

Division mit Rest und Division

Zwei wesentlich verschiedene Rechenoperationen

Franz Pauer

Universität Innsbruck

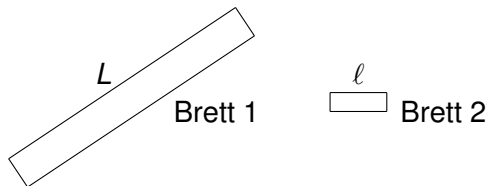
25. April 2025

Inhalt

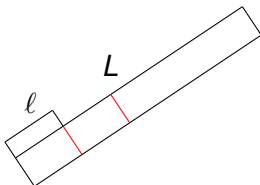
- ▶ Zwei Aufgaben zu einem Brett
- ▶ Grundvorstellungen für die zwei Rechenoperationen
- ▶ Division mit Rest
- ▶ Division
- ▶ Division mit Rest von nat. Zahlen in Zifferndarstellung
- ▶ Näherungsweise Dividieren von Dezimalzahlen
- ▶ Division mit Rest für negative Zahlen und Polynome
- ▶ Division für rationale Funktionen und reellwertige Funktionen
- ▶ Résumé

Zwei Aufgaben zu einem Brett

- ▶ Rechteckige Bretter mit Längen L und ℓ

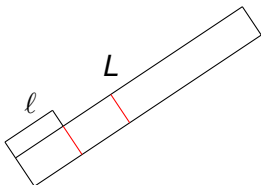


- ▶ Wieviele rechteckige Bretter der Länge ℓ (und mit derselben Breite wie Brett 1) kann man höchstens aus Brett 1 erhalten?



Zwei Aufgaben einem Brett

- ▶ Praktische Lösung mit einer Säge: Schneide - am Rand beginnend - vom Brett 1 (mit Länge L) solange rechteckige Bretter der Länge ℓ ab, wie das möglich ist.



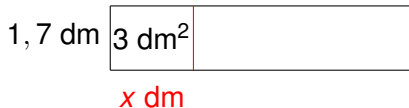
- ▶ „Rechnerisch“ formuliert: Subtrahiere die Länge ℓ so oft wie möglich von der Länge L .

$$L = q \cdot \ell + r \quad \text{und} \quad r < \ell$$

Division mit Rest von L durch ℓ ,
bedeutet: „so oft wie möglich subtrahieren“.

Zwei Aufgaben zu einem Brett

- ▶ Das rechteckige Brett 1 hat die Länge L und die Breite $1,7$ dm.
- ▶ Säge ein rechteckiges Brett derselben Breite so ab, dass dessen Flächeninhalt 3 dm^2 ist.

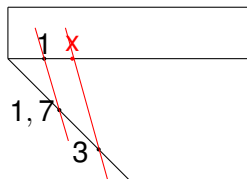


- ▶ Also: Löse die Gleichung

$$1,7 \cdot x = 3.$$

Zwei Aufgaben zu einem Brett

- ▶ Praktische Lösung mit einem Maßstab, einem Lineal und einem Dreieck.



- ▶ Rechnerische Lösung: Löse die Gleichung $1,7 \cdot x = 3$.
Löse zuerst $1,7 \cdot x = 1$, dh.: Berechne die zu $1,7$ *inverse Zahl*,
Schreibweise: $1 : 1,7$ oder $1,7^{-1}$ oder $1/1,7$.
Dann:

$$x = 1,7^{-1} \cdot 1,7 \cdot x = 1,7^{-1} \cdot 3.$$

- ▶ *Division* von 3 durch 1,7 ist Multiplikation von 3 mit $1,7^{-1}$.

Grundvorstellungen DmR

- ▶ Grundvorstellung zur Division mit Rest (DmR): mehrfache Subtraktion (so oft wie möglich).
- ▶ Wer subtrahieren kann, kann auch mit Rest dividieren.
- ▶ Analogie zu „Multiplikation ist mehrfache Addition“
- ▶ Voraussetzungen für die DmR:
 - ▶ Subtraktion
 - ▶ Ordnungsrelation
 - ▶ Ergebnis nach endlich vielen Schritten (daher ist DmR durch 0 nicht möglich)
- ▶ Voraussetzungen in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}_{\geq 0}$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und in Größenbereichen wie Länge, Volumen, Masse, ... erfüllt, nicht erfüllt in $\mathbb{C}$.

Grundvorstellungen Division

- ▶ Grundvorstellung zur Division: Multiplikation mit der inversen Zahl des Divisors, „Umkehrung der Multiplikation“.
- ▶ Wer multiplizieren kann und die zum Divisor inverse Zahl kennt, kann auch dividieren.
- ▶ Analogie zu „Subtraktion ist Umkehrung der Addition“
- ▶ Voraussetzungen für die Division:
 - ▶ Multiplikation
 - ▶ Existenz der zum Divisor inversen Zahl (und Kenntnis derselben)
- ▶ Ordnungsrelation nicht erforderlich.
- ▶ Inverse Zahlen existieren in $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ nur für 0 nicht.
(Die Gleichung $0 \cdot x = 1$ hat keine Lösung, weil $0 \cdot x = 0$ ist).
- ▶ In $\mathbb{N}$ hat nur 1 eine inverse Zahl, daher hat die Division dort keine Bedeutung.

Division mit Rest

Im weiteren nur DmR von natürlichen Zahlen.

(Analog in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und gewissen Größenbereichen).

- ▶ Gegeben zwei natürliche Zahlen c, d mit $d \neq 0$. Gesucht sind zwei natürliche Zahlen q, r so, dass

$$c = q \cdot d + r \text{ und } r < d .$$

q ganzzahliger Quotient und r Rest (von c nach DmR durch d).

- ▶ Algorithmus für DmR: Subtrahiere d solange von c , wie die Differenz nicht negativ ist.
Die Anzahl der Subtraktionen ist der ganzzahlige Quotient q , die letzte nicht negative Differenz ist der Rest r .
- ▶ Wichtig: DmR verbindet die drei „Grundstrukturen“ in $\mathbb{N}$: Addition (+), Multiplikation (·) und Ordnungsrelation (<).

Anwendungen der DmR in der Mathematik

- ▶ Bestimmung der Zifferndarstellung einer natürlichen Zahl
- ▶ Euklidischer Algorithmus: durch mehrfache DmR wird der ggT zweier natürlicher Zahlen berechnet, wichtig zum Kürzen von Bruchzahlen.
- ▶ Erweiterter Euklidischer Algorithmus: zur Berechnung ganzzahliger Lösungen der Gleichung $a \cdot x + b \cdot y = c$ (lösbar, wenn $\text{ggT}(a, b)$ Teiler von c ist), wird z. B. beim RSA-Verfahren für die Verschlüsselung des PIN am Bankomat verwendet.
- ▶ Jedes effiziente Verfahren zum Rechnen mit ganzen Zahlen verwendet DmR, EA oder EEA. Deren gute Implementierung ist für CAS sehr wichtig.

Anwendungen der DmR im Alltag

- ▶ „Messen“ : Wieviele Gläser mit Volumen v können höchstens mit einem Krug Wasser mit Volumen V gefüllt werden?
Wieviel bleibt dann über?
 - ▶ Fülle mit dem Krug so viele Gläser wie möglich (subtrahiere v so oft von V wie möglich).
 - ▶ Der ganzzahlige Quotient ist die Anzahl der gefüllten Gläser, das Volumen des im Krug verbliebenen Wassers ist der Rest.

Anwendungen der DmR im Alltag

- ▶ „Teilen“: Verteile möglichst viele Zuckerln aus einem Sack so auf 7 Kinder, dass jedes Kind gleich viele bekommt. Wieviele bekommt jedes Kind? Wieviele bleiben über?
 - ▶ Nimm so oft je 7 Zuckerln aus dem Sack wie das möglich ist (Messen; mehrfache Subtraktion von 7 von der Anzahl der Zuckerln im Sack).
 - ▶ Gib nach jeder Entnahme jedem Kind ein Zuckerl.
 - ▶ Höre auf, sobald weniger als 7 Zuckerln im Sack sind. Der ganzzahlige Quotient ist die Anzahl der Zuckerln, die jedes Kind bekommen hat. Der Rest ist die Anzahl der Zuckerln, die noch im Sack sind.

Division

- ▶ Eine Zahl c durch eine Zahl $d \neq 0$ *dividieren*, heißt die Gleichung

$$d \cdot x = c$$

lösen (das Produkt zweier Zahlen und ein Faktor sind bekannt, berechne den anderen Faktor)

- ▶ Wenn die Gleichung $d \cdot x = 1$ im betrachteten Zahlbereich eine Lösung hat (also die zu d inverse Zahl d^{-1} existiert), dann hat für jede Zahl c die Gleichung $d \cdot x = c$ eine Lösung, und zwar

$$d^{-1} \cdot c.$$

Diese heißt *Quotient* von c und d , Schreibweise: $c : d$ oder c/d .

- ▶ c durch d dividieren heißt: c mit der zu d inversen Zahl $1/d = d^{-1}$ multiplizieren.

Division

- ▶ Eine Bruchzahl (oder rationale Zahl) $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) hat eine dazu inverse Zahl, wenn ihr Zähler a nicht 0 ist:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = 1.$$

- ▶ Die zu $\frac{a}{b}$ inverse Zahl ist der *Kehrwert* $\frac{b}{a}$.
Durch die Bruchzahl $\frac{a}{b}$ zu dividieren heißt, mit ihrem Kehrwert multiplizieren.
- ▶ Beispiel: Mit welcher Zahl muss man $\frac{11}{2}$ multiplizieren, um $\frac{3}{7}$ zu bekommen?
Antwort: Mit

$$\frac{3}{7} : \frac{11}{2} = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{11} = \frac{6}{77} !$$

Division

- ▶ Jede natürliche Zahl ist eine Bruchzahl: $n = \frac{n}{1}$
- ▶ Sei $n \neq 0$.

$$m : n = \frac{m}{1} : \frac{n}{1} = \frac{m}{1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$$

Diese Division ist erst *nach* der Erweiterung von $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}_{\geq 0}$ möglich. Der Bruchstrich ist *kein* Divisionszeichen!

- ▶ „Doppelbruch“:

$$\frac{\frac{c}{d}}{\frac{a}{b}} := \frac{c}{d} : \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{a} = \frac{c \cdot b}{d \cdot a}$$

Der Strich zwischen den Brüchen ist *kein* Bruchstrich, sondern ein Divisionszeichen.

(Zähler und Nenner von Bruchzahlen sind ganze Zahlen !)

- ▶ Beispiel:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{4}} := \frac{2}{3} : \frac{5}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

Division

- Division von reellen Zahlen, die nicht rationale Zahlen sind:

$$0 \neq z = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}, \text{ wobei } 0 \neq a_n \in \mathbb{Z}, 0 \neq b_n \in \mathbb{Z}$$



$$z^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$$

Division durch z heißt, mit z^{-1} multiplizieren.

- Beispiel:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{8k^2}{4k^2 - 1}$$

(Wallissches Produkt)

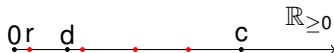


$$\pi^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{4k^2 - 1}{8k^2}$$

Division

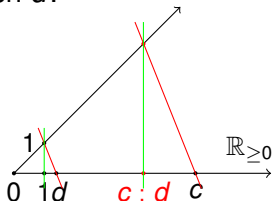
Falls reelle Zahlen als Punkte auf einer Zahlengeraden aufgefasst werden, werden DmR und Division geometrisch angegeben.

- ▶ Seien $c, d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ Punkte der Zahlengeraden.
- ▶ Division mit Rest von c durch d :



$$c = 4 \cdot d + r, \quad r < d$$

- ▶ Division von c durch d :



Division

- Division von komplexen Zahlen:

Sei $a + bi \neq 0$, insbesondere $a^2 + b^2 \neq 0$.



$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R},$$

also ist

$$(a + bi)^{-1} = (a^2 + b^2)^{-1} \cdot a - (a^2 + b^2)^{-1} \cdot bi$$

- Beispiel:

$$(2 + 3i) : (4 + i) = (2 + 3i) \cdot \left(\frac{4}{17} - \frac{1}{17}i\right) = \frac{11}{17} + \frac{10}{17}i$$

Division

- ▶ Welche Frage ist hier sinnvoll?
 - ▶ Wie oft ist $4 + i$ in $2 + 3i$ enthalten?
oder
 - ▶ Mit welcher Zahl muss ich $4 + i$ multiplizieren, um $2 + 3i$ zu erhalten?
- ▶ Unterricht in der Sekundarstufe 1 muss vorausschauen und die richtige Fährte legen: Passen meine Formulierungen und Erklärungen auch für das, was später darauf aufbauen soll?

Division

- ▶ Division von „algebraischen Zahlen“:

- ▶ Sei $a + b\sqrt{2} \neq 0$ und $a, b \in \mathbb{Q}$, dann ist $a^2 - 2 \cdot b^2 \neq 0$.



$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (a - b\sqrt{2}) = a^2 - 2 \cdot b^2 \in \mathbb{Q},$$

also ist

$$(a + b\sqrt{2})^{-1} = (a^2 - 2b^2)^{-1} \cdot a - (a^2 - 2b^2)^{-1} \cdot b\sqrt{2}$$



$$(2 + 3\sqrt{2}) : (4 + \sqrt{2}) = (2 + 3\sqrt{2}) \cdot \left(\frac{4}{14} - \frac{1}{14}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{7} + \frac{5}{7}\sqrt{2}$$

Zifferndarstellung

- ▶ Zu jeder natürlichen Zahl $z > 0$ gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen $n, z_n, \dots, z_1, z_0$ so, dass

$$z = z_n \cdot 10^n + \dots + z_1 \cdot 10^1 + z_0$$

und $0 \leq z_n, \dots, z_1, z_0 < 10, z_n \neq 0$.

- ▶ Schreibweise:

$$z = z_n z_{n-1} \dots z_1 z_0$$

(Dezimal-)Zifferndarstellung von z , z_i i -te (Dezimal-)Ziffer von z

Beispiel: $2025 = 2 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5$

- ▶ Analog mit 2 statt 10: *Binärziffern*, nur 0 und 1

Beispiel: zweitausendfünfundzwanzig =
 $= 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 1 = 11111101001$

Zifferndarstellung

- ▶ Ermittlung der Zifferndarstellung zur Basis 10 bzw. 2 durch mehrfache Division mit Rest durch 10 bzw. 2
- ▶ Beispiel: Die Anzahl der Euro-Münzen in einem Sack sei z . Bestimme Dezimalziffern von z !
 - ▶ Bilde so oft wie möglich Gruppen von je 10 Euro-Münzen. Die Anzahl der übrigbleibenden Münzen ist z_0 .
 - ▶ Bilde so oft wie möglich Gruppen von je 10 „Zehnergruppen“. Die Anzahl der übrigbleibenden Zehnergruppen ist z_1 .
 - ▶ usw.
- ▶ Zur Ermittlung der Binärziffern bilde „Zweiergruppen“.

DmR von Zahlen in Zifferndarstellung

- ▶ Algorithmus für die DmR von natürlichen Zahlen in Zifferndarstellung
- ▶ Grundidee: Kann man d von c q -mal subtrahieren, dann kann man d von $10 \cdot c$ bzw. $100 \cdot c$ bzw. ... mindestens $10 \cdot q$ - mal bzw. $100 \cdot q$ - mal bzw. ... - mal subtrahieren.
- ▶ Grundschrift bei der DmR: DmR mit einstelligem Quotienten (nicht mit einstelligem Divisor!).
- ▶ DmR mit einstelligem Quotienten (Grundschrift, muss zuerst eingeübt werden !): höchstens 9 Subtraktionen oder „Raten und Überprüfen“.

DmR von Zahlen in Zifferndarstellung

- ▶ Beispiel: DmR von 2025 durch 12.

$$2025 = 20 \cdot 100 + 25$$

$$20 = 1 \cdot 12 + 8, \text{ also } 2000 = 100 \cdot 12 + 800 \text{ und}$$

$$2025 = 100 \cdot 12 + 825$$

$$\text{Weiter mit 825 statt 2025: } 825 = 82 \cdot 10 + 5$$

$$82 = 6 \cdot 12 + 10, \text{ also } 820 = 60 \cdot 12 + 100 \text{ und}$$

$$825 = 60 \cdot 12 + 105$$

$$\text{Weiter mit 105: } 105 = 8 \cdot 12 + 9$$

$$2025 = 100 \cdot 12 + 60 \cdot 12 + 8 \cdot 12 + 9 = 168 \cdot 12 + 9$$

- ▶ Dank der Zifferndarstellung: nur 15 anstatt 168 Subtraktionen.
- ▶ In der Volksschule „schriftliche Division“ in platzsparender Schreibweise:

$$2025 : 12 = 168$$

82

105

9 Rest

DmR von Zahlen in Zifferndarstellung

- ▶ Beispiel zur DmR mit durch Binärziffern dargestellte Zahlen:
- ▶ Rechnerisch besonders einfach, weil Grundschrift aus höchstens einer Subtraktion besteht.
Nachteil für Menschen: Zahlen haben (sehr) viele Ziffern.

$$11111101001 : 1100 = 101010001$$

111

1111

110

1101

10

100

1001 Rest

Dezimalzahlen

- ▶ Bruchzahlen (rationale Zahlen), deren Nenner eine Zehnerpotenz (bzw. Zweierpotenz) sein kann, heißen *Dezimalzahlen* (bzw. *Binärzahlen*).

- ▶ Beispiele:

$$\frac{3}{100}, \quad \frac{9987}{1000}, \quad \frac{15}{30} = \frac{5}{10}, \quad \frac{7}{5} = \frac{14}{10}, \quad \frac{3}{8} = \frac{375}{1000}, \quad 79$$

sind Dezimalzahlen,

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{45678}{7000}, \quad \frac{12}{233}$$

sind keine Dezimalzahlen.

- ▶ Eine maximal gekürzte Bruchzahl ist genau dann eine Dezimalzahl, wenn nur 2 oder 5 Primfaktoren ihres Nenners sind.

Dezimalzahlen

- ▶ Platzsparende Schreibweise für Dezimalzahlen (Clavius im 16. Jhd., oder Bianchini im 15. Jhd.):

$$0,03 := \frac{3}{100}, \quad 9,987 := \frac{9987}{1000}, \quad 0,1 := \frac{1}{10}$$

- ▶ Nicht jede Bruchzahl ist eine Dezimalzahl, aber jede Bruchzahl kann beliebig genau durch eine Dezimalzahl angenähert werden.

Dezimalzahlen

- ▶ Gegeben: Eine durch Zähler und Nenner dargestellte positive Bruchzahl $\frac{a}{b}$ und eine natürliche Zahl n .
Berechne eine Dezimalzahl z mit $0 \leq \frac{a}{b} - z < \frac{1}{10^n}$!

- ▶ Division mit Rest von $a \cdot 10^n$ durch b :
 $a \cdot 10^n = q \cdot b + r, r < b$.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot 10^n}{b \cdot 10^n} = \frac{q \cdot b + r}{b \cdot 10^n} = \frac{q \cdot b}{b \cdot 10^n} + \frac{r}{b \cdot 10^n} = \frac{q}{10^n} + \frac{r}{b \cdot 10^n}$$

Die gesuchte Dezimalzahl ist $\frac{q}{10^n}$. Wegen $r < b$ ist
 $\frac{r}{b \cdot 10^n} < \frac{1}{10^n}$.

- ▶ Beispiel: $\frac{a}{b} = \frac{17}{7}, n = 3$.
 $17000 = 2428 \cdot 7 + 4$, also

$$\frac{17}{7} \approx 2,428$$

und $\frac{17}{7} - 2,428 < \frac{1}{1000}$, genauer Fehler $\frac{4}{7000}$.

Dezimalzahlen

- ▶ Summen, Differenzen und Produkte von Dezimalzahlen sind Dezimalzahlen.
- ▶ Die zu einer Dezimalzahl inverse Zahl (ihr Kehrwert) ist nur dann wieder eine Dezimalzahl, wenn nach maximalen Kürzen auch der Zähler nur 2 oder 5 als Primfaktoren hat.
- ▶ Division von Dezimalzahlen:

Der Quotient von Dezimalzahlen ($\neq 0$) ist immer eine Bruchzahl (rationale Zahl), aber nicht immer eine Dezimalzahl.

Er kann aber (mit Hilfe einer DmR) durch eine Dezimalzahl beliebig genau angenähert werden.

Dezimalzahlen

- ▶ Beispiel:

$$0,023 : 45,67 = \frac{23}{1000} : \frac{4567}{100} = \frac{23}{1000} \cdot \frac{100}{4567} = \frac{23}{45670}$$

Exaktes Ergebnis der Division (rationale Zahl, aber nicht Dezimalzahl).

- ▶ Näherung durch eine Dezimalzahl mit Hilfe einer DmR,
 $n = 6$: $23000000 = 503 \cdot 45670 + 27990$, also

$$\frac{23}{45670} \approx \frac{503}{1000000} = 0,000503,$$

Fehler kleiner als 0,000001.

Erweiterungen von DmR und Division

- ▶ DmR in $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{R}_{\geq 0}$ kann auf $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{R}$ erweitert werden.
Nicht einheitlich.

Beispiel: $-17 = (-4) \cdot 4 - 1$ (Betrag des Restes möglichst klein) oder $-17 = (-5) \cdot 4 + 3$ (Rest positiv)

- ▶ DmR für Polynome: mehrfache Subtraktion von geeigneten Vielfachen des Divisors.

c, d Polynome, $d \neq 0$: es gibt Polynome q, r mit
 $c = q \cdot d + r$ und [$r = 0$ oder $\text{grad}(r) < \text{grad}(d)$]

Erweiterungen von DmR und Division

► Beispiel: $c = 3x^3 + x - 1$, $d = x - 2$

$$c - 3x^2 \cdot d = 6x^2 + x - 1$$

$$(6x^2 + x - 1) - 6x \cdot d = 13x - 1$$

$$(13x - 1) - 13 \cdot d = 25$$

$$0 = \text{grad}(25) < \text{grad}(d) = 1$$

Also:

$$c = (3x^2 + 6x + 13) \cdot d + 25$$

Erweiterungen von DmR und Division

- ▶ Division für rationale Funktionen: Multiplikation mit dem Kehrwert
- ▶ Beispiel:

$$\frac{x+1}{x^2+x-1} : \frac{x^3+x}{3x-2} = \frac{(x+1) \cdot (3x-2)}{(x^2+x-1) \cdot (x^3+x)}$$

- ▶ Division für reellwertige Funktionen
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat eine inverse Funktion, wenn sie keine Nullstellen hat.
Zu f inverse Funktion $1/f$ ordnet jeder Zahl x die zu $f(x)$ inverse Zahl $f(x)^{-1} = 1/f(x)$ zu.
- ▶ Beispiel: Exponentialfunktionen sind invertierbar.
 $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\exp_a(x) := a^x$
dazu inverse Funktion (nicht Umkehrfunktion!)
 $1/\exp_a = \exp_{a^{-1}}$ mit $\exp_{a^{-1}}(x) = a^{-x}$.
Division durch $\exp_a$ ist Multiplikation mit $\exp_{a^{-1}}$.

Résumé

- ▶ In $\mathbb{N}$: nur DmR (nur 1 hat inverse Zahl)
 - ▶ DmR ist mehrfache Subtraktion, berechnet *zwei* natürliche Zahlen.
 - ▶ Lösung von $c \cdot x = d$ nur in Sonderfällen (Rest 0) möglich.
 - ▶ Divisionsalgorithmus für Zahlen in Zifferndarstellung, Grundschrift ist DmR mit einstelligem Quotienten
- ▶ In $\mathbb{C}$: nur Division (keine Ordnungsrelation)
 - ▶ Division ist Multiplikation mit der inversen Zahl des Divisors, berechnet *eine* Zahl, die Lösung von $c \cdot x = d$.
 - ▶ alle Zahlen $\neq 0$ haben inverse Zahl, kann leicht ermittelt werden.

Résumé

- ▶ In $\mathbb{Q}$: DmR und Division
 - ▶ DmR (in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$) berechnet durch mehrfache Subtraktion eine natürliche Zahl (ganzzahliger Quotient) und eine rationale Zahl (Rest).
 - ▶ Division ist Multiplikation mit dem Kehrwert des Divisors ($\neq 0$), berechnet die Lösung von $c \cdot x = d$ (*eine* rationale Zahl).
 - ▶ Quotient von Dezimalzahlen ist rationale Zahl, aber im allg. nicht Dezimalzahl.
Durch Zähler und Nenner dargestellte Zahl kann durch DmR (von natürlichen Zahlen) durch Dezimalzahl angenähert werden.
 - ▶ Beispiel:
DmR $0,5 : 3 = 0$ Rest $0,5$,
Division $0,5 : 3 = \frac{1}{6} \approx 0,166$

Literatur

Van Brummelen, G.: Decimal fractional numeration and the decimal point in 15th-century Italy. *Historia Mathematica* 66 (2024), 1-13

Forster, O.: *Analysis 1*. vieweg Verlag, 4. Auflage (1983)

Pauer, F.: Algorithmen und algorithmisches Denken im Mathematikunterricht. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der ÖMG* Nr. 55 (2023), 101-116

Pauer, F.: *Komplexe Zahlen*.

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der ÖMG Nr. 54 (2022), 53-70

Pauer, F., Stampfer, F.: Rationale Zahlen und rationale Funktionen: Was ist ihnen gemeinsam? Wie werden sie dargestellt?

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der ÖMG Nr. 51 (2018), 45-55

Pauer, F.: „Wurzel aus 2“ und „Wurzel aus -1“ - Was ist das und wie rechnet man damit?

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der ÖMG Nr. 41 (2009), 71-84

Pauer, F.: *Division mit Rest - der heimliche Hauptsatz der Algebra*.

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der ÖMG Nr. 37 (2005), 100-111

Pauer, F.: *Algebra und Geometrie im Schulunterricht*. 3. Auflage.

Skriptum. Universität Innsbruck 2019

Danke für die Aufmerksamkeit!

<http://www.uibk.ac.at/mathematik/personal/pauer/>

franz.pauer@uibk.ac.at