Inverse Probleme: Prinzipien und Anwendungen

Univ.Prof.Dipl.-Ing.Dr.techn. Barbara Kaltenbacher

Institut für Mathematik, Universität Klagenfurt

in Kooperation mit:

in Kooperation mit:

Ben Cox, Neb Durić, Anna Fiedler, Stefan Gombots, Jan Hasenauer, Thomas Hegewald, Fred Hofer, Sabrina Hroß, Pedro Jordan, Manfred Kaltenbacher, Reinhard Lerch, Nicole Radde, Rainer Simkovics, Martin Uecker, Fabian Wein, ...

in Kooperation mit:

Ben Cox, Neb Durić, Anna Fiedler, Stefan Gombots, Jan Hasenauer, Thomas Hegewald, Fred Hofer, Sabrina Hroß, Pedro Jordan, Manfred Kaltenbacher, Reinhard Lerch, Nicole Radde, Rainer Simkovics, Martin Uecker, Fabian Wein, ...

Romana Boiger, Rainer Brunnhuber, Stephania Hokenmaier, Truong Huynh, Kha Huynh, Tom Lahmer, Pascal Lehner, Marcus Mohr, Tram Nguyen, Vanja Nikolić, Jonas Offtermatt, Barbara Pedretscher, Teresa Rauscher, Mario Previatti, Anna Schlintl, Peter Steinhorst, Slobodan Veljović, ...

in Kooperation mit:

Ben Cox, Neb Durić, Anna Fiedler, Stefan Gombots, Jan Hasenauer, Thomas Hegewald, Fred Hofer, Sabrina Hroß, Pedro Jordan, Manfred Kaltenbacher, Reinhard Lerch, Nicole Radde, Rainer Simkovics, Martin Uecker, Fabian Wein, ...

Romana Boiger, Rainer Brunnhuber, Stephania Hokenmaier, Truong Huynh, Kha Huynh, Tom Lahmer, Pascal Lehner, Marcus Mohr, Tram Nguyen, Vanja Nikolić, Jonas Offtermatt, Barbara Pedretscher, Teresa Rauscher, Mario Previatti, Anna Schlintl, Peter Steinhorst, Slobodan Veljović, ...

Hans Baumeister, Hend Benameur, Martin Burger, Daniele Cassani, Christian Clason, Heinz W. Engl, Anke Griesbaum, Uno Hämarik, Bernd Hofmann, Michael Hinze, Philipp Hungerländer, Urve Kangro, Kamil Kazimierski, Alana Kirchner, Andrej Klassen, Michael Klibanov, Pavel Krejčí, Irena Lasiecka, Antonio Leitao, Alfredo Lorenzi, Richard Marchand, Gen Nakamura, Andreas Neubauer, Gunther Peichl, Christiane Pöschl, Maria Pospieszalska, Tran Nhan Tam Quyen, Petronela Radu, Stefan Reitzinger, Alexander Ramm, Franz Rendl, Elena Resmerita, William Rundell, Anna-Margarete Sändig, Otmar Scherzer, Josef Schicho, Joachim Schöberl, Frank Schöpfer, Volker Schulz, Thomas Schuster, Igor Shevchenko, Imbo Sim, Mechthild Thalhammer, Ivan Tomba, Boris Vexler, Daniel Wachsmuth, Harro Walk, Michiyuki Watanabe, ...

Überblick

- Was sind inverse Probleme?
- ein klassisches Beispiel: Computertomographie
- ein Beispiel aus der aktuellen Forschung: Ultraschalltomographie
- einige Rechenbeispiele
- einige Anwendungen

Inverse Probleme

direktes Problem:

$$\text{Ursache} \;\rightarrow\; \text{Wirkung}$$

Inverse Probleme

direktes Problem:

$$\text{Ursache} \;\rightarrow\; \text{Wirkung}$$

inverses Problem:

$$\text{Ursache} \;\leftarrow\; \text{Wirkung}$$

Inverse Probleme

direktes Problem:

$$\text{Ursache} \;\rightarrow\; \text{Wirkung}$$

inverses Problem:

$$\text{Ursache} \;\leftarrow\; \text{Wirkung}$$

- Wie kann die Ursache-Wirkung-Abbildung mathematisch beschrieben (modelliert) werden?

Inverse Probleme

direktes Problem:

$$\text{Ursache} \;\rightarrow\; \text{Wirkung}$$

inverses Problem:

$$\text{Ursache} \;\leftarrow\; \text{Wirkung}$$

- Wie kann die Ursache-Wirkung-Abbildung mathematisch beschrieben (modelliert) werden?
- Ist die Ursache eindeutig durch die beobachtete Wirkung bestimmt?

Inverse Probleme

direktes Problem:

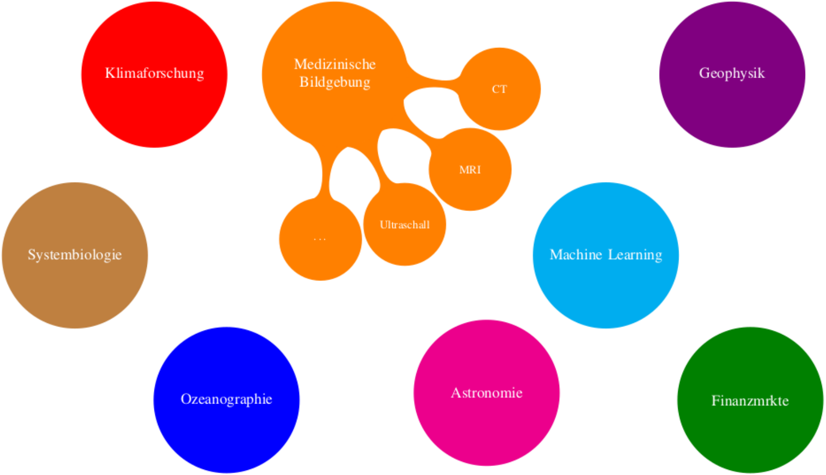
$$\text{Ursache} \;\rightarrow\; \text{Wirkung}$$

inverses Problem:

$$\text{Ursache} \;\leftarrow\; \text{Wirkung}$$

- Wie kann die Ursache-Wirkung-Abbildung mathematisch beschrieben (modelliert) werden?
- Ist die Ursache eindeutig durch die beobachtete Wirkung bestimmt?
- Wie kann ich aus der beobachteten Wirkung die Ursache berechnen?

Inverse Probleme: Anwendungsgebiete



Inverse Probleme: Infotainment

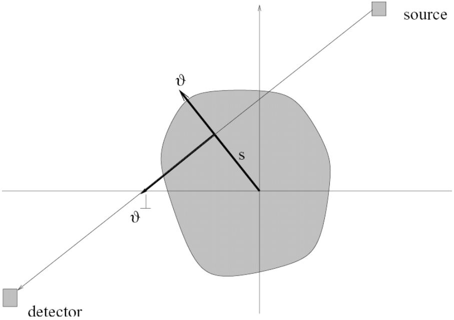
https://www.youtube.com/@professor_sam

Ein klassisches Beispiel

Ein klassisches Beispiel: Computertomographie

Ein klassisches Beispiel: Computertomographie

$$\int_{t_S}^{t_D} \rho(s\vec{\vartheta} + t\vec{\vartheta}^{\perp})dt = -\log\left(\frac{I_{dt}(s,\vec{\vartheta})}{I_{sc}(s,\vec{\vartheta})}\right)$$

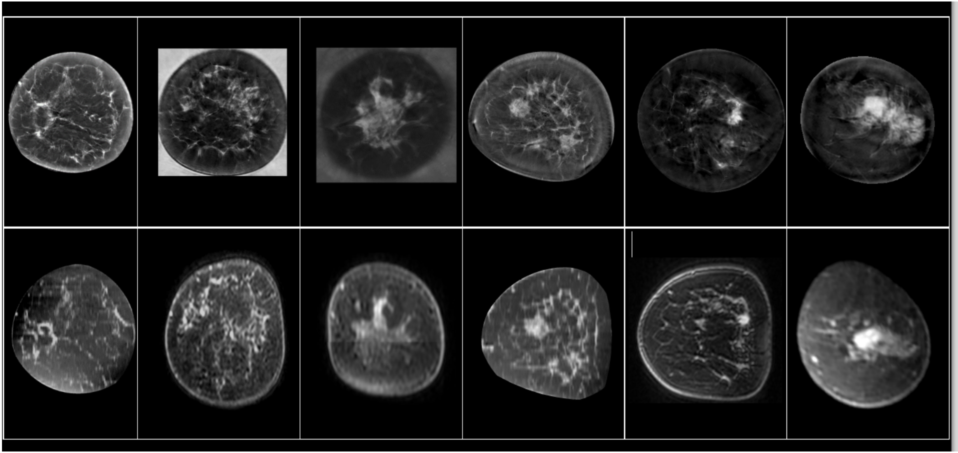


gegeben: Intensitäten I_{dt}, I_{sc} für alle (viele) Richtungen ϑ und Abstände s

gesucht: Dichteverteilung $\rho = \rho(x,y)$

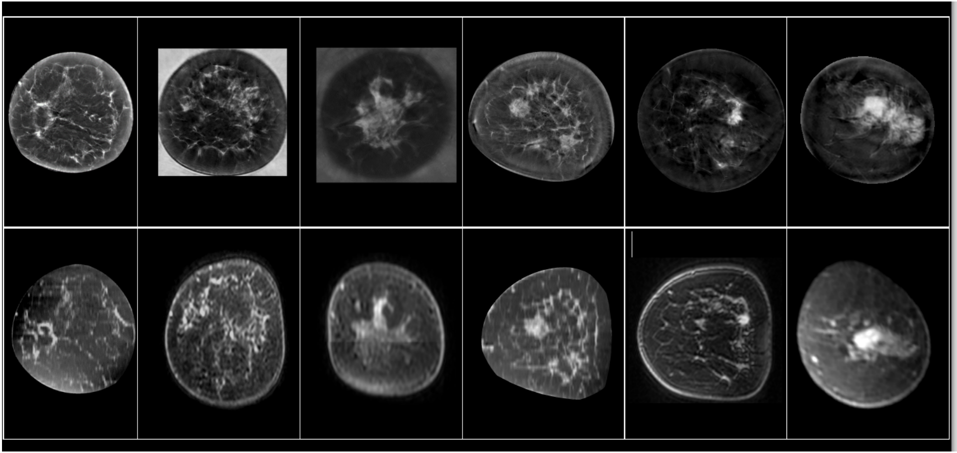
$$\rho \mapsto \int_{t_S}^{t_D} \rho(s\vec{\vartheta} + t\vec{\vartheta}^{\perp})dt \ldots \text{ Radontransformation}$$

Medizinische Bildgebung: andere Modalitäten



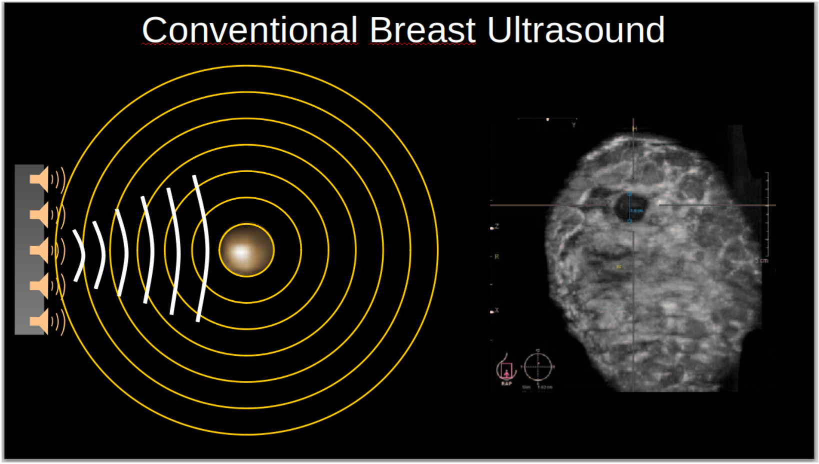
courtesy to Neb Duric, Rochester

UST (ultrasound tomography)

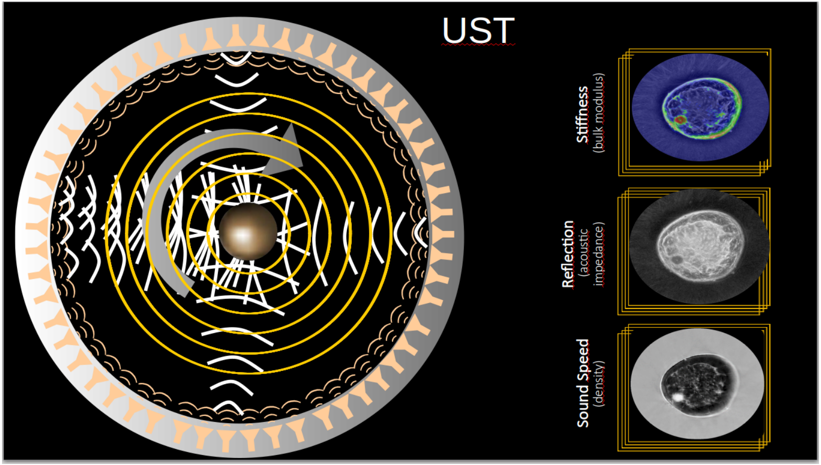


MRI (magnetic resonance tomography)

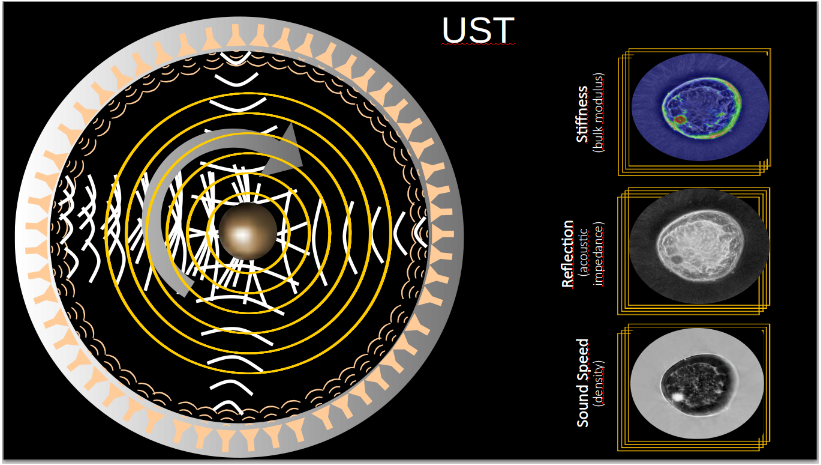
courtesy to Neb Duric, Rochester Univ.



courtesy to Neb Duric, Rochester Univ.



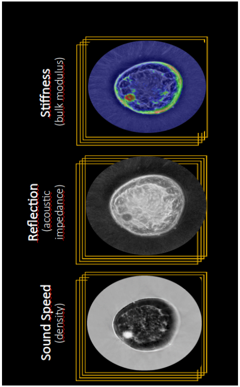
courtesy to Neb Duric, Rochester Univ.



courtesy to Neb Duric, Rochester Univ.

mass density $= \rho$ bulk modulus $= \rho c^2$ acoustic pressure $= p \;= p(x,y,z,t)$
sound speed $= c$ impedance $= \rho c$ source $= s \;= s(x,y,z,t)$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \rho\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\right) = s$$



$$\text{mass density} = \rho = \rho(x, y, z)$$

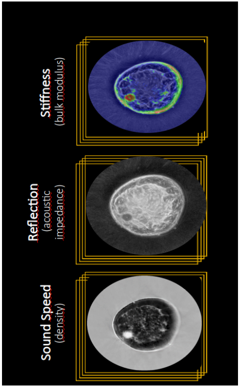
$$\text{sound speed} = c = (x, y, z)$$

$$\text{bulk modulus} = \rho c^2$$

$$\text{impedance} = \rho c$$

$$\text{acoustic pressure} = p \;\; = p(x, y, z, t)$$

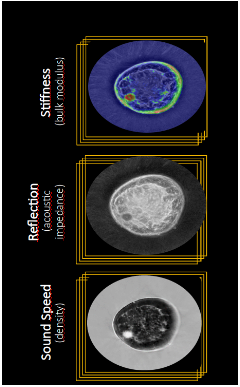
$$\text{source} = s \;\; = s(x, y, z, t)$$



mass density $= \rho = \rho(x,y,z)$
sound speed $= c = (x,y,z)$
bulk modulus $= \rho c^2$
impedance $= \rho c$
acoustic pressure $= p \ = p(x,y,z,t)$
source $= s \ = s(x,y,z,t)$

Mathematisches Modell:
akustische Wellengleichung
(partielle Differentialgleichung für p):

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \rho\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\right) = s$$

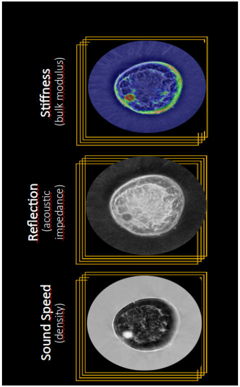


mass density $= \rho = \rho(x, y, z)$
sound speed $= c = (x, y, z)$
bulk modulus $= \rho c^2$
impedance $= \rho c$
acoustic pressure $= p \; = p(x, y, z, t)$
source $= s \; = s(x, y, z, t)$

Mathematisches Modell:
akustische Wellengleichung
(partielle Differentialgleichung für p):

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \rho\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\right) = s$$

Direktes Problem: Simulation der Ultraschallausbreitung bei gegebenen Koeffizienten ρ und c.



mass density $= \rho = \rho(x, y, z)$

sound speed $= c = (x, y, z)$

bulk modulus $= \rho c^2$

impedance $= \rho c$

acoustic pressure $= p \; = p(x, y, z, t)$

source $= s \; = s(x, y, z, t)$

Mathematisches Modell:
akustische Wellengleichung
(partielle Differentialgleichung für p):

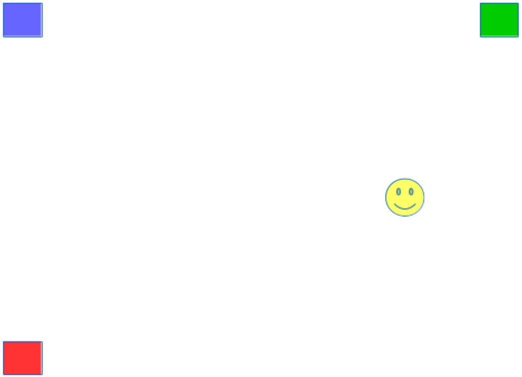
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \rho\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\right) = s$$

Direktes Problem: Simulation der Ultraschallausbreitung bei gegebenen Koeffizienten ρ und c.

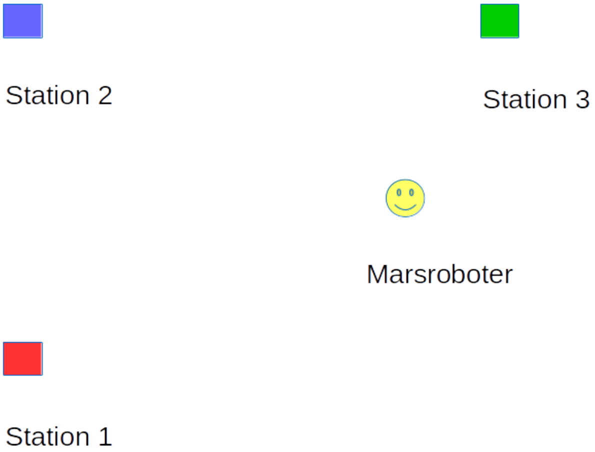
Inverses Problem: Rekonstruktion der Koeffizienten ρ und c aus Messungen von p außerhalb des Körpers.

Einige “Rechenbeispiele”

Selbstortung Marsroboter



Selbstortung Marsroboter



Selbstortung Marsroboter

Stationen senden zu vorgegebenen Zeitpunkten
Signale mit unterschiedlicher Frequenz aus.

Selbstortung Marsroboter

Stationen senden zu vorgegebenen Zeitpunkten Signale mit unterschiedlicher Frequenz aus.

gegeben:

Positionen der Stationen,

c = Schallgeschwindigkeit und

t_1 =Laufzeit des Signals von Station 1 zum Roboter

t_2 =Laufzeit des Signals von Station 2 zum Roboter

t_3 =Laufzeit des Signals von Station 3 zum Roboter

Selbstortung Marsroboter

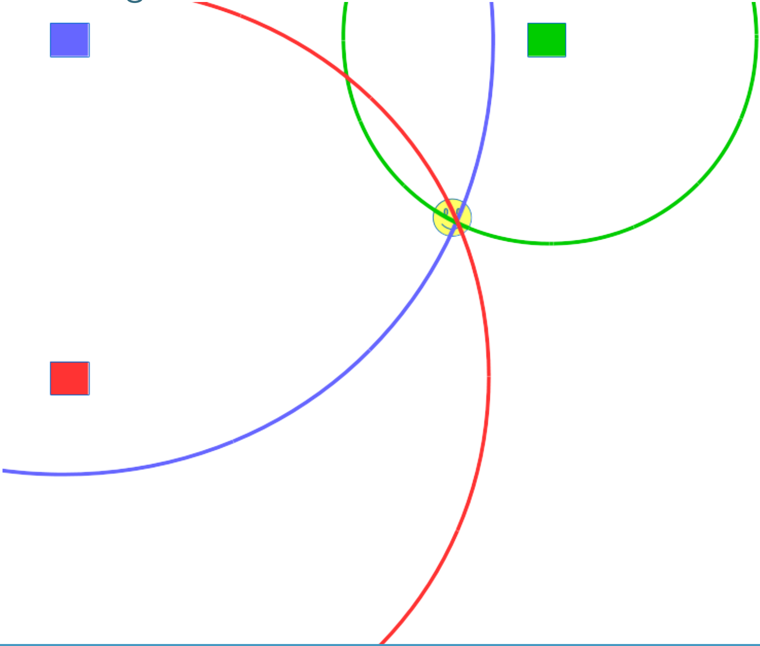
Stationen senden zu vorgegebenen Zeitpunkten Signale mit unterschiedlicher Frequenz aus.

gegeben:

Positionen der Stationen,
c = Schallgeschwindigkeit und
t_1 = Laufzeit des Signals von Station 1 zum Roboter
t_2 = Laufzeit des Signals von Station 2 zum Roboter
t_3 = Laufzeit des Signals von Station 3 zum Roboter

gesucht: Position des Roboters

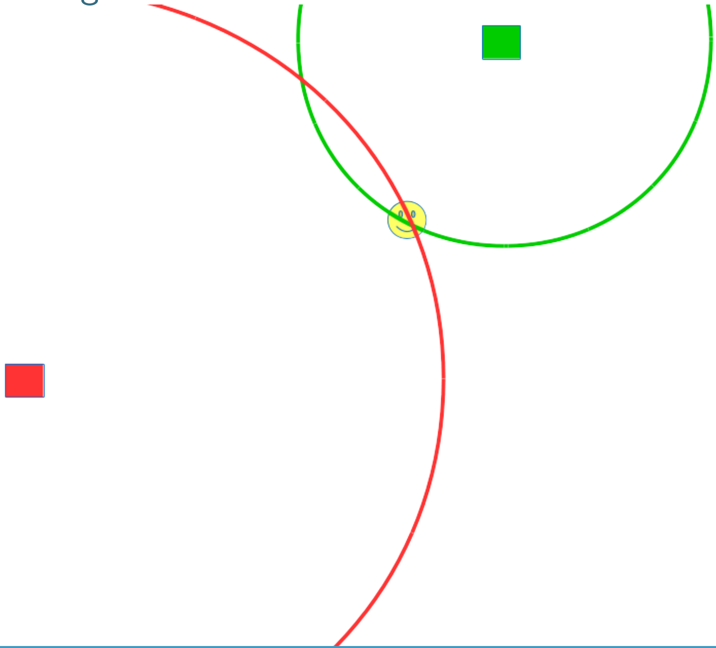
Selbstortung Marsroboter



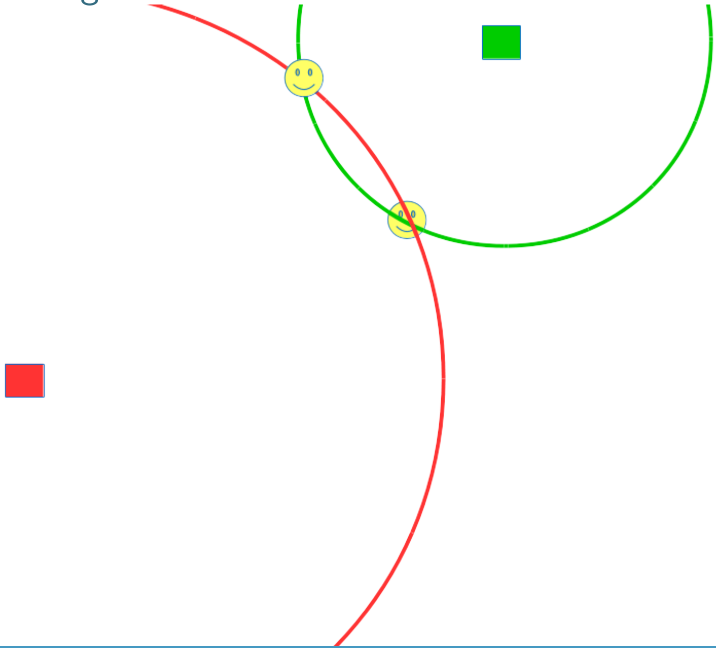
Selbstortung Marsroboter

Kann eine der drei Stationen eingespart werden?

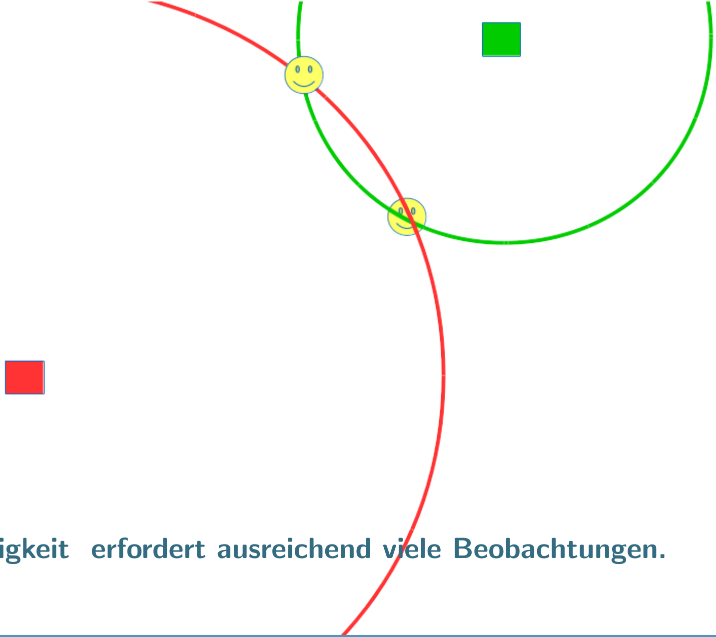
Selbstortung Marsroboter



Selbstortung Marsroboter

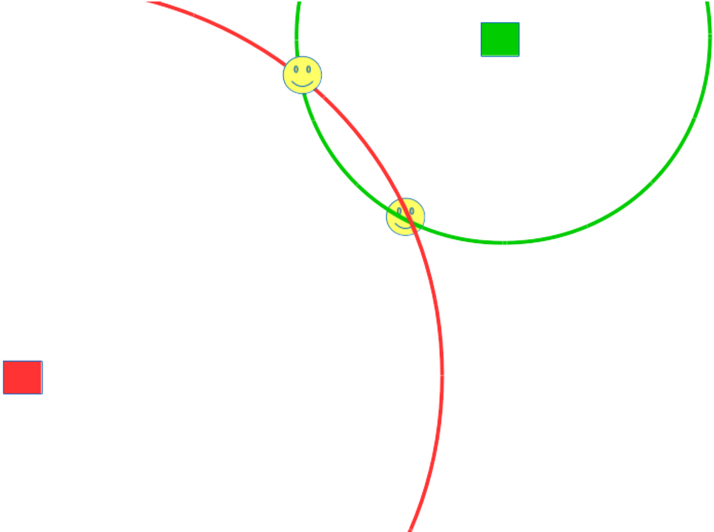


Selbstortung Marsroboter



Eindeutigkeit erfordert ausreichend viele Beobachtungen.

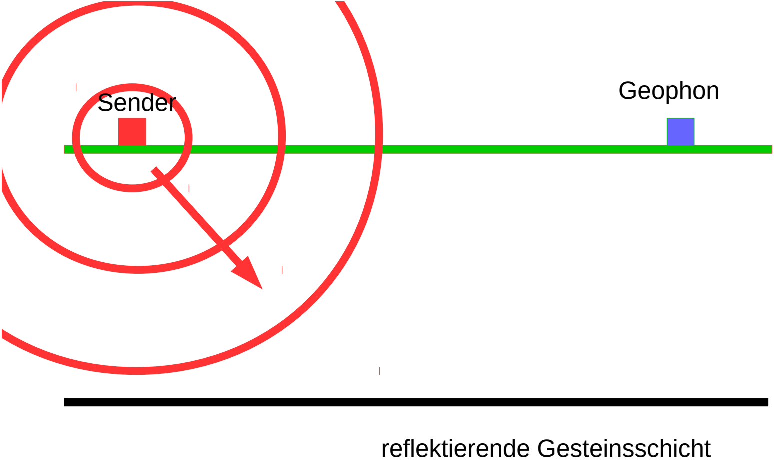
Selbstortung Marsroboter



Eindeutigkeit erfordert ausreichend viele Beobachtungen.

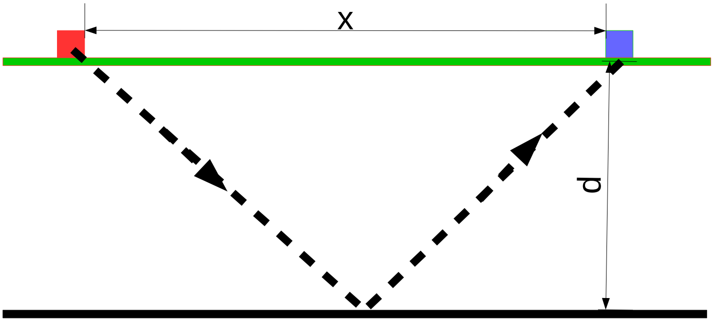
Nachweis der Eindeutigkeit kann mathematisch sehr anspruchsvoll sein.

Geophysikalische Exploration

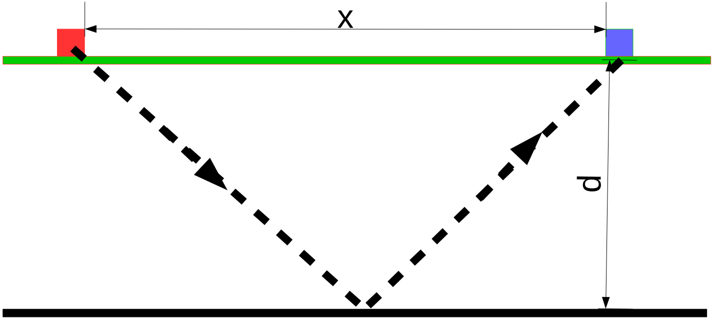


Sender sendet zu vorgegebenem Zeitpunkt Signal aus.

Geophysikalische Exploration



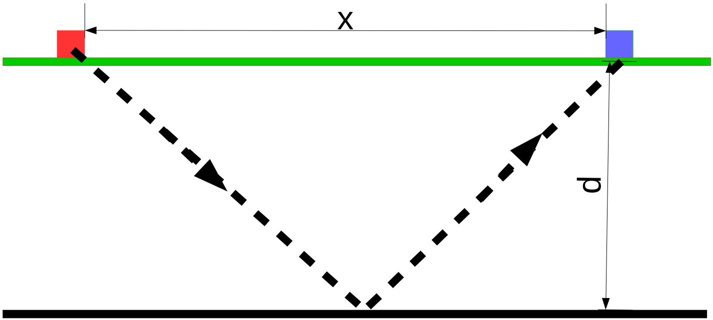
Geophysikalische Exploration



gegeben:

c = Schallgeschwindigkeit
t = Laufzeit des Signals von Sender zu Geophon durch Boden
x = Abstand zwischen Sender und Geophon

Geophysikalische Exploration



gegeben:

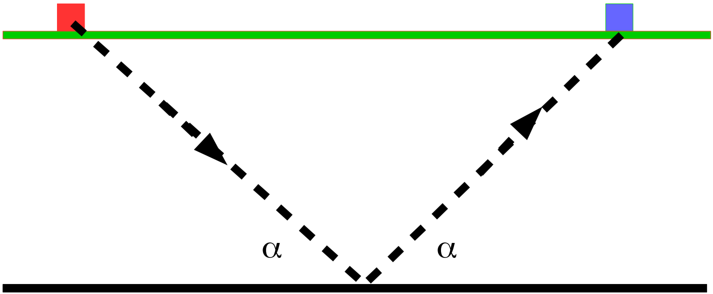
c = Schallgeschwindigkeit

t = Laufzeit des Signals von Sender zu Geophon durch Boden

x = Abstand zwischen Sender und Geophon

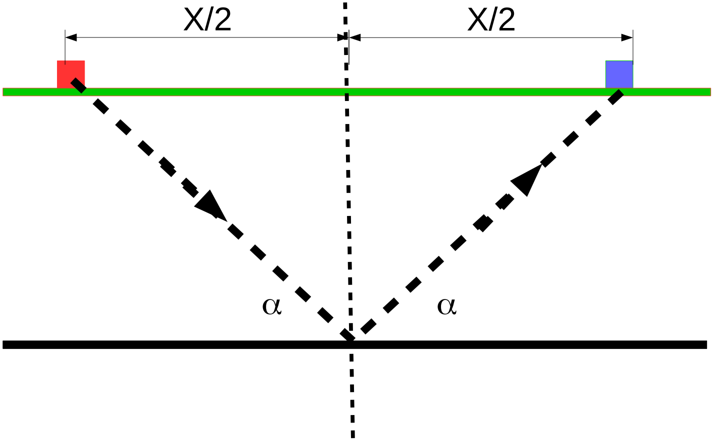
gesucht: Tiefe d bis zur reflektierenden Gesteinsschicht

Geophysikalische Exploration



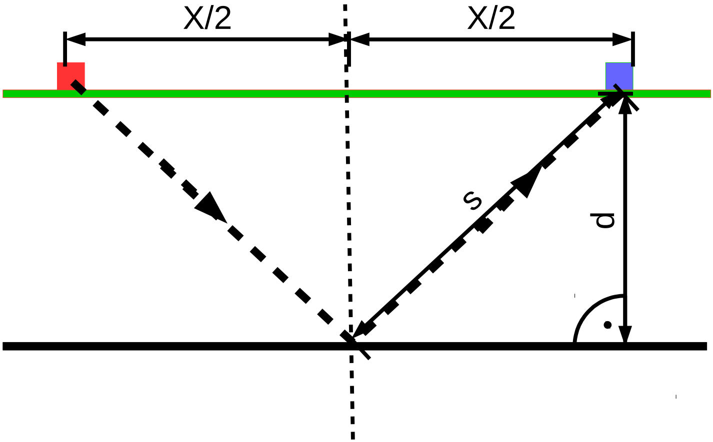
Reflexionsgesetz: Einfallwinkel = Ausfallswinkel

Geophysikalische Exploration



$\Rightarrow$ Symmetrie!

Geophysikalische Exploration



Ein ganz elementares Beispiel: Lösen von Gleichungen

$$\mathbf{2} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{3.98}$$

Ein ganz elementares Beispiel: Lösen von Gleichungen

$\mathbf{2 \cdot x = 3.98}$

Lösung: $x = 1.99$

Ein ganz elementares Beispiel: Lösen von Gleichungen

$\mathbf{2 \cdot x = 3.98}$ $\mathbf{2 \cdot x = 3.96}$

Lösung: $x = 1.99$

Ein ganz elementares Beispiel: Lösen von Gleichungen

$\mathbf{2 \cdot x = 3.98}$ $\mathbf{2 \cdot x = 3.96}$

Lösung: $x = 1.99$ Lösung: $x = 1.98$

Ein ganz elementares Beispiel: Lösen von Gleichungen

$\mathbf{2 \cdot x = 3.98}$

Lösung: $x = 1.99$

$\mathbf{2 \cdot x = 3.96}$

Lösung: $x = 1.98$

Messfehler: 0.02

Ein ganz elementares Beispiel: Lösen von Gleichungen

$\mathbf{2} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{3.98}$

Lösung: $x = 1.99$

$\mathbf{2} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{3.96}$

Lösung: $x = 1.98$

Messfehler: 0.02

Fehler in x: 0.01

Ein ganz elementares Beispiel: Lösen von Gleichungen

$\mathbf{2 \cdot x = 3.98}$

Lösung: $x = 1.99$

$\mathbf{2 \cdot x = 3.96}$

Lösung: $x = 1.98$

Messfehler: 0.02

Fehler in x: 0.01

$\mathbf{0.002 \cdot x = 3.98}$

Ein ganz elementares Beispiel: Lösen von Gleichungen

$\mathbf{2 \cdot x = 3.98}$

Lösung: $x = 1.99$

$\mathbf{2 \cdot x = 3.96}$

Lösung: $x = 1.98$

Messfehler: 0.02

Fehler in x: 0.01

$\mathbf{0.002 \cdot x = 3.98}$

Lösung: $x = 1990$

Ein ganz elementares Beispiel: Lösen von Gleichungen

$\mathbf{2 \cdot x = 3.98}$

Lösung: $x = 1.99$

$\mathbf{2 \cdot x = 3.96}$

Lösung: $x = 1.98$

Messfehler: 0.02

Fehler in x: 0.01

$\mathbf{0.002 \cdot x = 3.98}$

Lösung: $x = 1990$

$\mathbf{0.002 \cdot x = 3.96}$

Ein ganz elementares Beispiel: Lösen von Gleichungen

$\mathbf{2 \cdot x = 3.98}$

Lösung: $x = 1.99$

$\mathbf{2 \cdot x = 3.96}$

Lösung: $x = 1.98$

Messfehler: 0.02

Fehler in x: 0.01

$\mathbf{0.002 \cdot x = 3.98}$

Lösung: $x = 1990$

$\mathbf{0.002 \cdot x = 3.96}$

Lösung: $x = 1980$

Ein ganz elementares Beispiel: Lösen von Gleichungen

$\mathbf{2 \cdot x = 3.98}$

Lösung: $x = 1.99$

$\mathbf{2 \cdot x = 3.96}$

Lösung: $x = 1.98$

Messfehler: 0.02

Fehler in x: 0.01

$\mathbf{0.002 \cdot x = 3.98}$

Lösung: $x = 1990$

$\mathbf{0.002 \cdot x = 3.96}$

Lösung: $x = 1980$

Messfehler: 0.02

Ein ganz elementares Beispiel: Lösen von Gleichungen

$\mathbf{2 \cdot x = 3.98}$

Lösung: $x = 1.99$

$\mathbf{2 \cdot x = 3.96}$

Lösung: $x = 1.98$

Messfehler: 0.02

Fehler in x: 0.01

$\mathbf{0.002 \cdot x = 3.98}$

Lösung: $x = 1990$

$\mathbf{0.002 \cdot x = 3.96}$

Lösung: $x = 1980$

Messfehler: 0.02

Fehler in x: 10

geringere Sensitivität des Messverfahrens
$\Rightarrow$ Messfehler wirken sich stärker aus

Lösen von Gleichungssytemen

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \mathbf{2} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

Lösen von Gleichungssytemen

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \mathbf{2} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

Lösung: $x = 1,$
$y = 1$

Lösen von Gleichungssytemen

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \mathbf{2} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{1} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \mathbf{1.93} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{1.07} \end{aligned}$$

Lösung: $x = 1$,
$y = 1$

Lösen von Gleichungssytemen

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \mathbf{2} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

Lösung: $\begin{aligned} x &= 1, \\ y &= 1 \end{aligned}$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \mathbf{1.93} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{1.07} \end{aligned}$$

Lösung: $\begin{aligned} x &= 0.86, \\ y &= 1.07 \end{aligned}$

Lösen von Gleichungssytemen

$$\mathbf{x + y = 2}$$
$$\mathbf{y = 1}$$

Lösung: $x = 1$,
$y = 1$

$$\mathbf{x + y = 1.93}$$
$$\mathbf{y = 1.07}$$

Lösung: $x = 0.86$,
$y = 1.07$

Messfehler: 0.07
Messfehler: 0.07

Lösen von Gleichungssytemen

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \mathbf{2} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

Lösung: $x = 1$,
$y = 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \mathbf{1.93} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{1.07} \end{aligned}$$

Lösung: $x = 0.86$,
$y = 1.07$

Messfehler: 0.07
Messfehler: 0.07

Fehler in x: 0.14
Fehler in y: 0.07

Lösen von Gleichungssytemen

$$\begin{aligned}\mathbf{x}+\mathbf{y}&=\mathbf{2}\\ \mathbf{y}&=\mathbf{1}\end{aligned}$$

Lösung: $x = 1$,
$y = 1$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}+\mathbf{y}&=\mathbf{1.93}\\ \mathbf{y}&=\mathbf{1.07}\end{aligned}$$

Lösung: $x = 0.86$,
$y = 1.07$

Messfehler: 0.07
Messfehler: 0.07

Fehler in x: 0.14
Fehler in y: 0.07

$$\begin{aligned}\mathbf{x}+\mathbf{y}&=\mathbf{2}\\ \mathbf{0.9}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{y}&=\mathbf{1.9}\end{aligned}$$

Lösen von Gleichungssytemen

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \mathbf{2} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

Lösung: $x = 1,$
$y = 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \mathbf{1.93} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{1.07} \end{aligned}$$

Lösung: $x = 0.86,$
$y = 1.07$

Messfehler: 0.07
Messfehler: 0.07

Fehler in x: 0.14
Fehler in y: 0.07

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \mathbf{2} \\ \mathbf{0.9} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \mathbf{1.9} \end{aligned}$$

Lösung: $x = 1,$
$y = 1$

Lösen von Gleichungssytemen

$$\begin{aligned}\mathbf{x+y} &= \mathbf{2}\\ \mathbf{y} &= \mathbf{1}\end{aligned}$$

Lösung: $x = 1$,
$y = 1$

$$\begin{aligned}\mathbf{x+y} &= \mathbf{1.93}\\ \mathbf{y} &= \mathbf{1.07}\end{aligned}$$

Lösung: $x = 0.86$,
$y = 1.07$

Messfehler: 0.07
Messfehler: 0.07

Fehler in x: 0.14
Fehler in y: 0.07

$$\begin{aligned}\mathbf{x+y} &= \mathbf{2}\\ \mathbf{0.9 \cdot x + y} &= \mathbf{1.9}\end{aligned}$$

Lösung: $x = 1$,
$y = 1$

$$\begin{aligned}\mathbf{x+y} &= \mathbf{1.93}\\ \mathbf{0.9 \cdot x + y} &= \mathbf{1.97}\end{aligned}$$

Lösen von Gleichungssytemen

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \mathbf{2} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

Lösung: $x = 1$,
$y = 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \mathbf{1.93} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{1.07} \end{aligned}$$

Lösung: $x = 0.86$,
$y = 1.07$

Messfehler: 0.07
Messfehler: 0.07

Fehler in x: 0.14
Fehler in y: 0.07

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \mathbf{2} \\ \mathbf{0.9} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \mathbf{1.9} \end{aligned}$$

Lösung: $x = 1$,
$y = 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \mathbf{1.93} \\ \mathbf{0.9} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \mathbf{1.97} \end{aligned}$$

Lösung: $x = -0.4$,
$y = 2.33$

Lösen von Gleichungssytemen

$$\begin{aligned}\mathbf{x}+\mathbf{y}&=\mathbf{2}\\ \mathbf{y}&=\mathbf{1}\end{aligned}$$

Lösung: $x = 1,$
$y = 1$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}+\mathbf{y}&=\mathbf{1.93}\\ \mathbf{y}&=\mathbf{1.07}\end{aligned}$$

Lösung: $x = 0.86,$
$y = 1.07$

Messfehler: 0.07
Messfehler: 0.07

Fehler in x: 0.14
Fehler in y: 0.07

$$\begin{aligned}\mathbf{x}+\mathbf{y}&=\mathbf{2}\\ \mathbf{0.9}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{y}&=\mathbf{1.9}\end{aligned}$$

Lösung: $x = 1,$
$y = 1$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}+\mathbf{y}&=\mathbf{1.93}\\ \mathbf{0.9}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{y}&=\mathbf{1.97}\end{aligned}$$

Lösung: $x = -0.4,$
$y = 2.33$

Messfehler: 0.07
Messfehler: 0.07

Lösen von Gleichungssytemen

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{2} \qquad \mathbf{y} = \mathbf{1}$$

Lösung: $x = 1$, $y = 1$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{1.93} \qquad \mathbf{y} = \mathbf{1.07}$$

Lösung: $x = 0.86$, $y = 1.07$

Messfehler: 0.07
Messfehler: 0.07

Fehler in x: 0.14
Fehler in y: 0.07

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{2} \qquad \mathbf{0.9} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{1.9}$$

Lösung: $x = 1$, $y = 1$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{1.93} \qquad \mathbf{0.9} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{1.97}$$

Lösung: $x = -0.4$, $y = 2.33$

Messfehler: 0.07
Messfehler: 0.07

Fehler in x: 1.4
Fehler in y: 1.33

Über 100% Fehler in x und y!

Lösen von Gleichungssytemen

$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{2}$ $\mathbf{y} = \mathbf{1}$	$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{1.93}$ $\mathbf{y} = \mathbf{1.07}$	Messfehler: 0.07 Messfehler: 0.07
Lösung: $x = 1$, $y = 1$	Lösung: $x = 0.86$, $y = 1.07$	Fehler in x: 0.14 Fehler in y: 0.07
$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{2}$ $\mathbf{0.9} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{1.9}$	$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{1.93}$ $\mathbf{0.9} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{1.97}$	Messfehler: 0.07 Messfehler: 0.07
Lösung: $x = 1$, $y = 1$	Lösung: $x = -0.4$, $y = 2.33$	Fehler in x: 1.4 Fehler in y: 1.33

Über 100% Fehler in x und y!

Kleine Messfehler können zu großen Abweichungen in der Rekonstruktion führen

Lösen von Gleichungssytemen

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{2}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{1}$$

Lösung: $x = 1$,
$y = 1$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{1.93}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{1.07}$$

Lösung: $x = 0.86$,
$y = 1.07$

Messfehler: 0.07
Messfehler: 0.07

Fehler in x: 0.14
Fehler in y: 0.07

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{2}$$
$$\mathbf{0.9} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{1.9}$$

Lösung: $x = 1$,
$y = 1$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{1.93}$$
$$\mathbf{0.9} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{1.97}$$

Lösung: $x = -0.4$,
$y = 2.33$

Messfehler: 0.07
Messfehler: 0.07

Fehler in x: 1.4
Fehler in y: 1.33

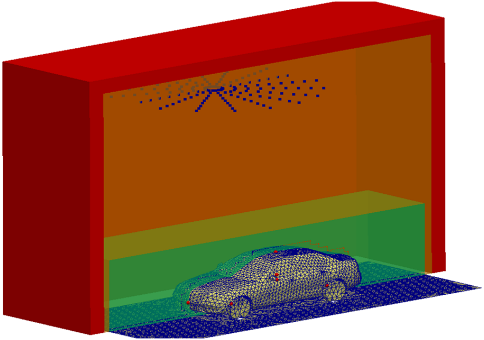
Über 100% Fehler in x und y!

Kleine Messfehler können zu großen Abweichungen in der Rekonstruktion führen

Inverse Probleme erfordern spezielle Rechenverfahren: Regularisierung

Einige Anwendungsbeispiele

Strömungslärm



Mathematisches Modell:

Wechselwirkungen Strömung – Akustik

beschrieben durch *partielle Differentialgleichungen*

Strömungslärm

Direktes Problem:
Wirbelbildung $\rightarrow$ Schallausbreitung

Strömungslärm

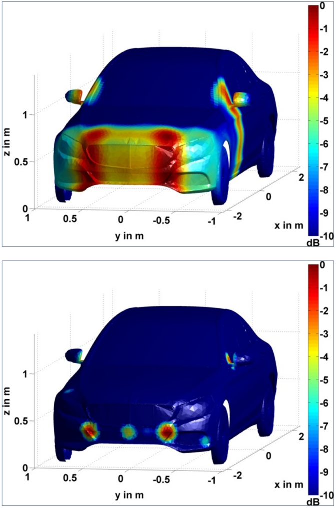
Direktes Problem:
Wirbelbildung $\rightarrow$ Schallausbreitung

Inverses Problem:
Mikrofonmessungen des Schalldrucks $\rightarrow$
Lokalisation der Wirbel

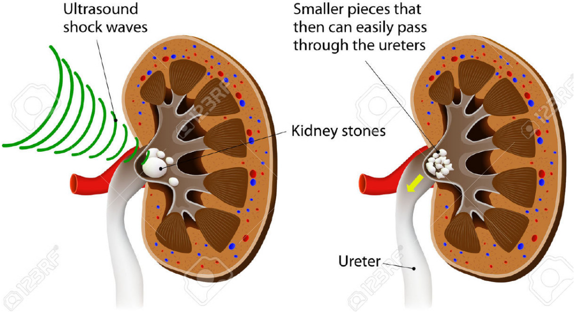
Strömungslärm

Direktes Problem:
Wirbelbildung $\rightarrow$ Schallausbreitung

Inverses Problem:
Mikrofonmessungen des Schalldrucks $\rightarrow$
Lokalisation der Wirbel

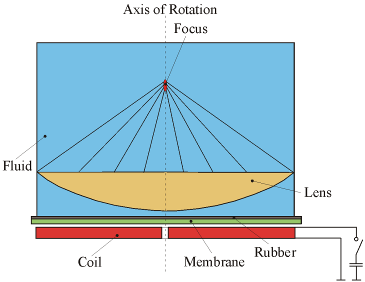


Nierensteinzertrümmerung



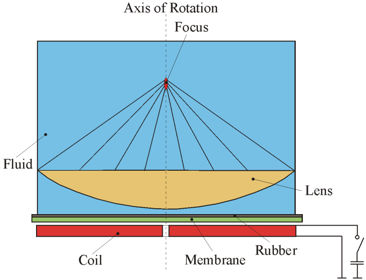
extracorporeal shock wave lithotripsy (ESWL)

Nierensteinzertrümmerung



electromagnetic shock
wave emitter (EMSE)
Dornier MedTech

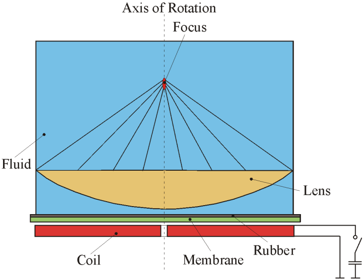
Nierensteinzertrümmerung



electromagnetic shock
wave emitter (EMSE)
Dornier MedTech

Direktes Problem:
Linsenform $\rightarrow$ Schallausbreitung

Nierensteinzertrümmerung

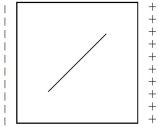


electromagnetic shock
wave emitter (EMSE)
Dornier MedTech

Direktes Problem:
Linsenform $\rightarrow$ Schallausbreitung

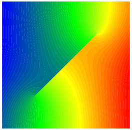
Inverses Problem:
gewünschter Schallfokus $\rightarrow$
Linsenform

Identifikation von Rissen in Piezokeramiken

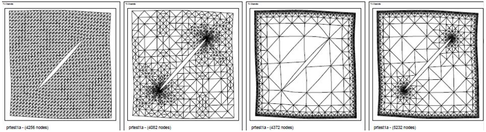


Strom-Spannungsmessungen
an Elektoden

→ Lokalisierung von Rissen in piezoelektrischen Bauteilen aus Oberflächenmessungen (zerstörungsfreie Werkstoffprüfung)



Potenzialverteilung
im Material mit Riss

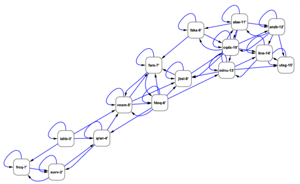


adaptive Diskretisierung

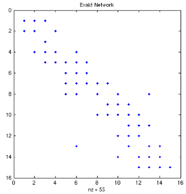
- DFG Projekt mit Anna-Margarete Sändig, Universität Stuttgart

Parameter Identifikation in der Systembiologie

→ Identifikation von Gennetzwerken (Aktivierung/Hemmung)



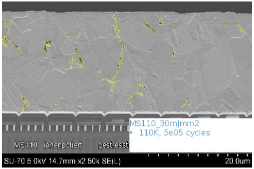
Gennetzwerk



Abhängigkeitsmatrix

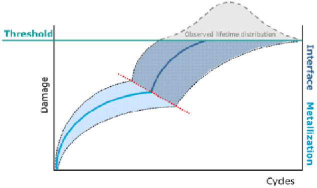
- Projekt im Excellenzcluster *SimTech* mit Nicole Radde, Univ. Stuttgart
- Kooperation mit Jan Hasenauer, Helmholtz-Zentrum München/ Univ. Bonn

Degradationsmodelle für Leistungshalbleiter



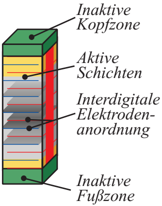
Modellierung der Bildung und Ausbreitung von Rissen im Elektrodenmaterial unter zyklischer Belastung,. . .

. . . um zuverlässige Vorhersagen über *safe operating area* zu machen

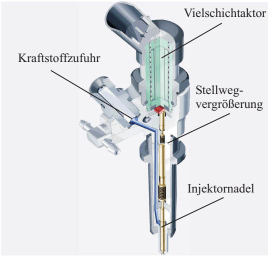


- Projekt mit Kompetenzzentrum Automobil- u. Industrieelektronik GmbH
- Kooperation mit Infineon Villach

Piezoelektrischer Stapelwandler



Einspritzventil Common-Rail Diesel Motor



→ Identifikation
der Materialparameter

- DFG *Emmy Noether* Nachwuchsforschergruppe *Inverse Probleme in der Piezoelektrizität*, Universität Erlangen
- Kooperation mit CeramTec, Lauf

Danke für Ihre/Eure Aufmerksamkeit!