem (mit bekanntem Ziel)	×	○	×	F gleichseitiges Achteck = ?
Umkehrproblem	○	×	×	Zeichne ein Trapez mit F = $5cm^2$
Problem (mit unklaren Voraussetzungen)	○	○	×	Wie groß ist die Oberfläche eines Menschen?
Anwendungssuche	○	×	○	Was kann man mit F = 1/2 * a * b berechnen?
Problem (mit offenem Ziel)	×	○	○	Was kann man hier alles berechnen?
Offene Situation	○	○	○	Wie viele Maße benötigt man, um eine Fläche zu berechnen?

Holzäpfel et al., 2018, S. 56

universität wien

Warum Problemlösen

- Teil des Curriculums
- 3. Winter‘sche Grunderfahrung (Winter, 1995):

  In der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten (heuristische Fähigkeiten) die über die Mathematik hinaus gehen, zu erwerben.

- Hilft Schüler:innen „mathematisch“ zu denken (Schoenfeld, 1992)
- Kritik am Problemlösen

Kostprobe – Einstiegsaufgabe

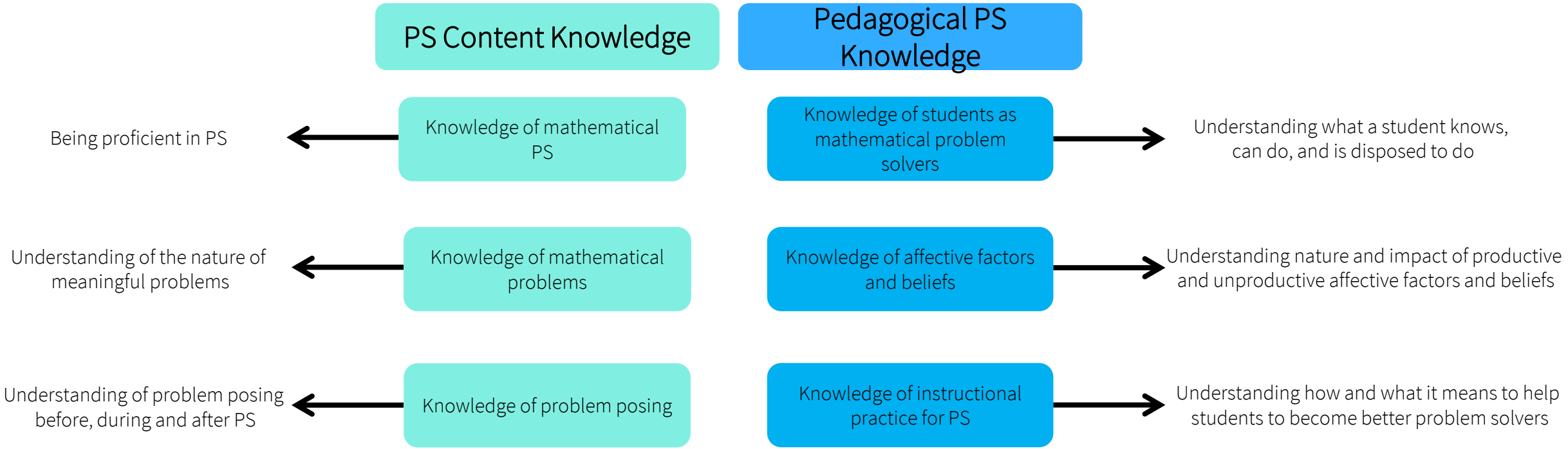
- Losgelöst von mathematischen Lerninhalten (Curriculum)
- Vorteil: Prozesse des Problemlösens stehen im Vordergrund, ohne mathematische Inhalte lernen zu müssen

  - *Max und Moritz spielen ein einfaches Spiel. Dazu haben sie hundert 1-Cent-Münzen auf dem Tisch zu einem Kreis ausgelegt. Wer am Zug ist, darf eine Münze oder zwei Münzen aus dem Kreis nehmen. An welcher Stelle ein Spieler die Münze oder die Münzen entfernt, spielt keine Rolle. Entscheidet er sich für zwei Münzen, müssen diese aber direkt nebeneinander liegen. Wer zuerst keine Münze mehr nehmen kann, hat verloren. Max macht den ersten Zug.*

    Beide Spieler sind perfekte Logiker und machen keine Denkfehler.
  - *Wer wird das Spiel gewinnen und welcher Strategie sollte er folgen? (Hemme, 2018)*

universität wien

Mathematics Problem-Solving Knowledge for Teaching



Clivaz et al. (2023), Chapman (2015)

universität wien

Beliefs

- *Beliefs setzen sich aus relativ überdauerndem subjektivem Wissen von bestimmten Objekten oder Angelegenheiten sowie damit verbundenen Emotionen und Haltungen zusammen. Alle Beliefs über Mathematik, den Mathematikunterricht und das Lernen von Mathematik bilden zusammen das mathematische Weltbild. Beliefs können bewusst oder unbewusst sein.* (Maaß, 2006, S. 119)

- Statisch vs. dynamisch

- Stabil vs. veränderlich

- Hürden für Problemlösen im Unterricht: Schüler:innen- UND Lehrer:innenbeliefs

universität wien

Beliefs

- Schoenfeld (1992):
  - *Mathematische Probleme haben genau einen richtigen Lösungsweg. Normalerweise die Regel, die von der Lehrperson zuletzt eingeführt wurde.*
  - *„Normale“ Schüler:innen können Mathematik nicht verstehen- Man lernt die Regeln auswendig und wendet sie an.*
  - *Für die Bearbeitung eines mathematischen Problems braucht man höchstens 5 Minuten.*
  - *[…]*

universität wien

Umsetzungsstrategien und Kostproben

universität wien

Problemlösen in Einstiegsphasen des Mathematikunterrichts

- Eignung für problemorientierte Einführung

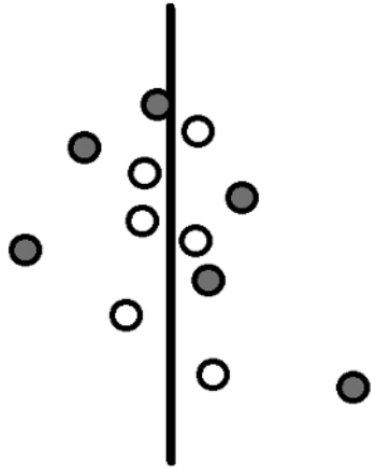
  - Nicht jeder Unterrichtsstoff eignet sich gleichermaßen
  - Instruktive Vermittlung nötig bei Konventionen & festen Verfahren (z. B. schriftliche Division)
  - Dennoch oft möglich, sinnstiftende, verstehensorientierte Lernanlässe zu schaffen

  (Herold-Blasius et al., 2019, S. 299 f.)

universität wien

Problemlösen in Einstiegsphasen des Mathematikunterrichts

„Zwei (oder mehr) Spieler werfen Münzen. Wer am dichtesten an einer Linie wirft, gewinnt. Nebenstehend sieht man das Ergebnis des Wurfs von Spieler A (grau) und B (weiß)."
(in Anlehnung an „the money game task" von Eichler & Vogel 2012, S. 844)



- Eigenständige Erarbeitung der Gewinnbedingung – bewusst offen gelassen
- Einführung in Statistik: Anknüpfung an Mittelwert und Streuung zur Analyse von Daten und Interpretation mathematischer Begriffe.

- (Herold-Blasius et al., 2019, S. 300)

Problemlösen in Übungsphasen –Erkundung Rechenspiel – UNI Kassel

(Eichler & Schmitt & Stylianou, 2023)

Jannis schlägt Laura vor ein Zählspiel zu spielen:

Jannis beginnt zu zählen. Er darf eine Zahl zwischen 1 und 9 nennen.
Danach ist Laura dran: Auch Sie darf eine Zahl zwischen 1 und 9 auswählen und zu Jannis Zahl addieren. Nun ist Jannis wieder an der Reihe und addiert zu der Summe wieder eine Zahl zwischen 1 und 9 hinzu. Das geht nun solange bis die Zahl 99 erreicht ist – die Zahl 99 darf nicht überschritten werden.

*Die Spieler*in, welche*r zuerst 99 sagt, verliert. Jannis will gewinnen.*

1 Wie kann Jannis gewinnen, wenn Laura keine Strategie hat?

(a) Untersuche das Spiel und finde ein Strategie, mit der Jannis immer gewinnt.

(b) Schreibe Deine Erkenntnis in einem gut verständlichen Satz auf.

(c) Begründe Dein Ergebnis so, dass es möglichst jede*r nachvollziehen kann.

universität wien

Außerhalb des Regelunterrichts – „MFU!“

- Treppenzahlen

- Finde für alle Zahlen größer als 1 und kleiner als 20 **alle** Möglichkeiten, sie als Summe von **mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen** (Treppenzahlen) größer als 0 zu schreiben. Was fällt dir auf? Begründe deine Antwort!

- Ermittle **alle Möglichkeiten**, die Zahl 100 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen (Treppenzahlen) größer als 0 zu schreiben. (Hinweis: Anhand der Summe $1 + 2 + \cdots + 14$ erkennt man, dass es höchstens 13 Summanden sein können)

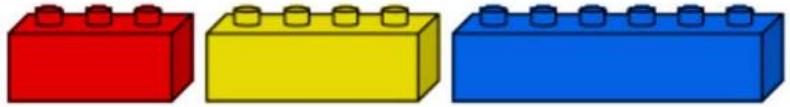
universität wien

Hürden

- Aus-/Fortbildung
- Benotung
- „What you test is what you get“

Legosteine

Maike baut eine Ritterburg aus Lego-Steinen. Sie hat 3 verschiedene Sorten von Steinen:



3er 4er 6er

Um die Ritterburg zu Ende zu bauen, benötigt Maike noch eine Mauer, die genau „19 Punkte“ breit ist.

Finde alle Möglichkeiten, aus 3er-, 4er- und 6er- Steinen eine 19-Punkte-Mauer zu bauen. Wie viele 3er-, 4er- und 6er- Steine braucht man jeweils?

Schreibe hier deine **Ideen** und deine **Lösung** auf.

	Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge der Legosteine	Mit Berücksichtigung der Reihenfolge der Legosteine
Kein Ansatz (0 Punkte)	Kein oder ein Beispiel: Der Schüler/ die Schülerin hat keine Lösung gefunden oder gibt genau ein Beispiel an. Im zweiten Fall wurde die Problemstellung nicht erfasst.	
Einfacher Ansatz (1 Punkt)	Mehrere Beispiele: Der Schüler/ die Schülerin schreibt einzelne Beispiele auf, geht dabei aber unsystematisch vor und findet dadurch nicht alle Lösungen.	
Erweiterter Ansatz (2 Punkte)	Mehrere Beispiele und Strategie: Der Schüler/ die Schülerin schreibt Beispiele auf und geht dabei systematisch vor. Dennoch wurden nicht alle Lösungen gefunden.	
Korrekter Ansatz (3 Punkte)	Alle Beispiele: Der Schüler/ die Schülerin findet die vollständige Anzahl von Lösungen. a) $3+3+3+3+3+4$ b) $3+3+3+4+6$ c) $3+4+6+6$ d) $3+4+4+4+4$ Die Lösungen b) und c) können durch das Zusammenfassen von 3-er Steinen in 6-er Steinen generiert werden.	Mit Berücksichtigung der Reihenfolge ergeben sich insgesamt 43 Möglichkeiten. $\frac{6!}{5!}+\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{4!}+\frac{4!}{2!}=$ $=6+20+5+12=43$

Herold-Blasius et al. (2019), S. 304 ff.

universität wien

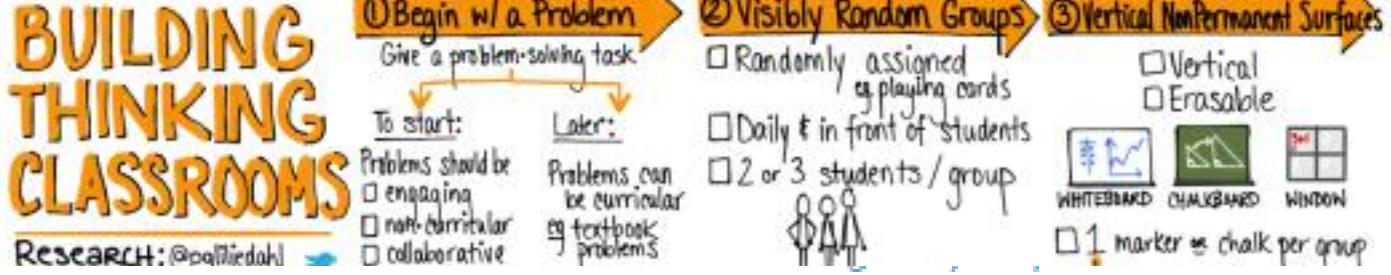
Hürden

- Herold-Blasius et al. (2019, S. 297 ff.):

  - *Dabei lernt man nicht genug.*
  - *Das ist nur was für die Guten.*
  - *Problemlösen – das mache ich doch schon.*
  - *Das lässt sich im Unterricht nicht realisieren.*

universität wien

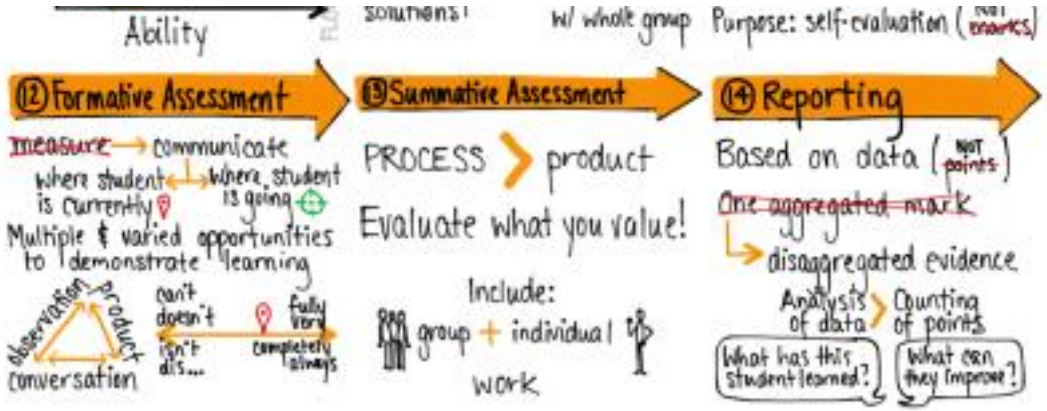
Ausblick – Projekt



STAGE ONE	STAGE TWO	STAGE THREE
• begin lessons with problem solving tasks • vertical non-permanent surfaces • visibly random groups	• oral instructions • defronting the room • answering questions	• levelling • assessment • managing flow

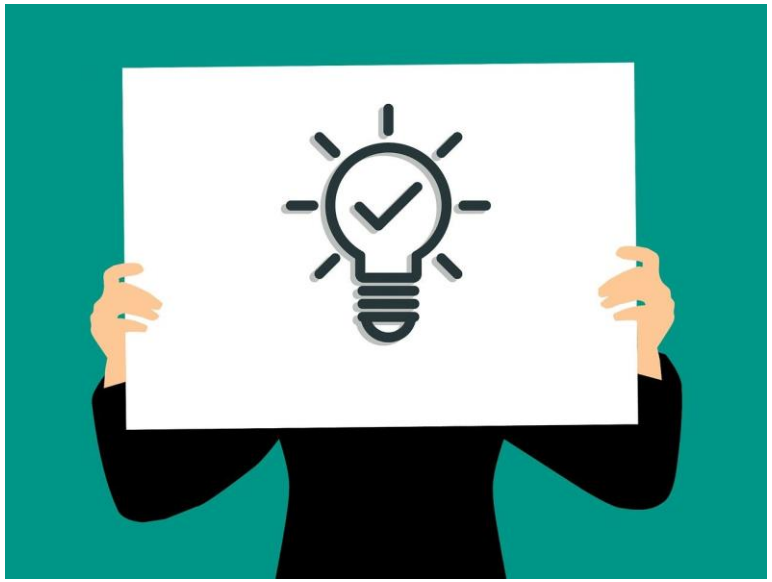
BLUNTNESS

DIFFICULTY OF IMPLEMENTATION



universität wien

Lösungen der Aufgabenstellungen



universität wien

Literatur

- Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, 3 (Heft 1), 19-36. https://doi.org/10.31129/lumat.v3i1.1049
- Clivaz, S., Batteau, V., Pellet, J. P., Bünzli, L. O., Daina, A., & S. Presutti (2023). Teachers' mathematical problem-solving knowledge: In what way is it constructed during teachers' collaborative work? *The Journal of Mathematical Behavior*, 69, 1-19. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101051
- Dewey, J. (1910). *How we think*. D C Heath.
- Eichler, A. & Vogel, M. (2012). Basic modelling of uncertainty – young students' mental models. *ZDM – Mathematics Education*, 44(7), 841-854.
- Halmos, P. R. (1980). The Heart Of Mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 87 (Heft 7), S. 519-524.
- Herold-Blasius, R., Holzäpfel, L., & Rott, B. (2019). Problemlösestrategien lehren lernen – Wo die Praxis Probleme beim Problemlösen sieht. In Büchter, A., Glade, M., Herold-Blasius, R., Klinger, M., Schacht, F., Scherer, P. (Eds.), *Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht* (pp. 295–309). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-24292-3_21
- Holzäpfel, L., Lacher, M., Leuders T., & Rott, B. (2018). *Problemlösen lehren lernen. Wege zum mathematischen Denken*. Seelze: Kallmeyer in Verbindung mit Klett.
- Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., & Bruder, R. (2016). *Problem Solving in Mathematics Education*. Springer Open. https://doi.org/10.1007/978-3-319-40730-2
- Liljedahl, P., & Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: a look at the state of the art. *ZDM Mathematics Education*, 53, S. 723-735. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01291-w
- Maaß, K. (2006). Bedeutungsdimensionen nützlichkeitsorientierter Beliefs. Ein theoretisches Konzept zu Vorstellungen über die Nützlichkeit von Mathematik und eine erste empirische Annäherung bei Lehramtsstudierenden. *mathematica didactica*, 29/2, 114-138.
- Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Pearson.
- Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press.
- Rott, B., Specht, B., & Knipping, C. (2021). A descriptive phase model of problem-solving processes. *ZDM Mathematics Education*, 53, 737-752. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01244-3
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press New York.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). MacMillan.
- Wilson, J. W., Fernandez, M. L., & Hadaway, N. (1993). Mathematical problem solving. In P. S. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 57–77). MacMillan.
- Winter, H. (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 61, 37-46.
- Yimer, A., & Ellerton, N. F. (2010). A fve-phase model for mathematical problem solving: Identifying synergies in pre-service-teachers' metacognitive and cognitive actions. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 42, 245-261.