Hans Humenberger

Modellieren und Optimieren bei Schaukeln und schwingenden Affen

Fachlicher Hintergrund

- **Flugparabel**
  Physik, Aufspalten einer Bewegung in eine Horizontal- und eine Vertikalkomponente, quadratische Funktion, Scheitel, Basketball-Freiwürfe, Fußballabstoß (ohne Luftwiderstand)

- **Kreisbewegungen**
  Schaukel, Pendel

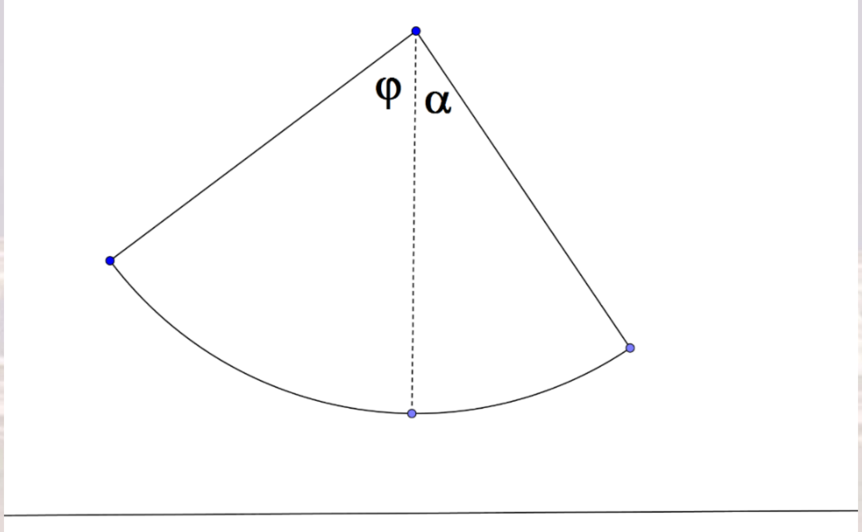
Schaukelweitsprung

Wann abspringen, um möglichst weit zu kommen?

Kinder lernen das intuitiv, aber man kann auch mathematische Überlegungen anstellen . . .

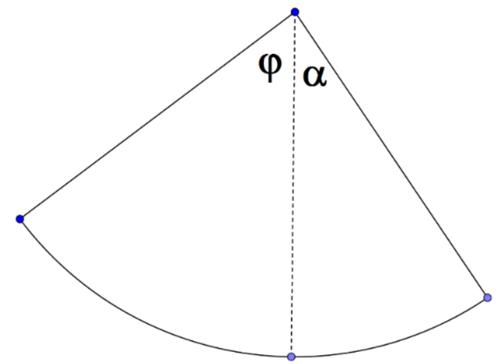
Schaukeln: Auslenkwinkel

- Kinder müssen das *Schwungholen* lernen:
  aktive Vergrößerung der Auslenkwinkel, nach hinten und vorne
- Beim letzten *Durchgang* keine aktive Beschleunigung mehr
- Optimaler Absprungwinkel α bei geg. Auslenkwinkel φ gesucht, a priori klar: $\alpha_{\text{opt}} \neq 0, \ \alpha_{\text{opt}} \neq \varphi$



$$0 \leq \alpha \leq \varphi$$

Schätzung, Fragen



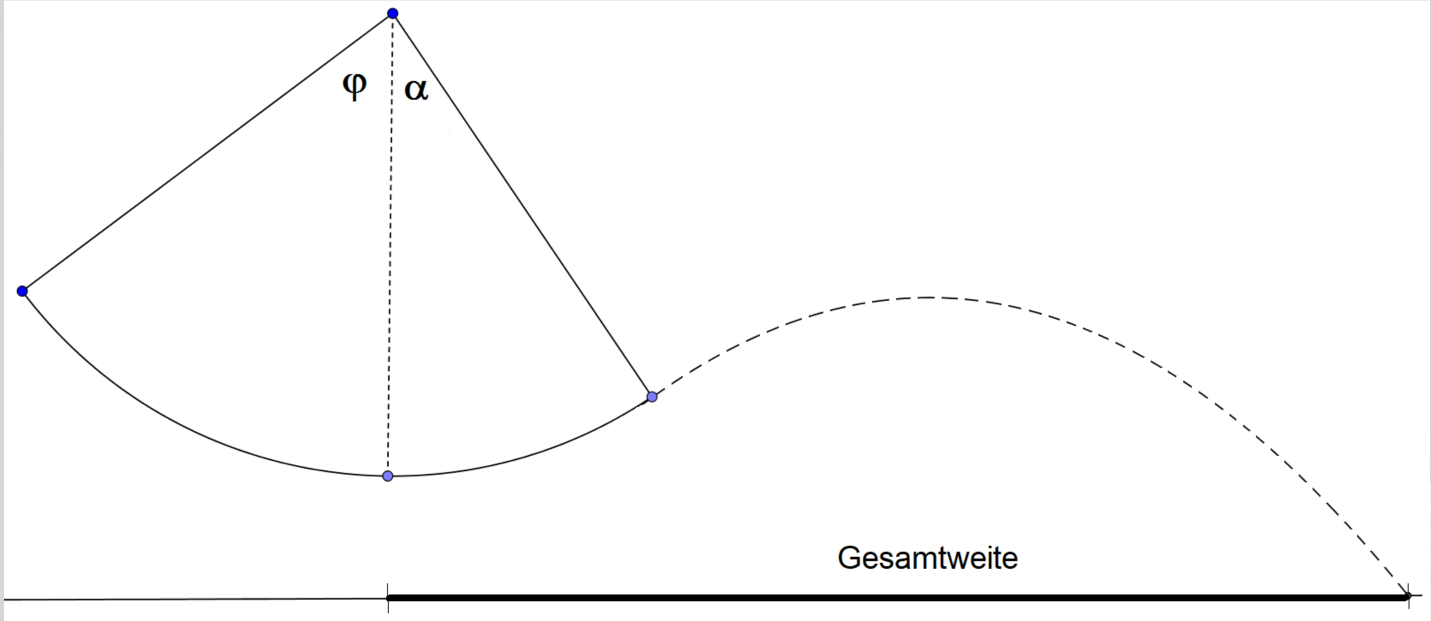
Erste Schätzung: $\alpha_{\mathrm{opt}} \approx \dfrac{\varphi}{2}$

- Wie gut wäre diese Schätzung als Faustregel?
- Liegt man mit $\frac{\varphi}{2}$ eher unter oder über dem genauen Wert von α_{opt} ?
- Gibt es Fälle, in denen $\alpha_{\mathrm{opt}} = \dfrac{\varphi}{2}$ genau stimmt?

→ Mathematische Analyse, *Mathematisierieren* (Teil des Mod.prozesses)

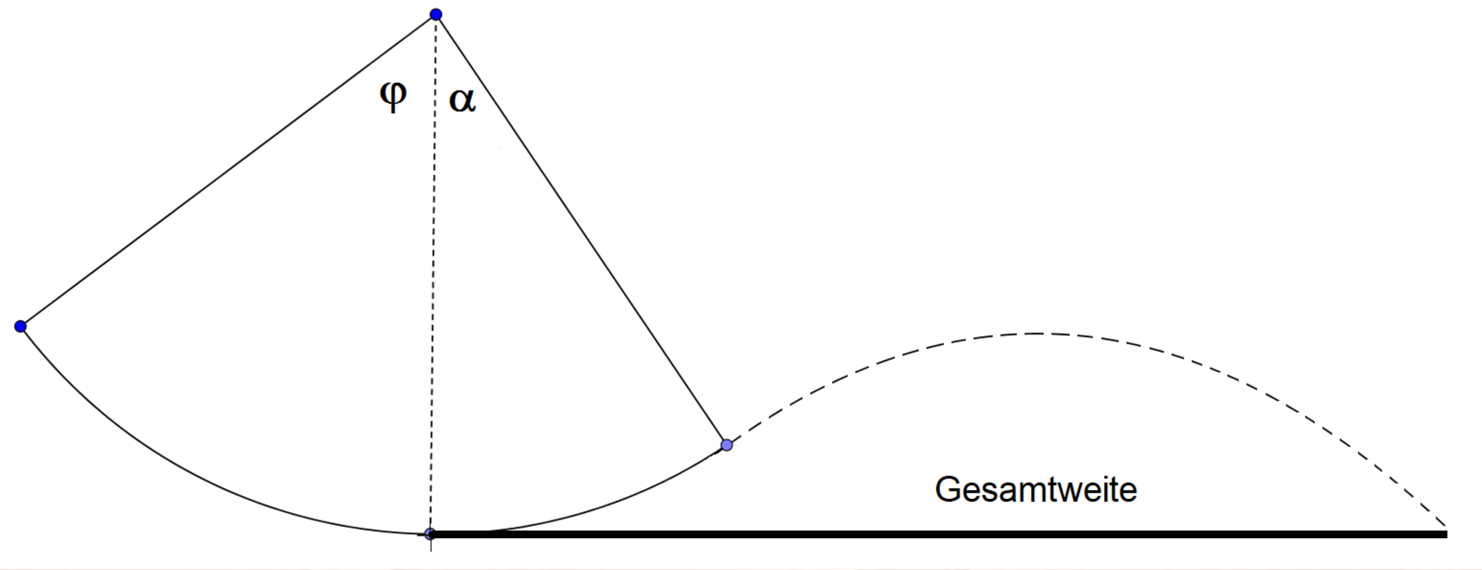
Vereinfachungen (Idealisierungen, bei allen Mod.-kreisläufen):
-) kein Luftwiderstand
-) menschlicher Körper reduziert auf seinen Schwerpunkt . . .

Nach *Pendelbewegung* (Schaukel, Kreis) kommt eine *Flugphase* (*Flugparabel*), Gesamtweite soll maximal sein



Hier landet der Schwerpunkt am Boden, in Wirklichkeit ja nicht . . .

Verbesserte Situationsskizze:
Schwerpunkt beim Landen ungefähr auf jener Höhe, wie wenn man am ruhenden Schaukelbrett sitzt; näherungsweise auf *Höhe Schaukelbrett*

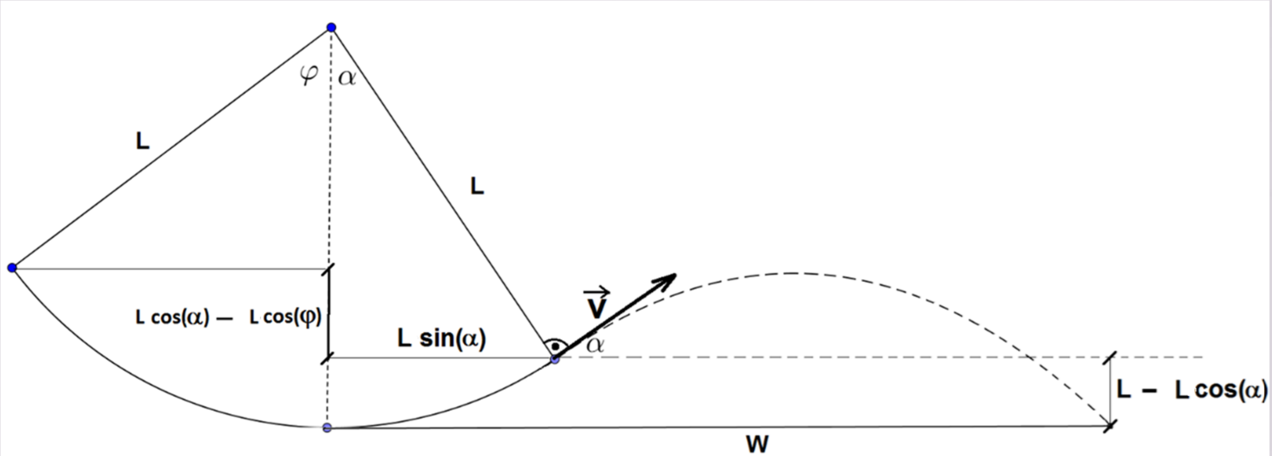


In Wirklichkeit:
Gesamtweite am Boden gemessen, im Bild nur „hinaufgeschoben“

W soll maximiert werden!

Man braucht W als Funktion von L, φ (fest, Parameter) und α (Variable) – anspruchsvolle Aufgabe

(L = Abstand des Schwerpunktes von der Schaukeldrehachse)



1. Stück: $L\sin(\alpha)$

Absprunggeschwindigkeit: Richtung klar, Betrag $v := |\vec{v}|$?

Kinetische Energie kommt vom Verlust potentieller Energie:

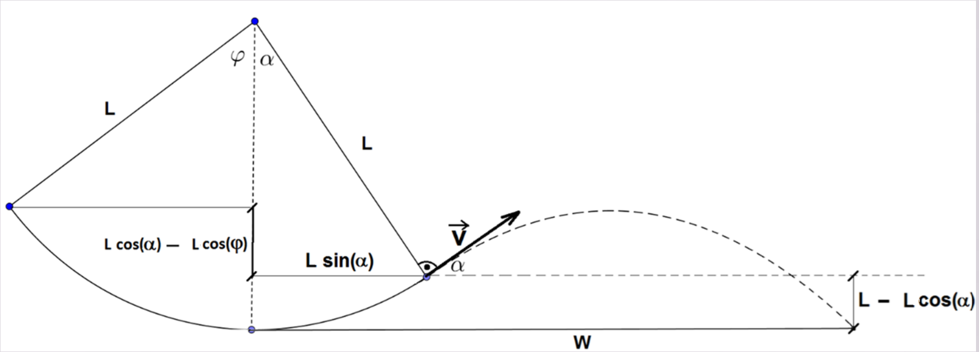
$$\frac{mv^2}{2} = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh} \qquad h = L\cos(\alpha) - L\cos(\varphi)$$

$$v = \sqrt{2gL\left(\cos(\alpha) - \cos(\varphi)\right)}$$

$$v=\sqrt{2gL\left(\cos(\alpha)-\cos(\varphi)\right)}$$

Gleichung der Wurfparabel
(Beginn in (0 | 0)):

$$y(x)=\tan(\alpha)x-\frac{g}{2v^2\cos^2(\alpha)}x^2$$



Daraus jene Weite x berechnen, die zur *negativen* Höhe $L\cos(\alpha)-L=L\left(\cos(\alpha)-1\right)$ führt:

$$L\left(\cos(\alpha)-1\right)=\tan(\alpha)x-\frac{g}{2v^2\cos^2(\alpha)}x^2$$

Quadratische Gleichung in x, mit CAS gelöst (pos. Lösung relevant):

$$x=\frac{v^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g}+\frac{v\cos(\alpha)}{g}\sqrt{v^2\sin^2(\alpha)-2Lg\cos(\alpha)+2Lg}$$

$$W=\frac{v^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g}+\frac{v\cos(\alpha)}{g}\sqrt{v^2\sin^2(\alpha)-2Lg\cos(\alpha)+2Lg}+L\sin(\alpha)$$

$$W = \frac{v^2 \sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g} + \frac{v\cos(\alpha)}{g}\sqrt{v^2 \sin^2(\alpha) - 2Lg\cos(\alpha) + 2Lg} + L\sin(\alpha)$$

Hier noch einsetzen (CAS): $v = \sqrt{2gL\left(\cos(\alpha) - \cos(\varphi)\right)}$

Wenig Chancen, die Nullstelle der 1. Ableitung geschlossen zu finden . . .
Auf die 2. Ableitung wird man verzichten, Graphen zeichnen reicht

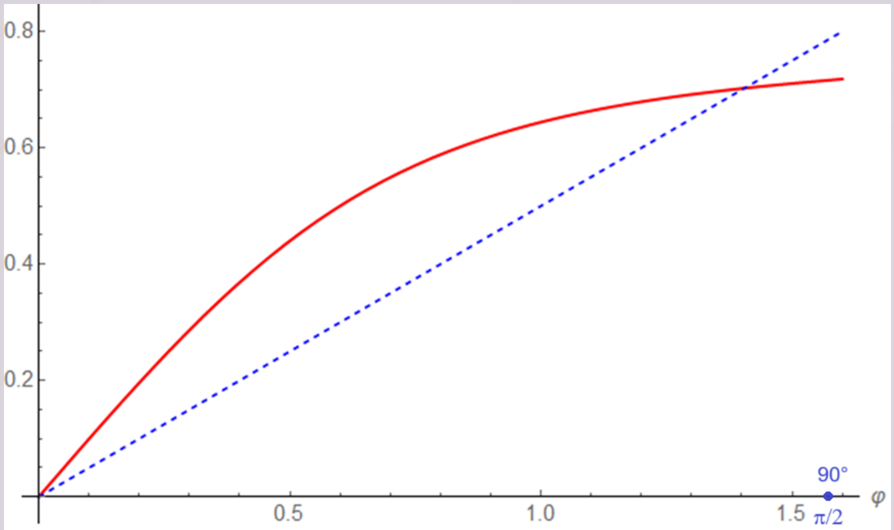
Bei vorgegebenen Werten von L und φ kann man aber die Gleichung $W'(\alpha) = 0$ (für $0 \le \alpha \le \varphi$) numerisch lösen lassen, und damit dann auch die optimale Sprungweite bestimmen (L = 3 m, g = 9,81 m/s²):

φ [°]	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	**80**	85	90
α_{opt} [°]	9,8	14,5	19	23	26	29	31	33	35	36	37	38	39	40	40	41	41
W [m]	0,5	0,8	1,1	1,4	1,7	2,1	2,4	2,8	3,2	3,7	4,1	4,6	5,1	5,6	6,1	6,7	7,2

Man sieht: Es gilt fast immer $\alpha_{\text{opt}} > \varphi / 2$!

Für $\varphi \approx 80°$: $\alpha_{opt} \approx \varphi / 2 \approx 40°$

Die Graphen von α_{opt} und φ / 2 (keine gute Passung):



Für $\varphi < 1{,}4$ ($\hat{=}\, 80°$): $\alpha_{opt} > \varphi / 2$

- Leistungsfähigkeit von CAS: Jeder Punkt der roten Kurve von α_{opt} ist Resultat einer *langwierigen Näherungslösung*, Graph kann trotzdem geplottet werden!

- Früher (ohne leistungsfähige CAS) diese Aufgabe im U gar nicht möglich, heute ist die algebraische Komplexität der Gleichungen kaum relevant; nur:
  -) Ist der Ansatz durch S&S in selbständiger Arbeit zu schaffen?
  -) Ist er zumindest nachvollziehbar?

$$W = \frac{v^2 \sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g} + \frac{v\cos(\alpha)}{g}\sqrt{v^2\sin^2(\alpha) - 2Lg\cos(\alpha) + 2Lg} + L\sin(\alpha)$$

$$v = \sqrt{2gL\left(\cos(\alpha) - \cos(\varphi)\right)} \qquad (*)$$

Wenn man in der Funktion W wirklich v durch (*) ersetzt, so sieht man zwei interessante Aspekte (für die Arbeit mit dem Computer nicht wichtig, aber für sich genommen interessante Erkenntnisse):

- g kürzt sich heraus → auf die Erdanziehungskraft kommt es hier gar nicht an, die Sprungweite wäre am Mond dieselbe!

- L kann insgesamt als Faktor herausgehoben werden →
  direkte Proportionalität zu L, d. h. bei doppelter Länge L ergibt sich auch die doppelte Sprungweite W !
  Damit auch klar: α_{opt} ist unabhängig von L !
  (vermutlich nur bei unserer Annahme:
  Schwerpunkthöhe bei Landung =
  Höhe des Schwerpunktes auf dem ruhenden Schaukelsitz)

Fachdidaktisches Potenzial der Schaukelaufgabe

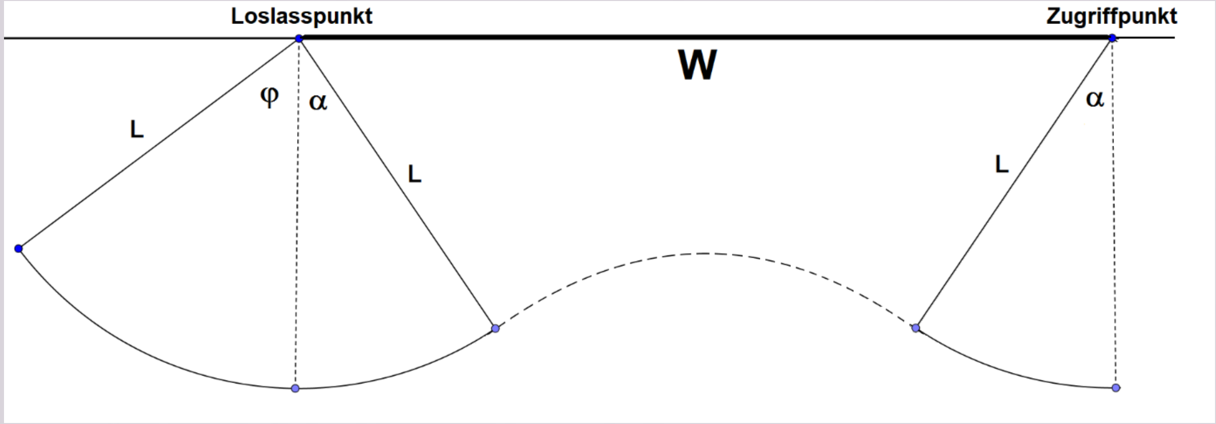
- Bezug zur Lebenswelt von Kindern
(Kinder machen das rein intuitiv, aber hier KANN man auch interessante mathematische Aspekte betrachten)
- Die ganze syntaktische Arbeit kann an den Computer (CAS) ausgelagert werden: Lösen von Gleichungen, Einsetzen, Ableitung bestimmen, Werte ausrechnen, Graphen plotten, . . .
- Man erlebt die Kraft von CAS, sinnvoller Computereinsatz
- Das Erarbeiten des Modells (Erstellen von Gleichungen, Mathematisieren) kann auf verschiedene Arten erfolgen (einiges an Physik nötig): selbständig in Gruppen, angeleitet, Vortrag der Lehrperson
- Man könnte zur Überprüfung Videos machen und analysieren, ob die Kinder ca. beim optimalen Winkel abspringen (Verifizieren)

Schwingende Affen: „Brachiation“

Maximierung der Distanz von einem Griff zum nächsten

Mögliche Fragen (→ mathematisches Modell):

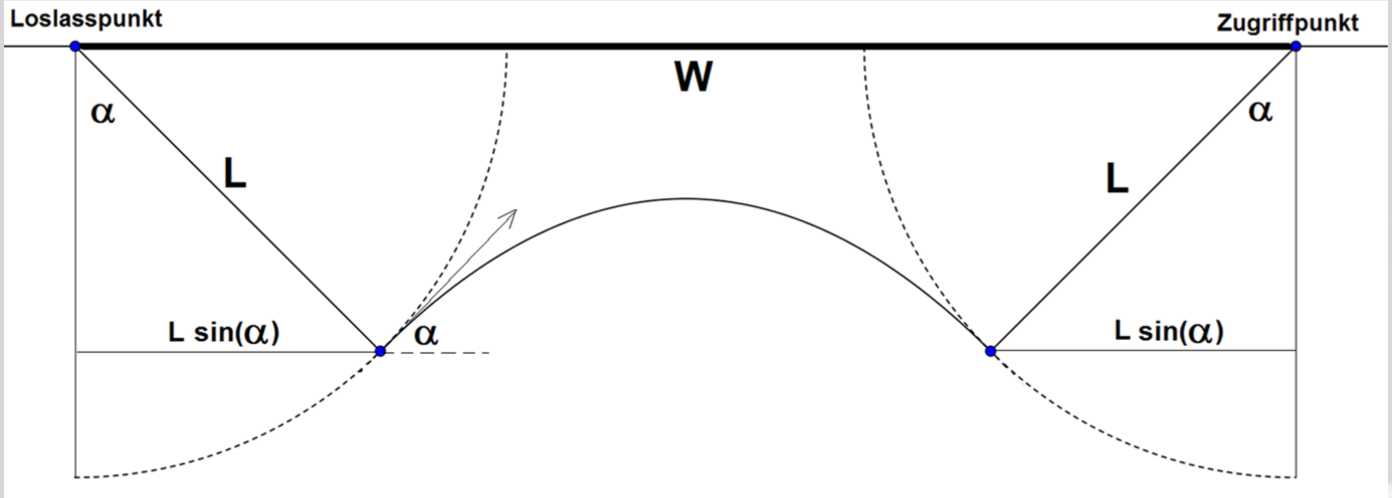
- „Wann“ soll der Affe loslassen?
- Wie weit bzw. wie hoch ist dabei seine Flugphase?
  Gibt es im optimalen Fall immer eine solche?
- Wie weit kann er von einem Griff zum nächsten höchstens kommen?



Annahmen:

- Affe als punktförmig (*Schwerpunkt*)
- Zwei unabhängig zu bewegende gleich lange Arme (Länge *L*)
- Zugriffstange ist waagrecht
- Affe ist beim Loslassen (vor der Flugphase) und beim Zugreifen (danach) auf gleicher Höhe (Begründung folgt)

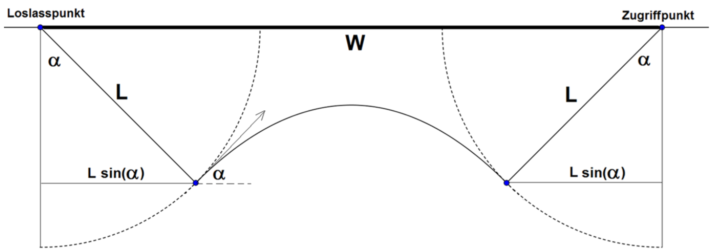
Warum ist die symmetrische Situation optimal?



In der Loslasssituation sind Kreis (Pendelbahn) und Flugbahn (Parabel) *tangential*. Analog in der symmetrischen Zugriffsituation.

Optimalität: Affe kann nur in einem Punkt seiner Flugbahn (Parabel) den symmetrischen Zugriffpunkt erreichen, noch weiter rechts liegende Punkte NIE → die symmetrische Situation ist optimal!

$$W(\alpha) = 2L\sin(\alpha) + \text{horizontale Flugdistanz}$$



Horizontaldistanz x in der Flugparabel

Positive Lösung von: $$0 = \tan(\alpha)x - \frac{g}{2v^2\cos^2(\alpha)}x^2$$

Wegen der 0 auf der linken Seite deutlich leichter als bei „Schaukel“!

Ohne CAS: $$x = \frac{2v^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g}$$

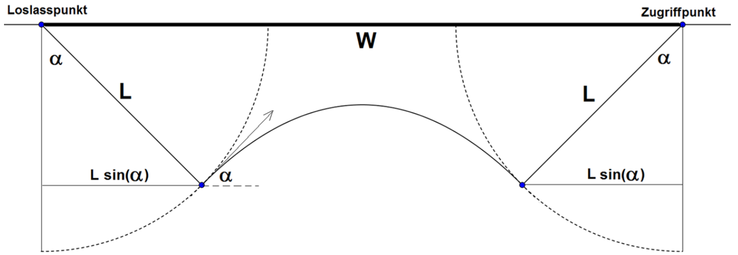
Mit $$v^2 = 2g\,\underbrace{L\big(\cos(\alpha)-\cos(\varphi)\big)}_{h}$$ (→ oben!)

$$x = 4L\big(\cos(\alpha)-\cos(\varphi)\big)\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$W(\alpha) = 4L\big(\cos(\alpha)-\cos(\varphi)\big)\sin(\alpha)\cos(\alpha) + 2L\sin(\alpha)$$

$$= 2L\Big[\big(\cos(\alpha)-\cos(\varphi)\big)\sin(2\alpha)+\sin(\alpha)\Big]$$

unabhängig von g, Proportionalität zu L (hier allgemein gültig!)



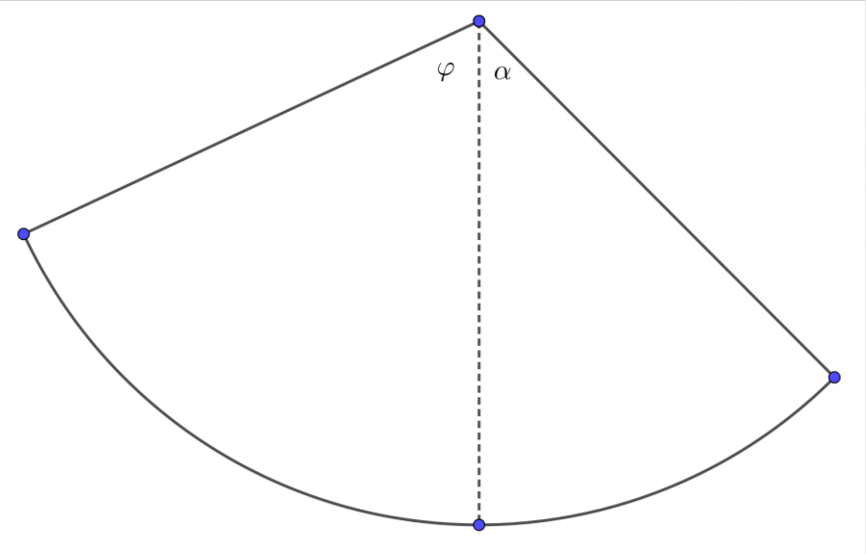
$$W(\alpha) = 2L\left[\left(\cos(\alpha) - \cos(\varphi)\right)\sin(2\alpha) + \sin(\alpha)\right]$$

Vermutlich sofort CAS: solve(W‘(α)=0)

Überraschenderweise: $\alpha_{\text{opt}} = \dfrac{\pi}{4} \mathrel{\hat{=}} 45°$ unabhängig von φ!

Unabhängigkeit von L klar durch:
-) inhaltlich (Skalierung der Skizze)
-) Term

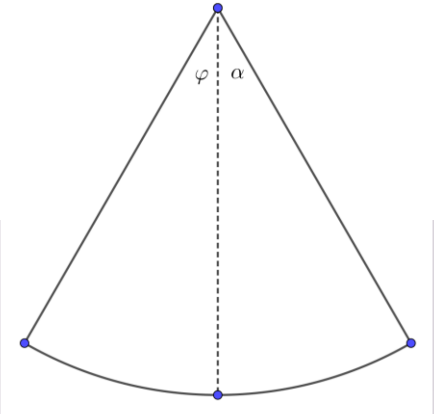
Weitergehende Interpretation fehlt noch!



$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{\pi}{4} \mathrel{\widehat{=}} 45°$$

ist nur möglich für $\varphi \geq \frac{\pi}{4}$, weil $0 \leq \alpha \leq \varphi$

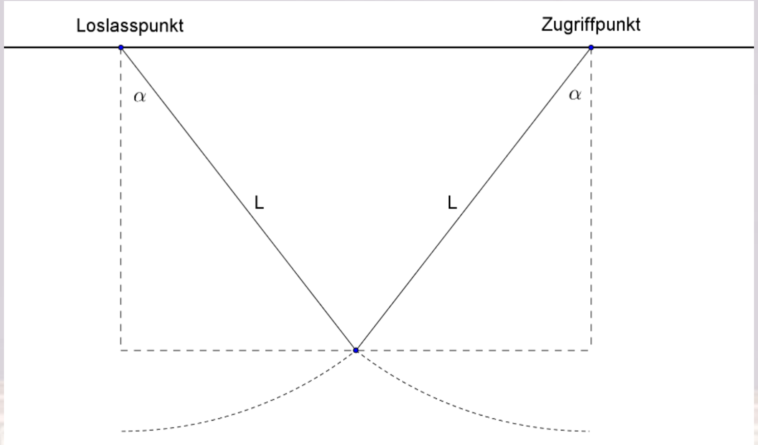
(keine äußere Beschleunigung beim letzten *Durchgang*!)



1. Fall: $\varphi < \frac{\pi}{4} \hat{=} 45°$

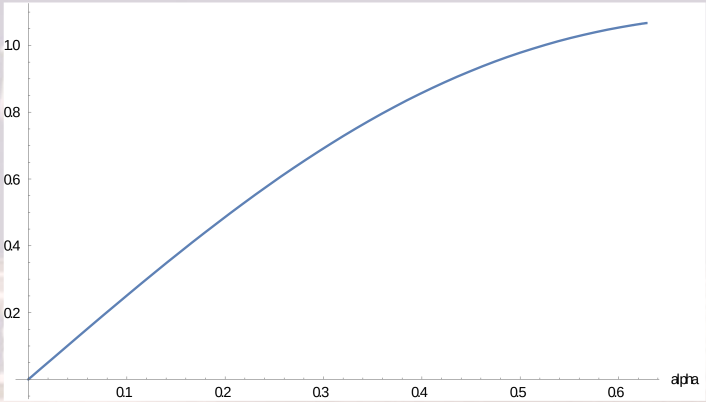
$$\alpha_{\text{opt}} = \varphi$$

Am besten am vorderen Totpunkt loslassen, *gleichzeitig* mit der *anderen Hand* die Stange ergreifen; keine Flugphase



$W(\alpha)$ für L = 1 m, φ = 30°

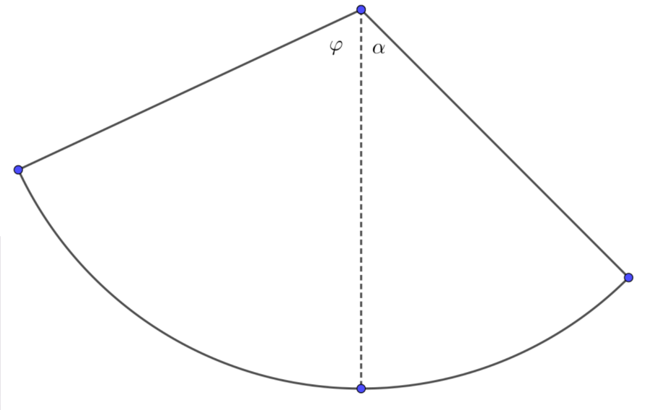
str. mon. wachsend für $0 < \alpha \le \varphi < \frac{\pi}{4}$



$$W_{\text{opt}} = 2L\sin(\varphi)$$

$W'(\alpha) > 0$ mit CAS bestätigen

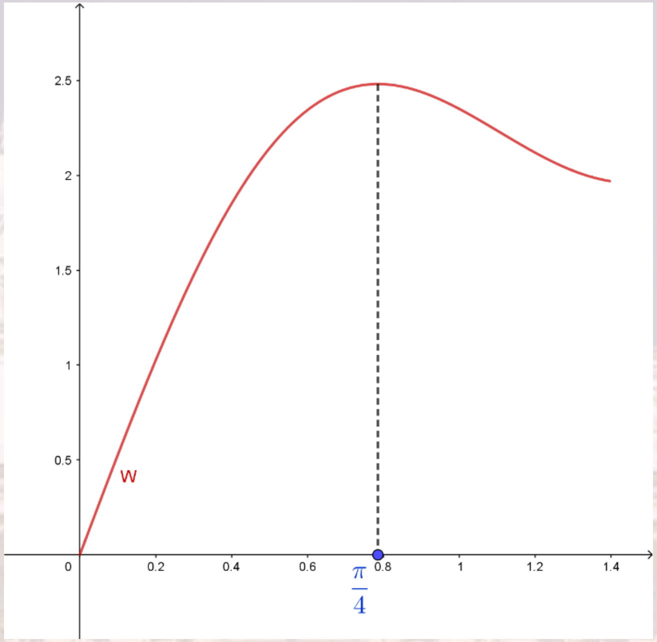
$$W'(\alpha) = \ldots = \underbrace{\left(2\cos^2(\alpha) - 1\right)}_{>0}\underbrace{\left(3\cos(\alpha) - 2\cos(\varphi)\right)}_{>0} > 0 \qquad \left(0 < \alpha \le \varphi < \frac{\pi}{4}\right)$$



2. Fall: $\varphi \geq \frac{\pi}{4} \triangleq 45°$

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{\pi}{4} \triangleq 45°$$

$W(\alpha)$ für L = 1 m, φ = 80°:



Einsetzen von $\alpha_{\text{opt}} = \frac{\pi}{4} \triangleq 45°$ in diesem Fall ($\varphi \geq \frac{\pi}{4} \triangleq 45°$):

Optimale Weite: $$W_{\text{opt}} = 2L\left(\sqrt{2} - \cos(\varphi)\right)$$

Optimale horizontale Flugweite: $$L\left(\sqrt{2} - 2\cos(\varphi)\right)$$

Optimale Flughöhe: $$\frac{L}{4}\left(\sqrt{2} - 2\cos(\varphi)\right)$$

Alle diese Werte werden mit wachsendem $45° \leq \varphi \leq 180°$ größer!

Wenn Gibbon-Affen Schwung holen können (z. B. durch einen Sprung von weiter oben), dann können sie in ihrer Flugphase sogar ÜBER die Stange (Schnur) kommen!

VIDEO!

$$W(\alpha) = 2L\left[\left(\cos(\alpha) - \cos(\varphi)\right)\sin(2\alpha) + \sin(\alpha)\right]$$

Kann man die „schöne“ Lösung $\alpha_{\text{opt}} = \frac{\pi}{4} \mathrel{\hat{=}} 45°$ für $\varphi \geq \frac{\pi}{4} \mathrel{\hat{=}} 45°$ auch ohne CAS erhalten?

Ja, substituiere in $W'(\alpha) = 0$ wie üblich $x := \cos(\alpha)$ und $c := \cos(\varphi)$

Bedingungen: $0° \leq \varphi \leq 180°$ $\quad 0° \leq \alpha \leq 90°$ $\quad \alpha \leq \varphi$

$$6x^3 - 4cx^2 - 3x + 2c = 0$$

Ohne Cardano-Formel lösbar:

$$3x\left(2x^2 - 1\right) - 2c\left(2x^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left(2x^2 - 1\right)\left(3x - 2c\right) = 0$$

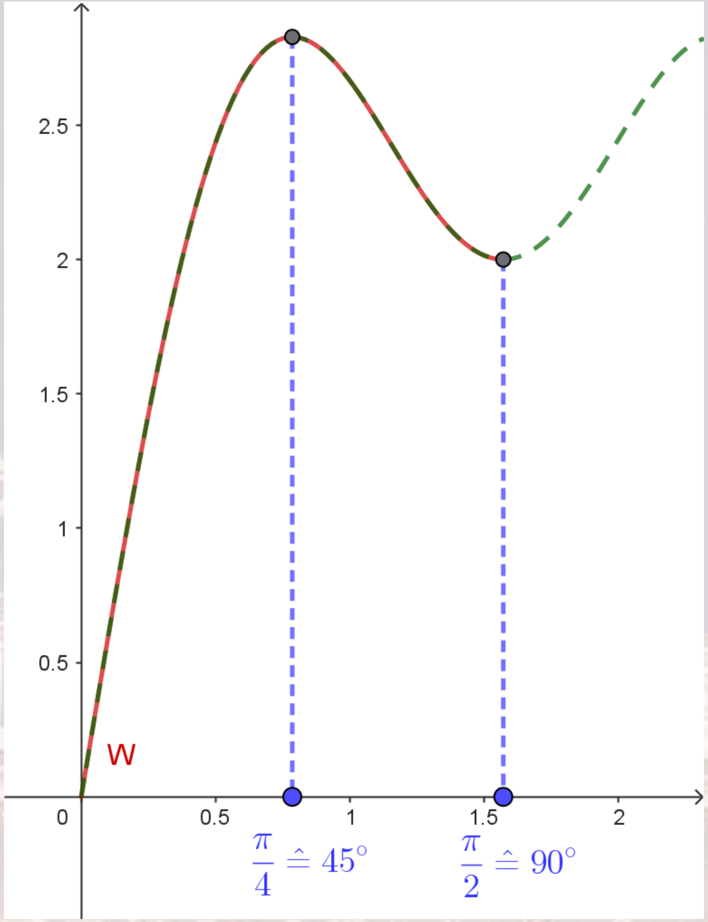
Aus der 1. Klammer erhält man durch Rücksubstitution: $\alpha_{\text{opt}} = \frac{\pi}{4} \mathrel{\hat{=}} 45°$

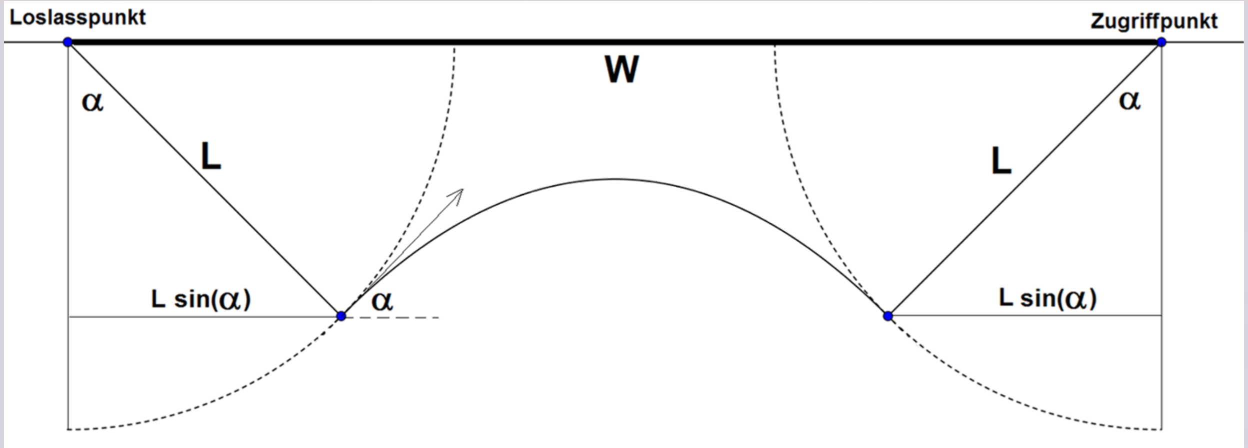
Die 2. Klammer nimmt den Wert 0 im relevanten Bereich nur für

$$x = 0 = c \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 90° = \varphi$$

an, dort ist aber ein *Randminimum* von W, *nicht* das *globale Max*.

Randminimum von W bei $\alpha = \dfrac{\pi}{2} \triangleq 90^\circ$ im Fall von $\varphi = \dfrac{\pi}{2} \triangleq 90^\circ$:





Klar: $\alpha_{\text{opt}} = \frac{\pi}{4} \hat{=} 45°$

maximiert die horizontale Flugweite
(Parabel: Start- und Landepunkt auf gleicher Höhe)

So gesehen ist dieser Winkel doch nicht wirklich überraschend,
aber andererseits wird ja nicht nur die horizontale Flugweite maximiert,
sondern ganz W !

Technologieeinsatz

Bei diesen Aufgaben gut und sinnvoll möglich

Aber:

Nicht der mögliche Technologieeinsatz soll die Unterrichtsinhalte bestimmen!

Umgekehrt:

Die nach fachlichen und fachdidaktischen Kriterien ausgewählten Unterrichtsinhalte sollen die Unterrichtsmethode (d. h. auch den Technologieeinsatz) bestimmen!

Dabei auch gut möglich: kein Technologieeinsatz!

Fachdidaktisches Potenzial der Affenaufgabe

- Bezug zur S&S-Lebenswelt weniger als bei der Schaukel, trotzdem: Funktionales Denken, Optimieren, Modellieren, etc.
- Man kann Gibbon-Affen im Zoo beobachten („Lehrausgang“)
- Algebraisch deutlich einfacher als die Schaukelaufgabe
- Arbeiten mit und ohne CAS möglich
- Grad an Selbständigkeit der S&S sehr variabel
- Symmetrie spielt eine zentrale Rolle
- Der optimale Lösungswinkel von 45° hat was Überraschendes, Erklärungen dafür im Nachhinein sind auch wichtige Lerngelegenheiten
- Solche Aufgaben sind klarerweise nur Lernaufgaben (insb. im Wahlpflichtfach), brauchen Zeit, keine Leistungsaufgaben bei Prüfungen bzw. Schularbeiten!

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!

Literatur

H. H. (2022). Modelling and Optimizing Regarding Swings and Swinging Monkeys. In: *Australian Mathematics Education Journal* (*AMEJ*) 4, 3, 43-48.

https://homepage.univie.ac.at/hans.humenberger/Aufsaetze/AMEJ-Humenberger-2022.pdf

H. H. (2024). Modellieren und Optimieren bei Schaukeln und schwingenden Affen. In: *Der Mathematikunterricht* 70, 1, 45-54.