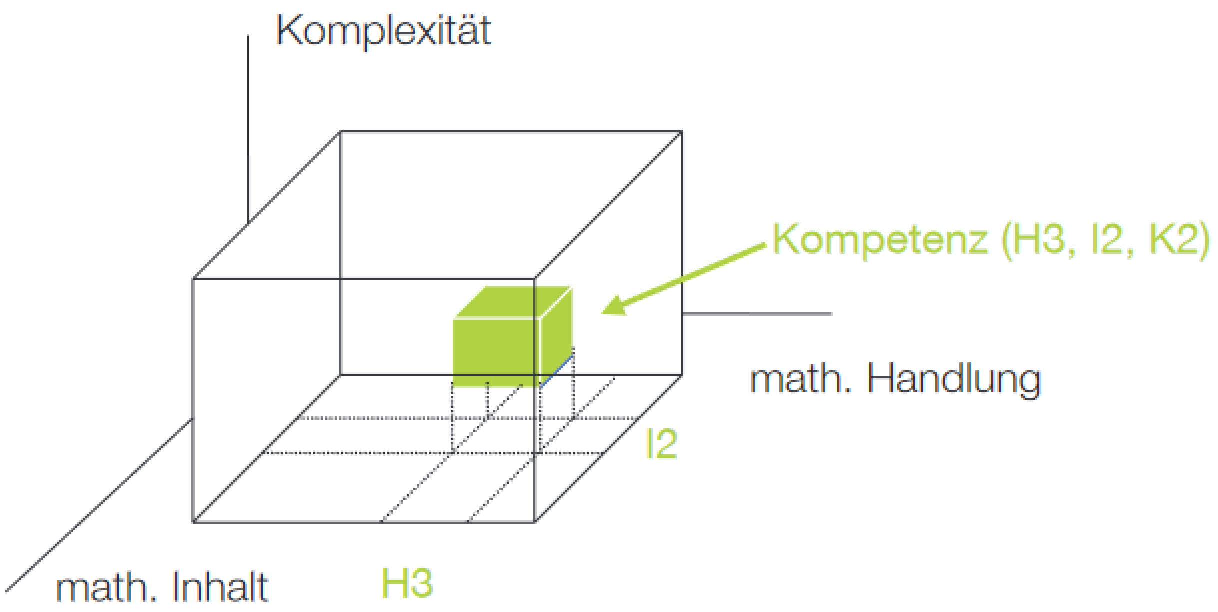
Institut des Bundes
für Qualitätssicherung im
österreichischen Schulwesen

Inhalts- und Handlungsbereiche bei den Bildungsstandards M8 – Was haben sie miteinander zu tun?

Stefan Götz (Universität Wien)

unter Mitwirkung von Ann Cathrice George (IQS)

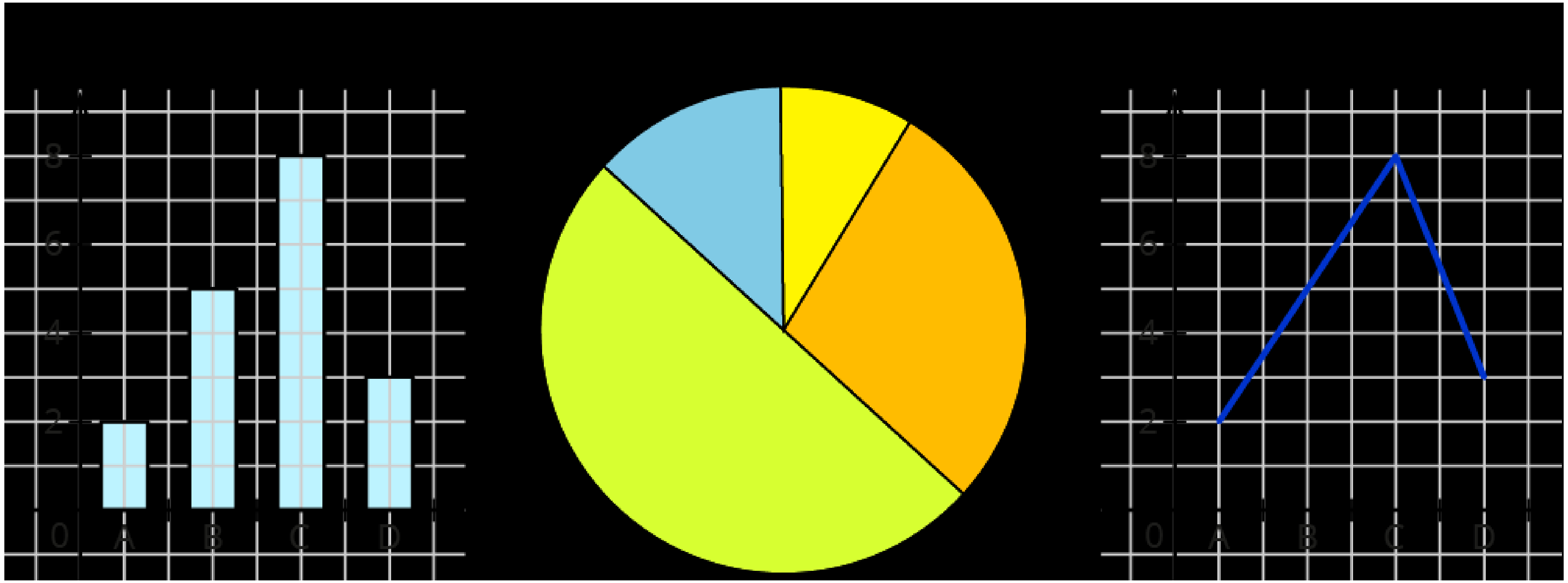


https://www.iqs.gv.at/themen/nationale-kompetenzerhebung/grundlagen-der-nationalen-kompetenzerhebung/grundlagen-der-bildungsstandards

universität wien

Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen

Daten, Ergebnisse, Interpretationen



universität wien

Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen

Gleichwertigkeit von Inhalts- und Handlungsbereichen?!

Kompetenzkreise
- Operieren
- Interpretieren

412 a) $\frac{7b}{3}-\frac{3b}{4}=$ c) $\frac{2x}{3}-\frac{4x}{5}=$ e) $\frac{3u}{4}-\frac{5u}{6}=$ g) $\frac{7b}{8}-\frac{b}{2}=$
b) $\frac{5v}{6}-\frac{5v}{3}=$ d) $\frac{3a}{4}-\frac{5a}{8}=$ f) $\frac{y}{5}-\frac{7y}{4}=$ h) $\frac{3z}{7}+\frac{5z}{14}=$

413 a) $3z-\frac{2z}{5}=$ b) $t+\frac{3t}{4}=$ c) $\frac{5e}{4}-2e=$ d) $\frac{2f}{3}-3f=$

414 a) $u^2-\frac{1}{2}u^2+\frac{u^2}{3}=$ b) $\frac{2}{3}v^2-\frac{5v^2}{6}+v^2=$ c) $\frac{3}{5}x^3-\frac{7}{10}x^3+\frac{x^3}{2}=$ d) $y^4-\frac{3}{4}y^4-\frac{5y^4}{8}=$

415 a) $\frac{m}{5}-8+\frac{2}{3}m-2=$ b) $\frac{2}{3}n^2+9-\frac{n^2}{6}-5=$ c) $\frac{4p^2}{5}+7-\frac{3p^2}{10}-11=$ d) $\frac{q^2}{4}-1-\frac{3q^2}{5}+\frac{1}{5}$

416 a) $\left(\frac{4k}{9}+\frac{2k}{3}\right)\cdot 3$ b) $\left(\frac{3x}{4}-\frac{7x}{8}\right)\cdot 4$ c) $\left(-\frac{3b}{7}+\frac{b}{2}\right)\cdot(-3)$ d) $\left(\frac{2d}{5}-\frac{9d}{10}\right)\cdot(-4)$

417 Ordne den angegebenen Termen den jeweils zugehörigen vereinfachten Term zu! Schreibe dazu die Buchstaben in das leere Feld!

1	$5x-3u+2x+8u=$	
2	$4x-(3u+2x)+9u=$	
3	$(7u+2u)-9x+3x=$	
4	$7u-5x-(3u-2x)=$	

A	$6u+2x$
B	$9u-6x$
C	$10u-7x$
D	$6u+6x$
E	$4u-3x$
F	$5u+7x$

(Humenberger 2019, S. 101)

Deskriptoren (BGBl. II 1/2009, Anlage, S. 14) https://www.ris.bka.gv.at/eli/bgbl/II/2009/1

„Die Schülerinnen und Schüler können algebraisch, tabellarisch oder grafisch dargestellte Strukturen und (funktionale) Zusammenhänge beschreiben und im jeweiligen Kontext deuten." zu

H3-I2-K1, also (bifie 2011, S. 10 f.)

- Interpretieren meint, aus mathematischen Darstellungen Fakten, Zusammenhänge oder Sachverhalte zu erkennen und darzulegen sowie mathematische Sachverhalte und Beziehungen im jeweiligen Kontext zu deuten.
- Variable, Terme und (Un-)Gleichungen; verschiedene Darstellungen funktionaler Zusammenhänge; konkret:
  - Variable und Terme
  - einfache Gleichungen (Formeln) und Ungleichungen
  - lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen
  - verbale, tabellarische, grafische und symbolische Darstellung funktionaler Zusammenhänge; lineare Funktionen; direkte und indirekte Proportionalität

universität wien

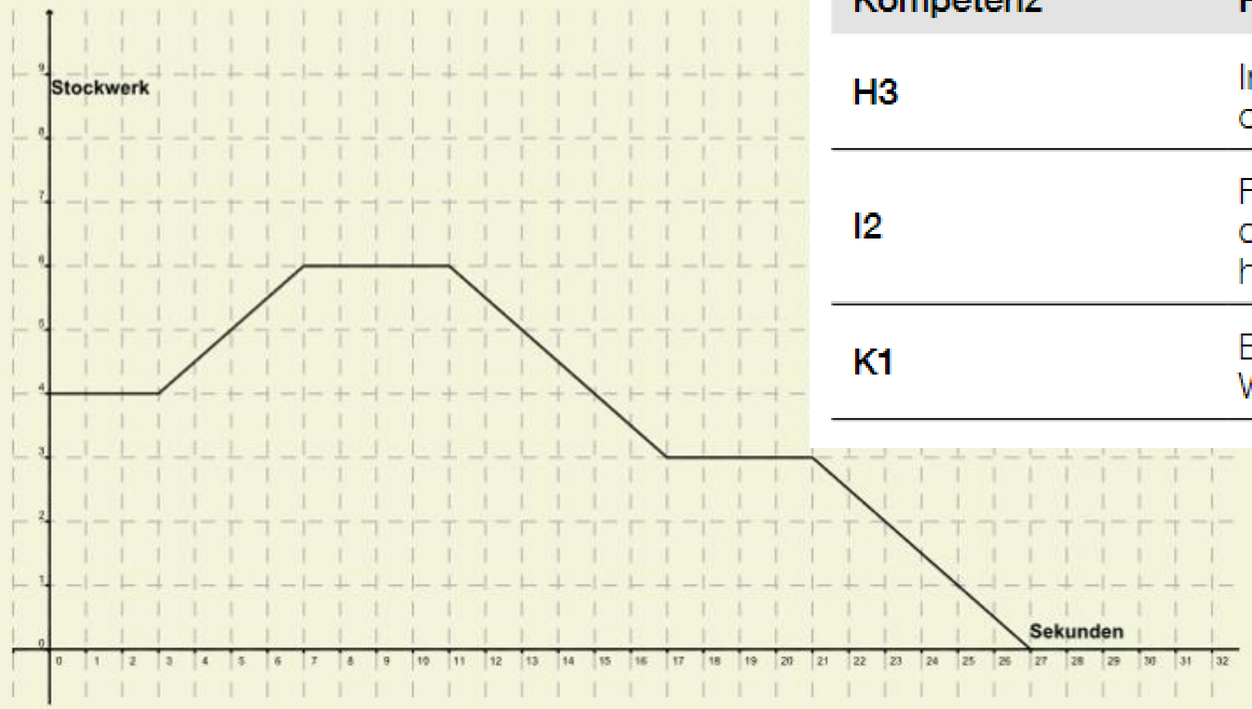
Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen

Ein Beispiel dazu (bifie 2011, S. 25)

Aufgabe „Aufzug“

Das Diagramm stellt näherungsweise die Probefahrt eines Aufzugs in einem Hochhaus mit 8 Stockwerken dar.

Beschreibe den Fahrtverlauf des Aufzugs in Worten.



Titel/Thema	**Aufzug**
Kompetenz	**H3, I2, K1**
H3	Interpretieren: Die grafisch dargestellte Bewegung eines Lifts soll entsprechend gedeutet, d. h. in Worten beschrieben werden.
I2	Funktionale Abhängigkeiten: Ausgangspunkt ist eine grafische Darstellung des funktionalen Zusammenhangs zwischen der Zeit und dem Aufenthaltsort des Liftes.
K1	Einsetzen von Grundfertigkeiten: Es ist notwendig, der Grafik entsprechende Wertepaare zu entnehmen. Dies ist eine grundlegende Fertigkeit.

universität wien

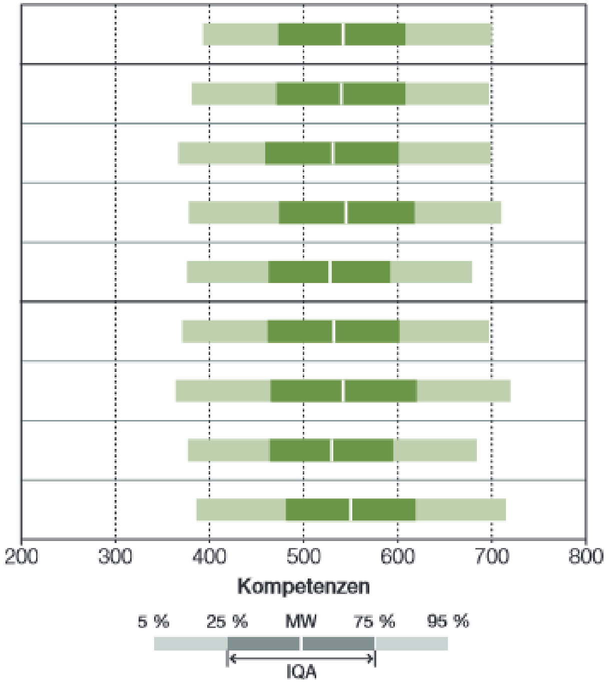
Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen

Standardüberprüfung 2017 Mathematik, 8. Schulstufe Bundesergebnisbericht (S. 39)

bifie
BIST-Ü M8 (2017)

Mathematikkompetenz der Schüler/innen der 8. Schulstufe in Punkten

	Kompetenzbereich	MW	Perzentile 5	25	75	95	(IQA)
	Mathematik gesamt	542	393	473	608	700	(135)
Handlungsbereiche	Darstellen und Modellbilden	540	381	471	608	697	(137)
Handlungsbereiche	Rechnen und Operieren	531	367	459	601	699	(143)
Handlungsbereiche	Interpretieren	545	378	474	618	710	(144)
Handlungsbereiche	Argumentieren und Begründen	528	376	463	592	679	(129)
Inhaltsbereiche	Zahlen und Maße	532	371	462	602	697	(140)
Inhaltsbereiche	Variable, funktionale Abhängigkeiten	542	364	465	620	720	(155)
Inhaltsbereiche	Geometrische Figuren und Körper	530	377	464	595	684	(131)
Inhaltsbereiche	Statistische Darstellungen und Kenngrößen	550	386	481	619	715	(139)



Anmerkungen: In der Tabelle werden gerundete Werte angegeben. Dadurch kann der Wert in der Spalte (IQA) minimal von der Differenz der entsprechenden Perzentile abweichen.
MW: Mittelwert; IQA: Interquartilabstand (75.–25. Perzentil).

→ Getrennte Berichterstattung Inhalts- Handlungsbereiche

Grund: zu wenige Aufgaben in einem Knotenpunkt (Inhalt x Handlung) pro Schüler*in
→ Reliabilität fraglich!

universität wien

Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen

Datengrundlage

- Die letzte Bildungsstandardüberprüfung 2017
- $n = 72704$ Schüler*innen

Ergebnisse: Individuelle Rückmeldung

- ein Wert der Mathematikkompetenz insgesamt,
- jeweils ein Wert für jeden Inhaltsbereich und
- jeweils ein Wert für jeden Handlungsbereich

plus

- Kontextfragebögen zu Aspekten des Mathematikunterrichts

Schreiner et al. 2018

Forschungsdesiderat

Es wird der Frage nachgegangen, wie der Zusammenhang zwischen den Inhalts- und Handlungskompetenzen einzelner Schülerinnen und Schüler (im Durchschnitt) aussieht.

Alternativen a priori:

1. Es kann entweder vermutet werden, dass Schülerinnen oder Schüler, **die in einem Bereich gut abschneiden dann auch in den anderen Bereichen gut abschneiden**

oder

2. dass es **Unterschiede** in den Leistungen **zwischen den Kompetenzen** in den Bereichen gibt.

universität wien

Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen

Festsetzung der Punkteskala

- Skala mit Mittelwert 500
- Baseline-Testung 2009 (Ausgangmessung): festgestellte mittlere Leistung aller Schülerinnen und Schüler in jedem Kompetenzbereich entspricht 500 Punkten

Bestenfalls: Hinweise auf Kausalitäten

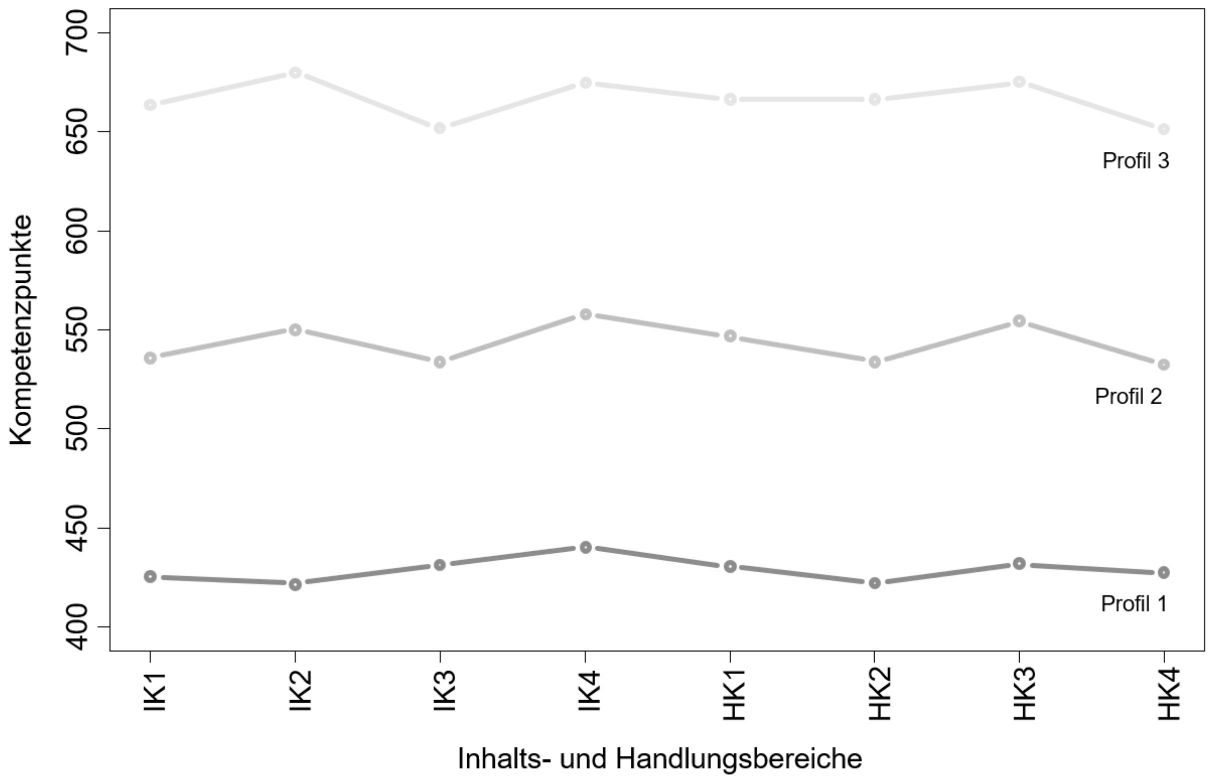
- Das heißt nicht, dass die festgestellten Leistungen bei der Baseline-Testung in allen Kompetenzbereichen dieselben waren!
  500 Punkte beim Argumentieren, Begründen ≠ 500 Punkte bei den Variablen, funktionalen Abhängigkeiten

	Kompetenzbereich	MW	Perzentile 5	25	75	95	(IQA)
	Mathematik gesamt	542	393	473	608	700	(135)
…ngsbereiche	Darstellen und Modellbilden	540	381	471	608	697	(137)
	Rechnen und Operieren	531	367	459	601	699	(143)
	[illegible]	545	378	474	618	710	(144)
	… und Begründen	528	376	463	592	679	(129)
Inhaltsbereiche	Zahlen und Maße	532	371	462	602	697	(140)
	Variable, funktionale Abhängigkeiten	542	364	465	620	720	(155)
	Geometrische Figuren und Körper	530	377	464	595	684	(131)
	Statistische Darstellungen und Kenngrößen	550	386	481	619	715	(139)

Dementsprechend können die (mittleren) Leistungen einer Schülergruppe in unterschiedlichen Kompetenzbereichen nicht miteinander verglichen werden, sondern nur in Relation zur Baseline-Testung gesetzt werden.

Im Folgenden: immer nur (auch negative) **Leistungszuwächse**, keine absoluten Leistungsvergleiche!

Ergebnis einer Clusteranalyse



Kriterium der erklärten Varianz:
äußert sich vereinfacht gesagt dadurch, dass die Schülerinnen und Schüler einer Gruppe einander in ihren Kompetenzen über die Inhalts- und Handlungsbereiche hinweg ähneln und sich dabei gleichzeitig von den Schülerinnen und Schülern der anderen zwei Gruppen deutlich unterscheiden.

Überraschend: **klare Trennung über alle** (!) doch sehr unterschiedlichen Inhalts- und Handlungskompetenzen!

Profil 1	32%
Profil 2	42%
Profil 3	26%

☞ ungefähr gleiche Größenordnung

Im Detail

Profil 1	428,57 Punkte
Profil 2	543,10 Punkte
Profil 3	666,13 Punkte

Tatsächlich unterscheiden sich Profile **signifikant** voneinander (*p*-Wert << 0,01 mittels t-Test in allen Fällen).

- VORSICHT:
  → **Faustregel**: 25 Kompetenzpunkte ☞ ein Lernjahr (z. B. Wendt, Kasper, Bos, Vennemann & Goy 2017)?!
  → Unterschied **mehr als vier Jahre** Lernzeit!

- Trotzdem: Die festgestellten Unterschiede sind in Unterrichtszeit gemessen sehr groß.

	Maximale Differenzen
Profil 1	18,6 Punkte aus IK4—IK2
Profil 2	24,9 Punkte aus IK4—HK4
Profil 3	28,41 Punkte aus IK2—HK4

Relative Schwächen

- Profillinie für **Profil 1** zur Gänze unterhalb der 500 Punkte-Marke: Die zugehörige Schülergruppe ist im Durchschnitt in jedem Kompetenzbereich deutlich schwächer als der Durchschnitt (aller) Schülerinnen und Schüler bei der Baseline-Testung 2009. Genau das Gegenteil gilt für die Schülergruppe von **Profil 3** und in geringerem Maße auch für jene von **Profil 2**.

- **Profil 3** und **Profil 2**: relative Schwächen in IK 3 (Geometrie) und HK 4 (Argumentieren) ? ←

  Ausgangsleistung 2009 entsprechend hoch (vgl. Lehrplan für IK 3)

  Dazu ein unveröffentlichtes Testitem: verbale Beschreibung zweier Kreise
  - Entfernung der Mittelpunkte
  - Radien

  MC vier Möglichkeiten: Lage der Kreise zueinander plus Begründung

  Lösungshäufigkeit knapp $\geq 30\%$

universität wien

Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen

Charakterisierung der Profile nach relativen Stärken und Schwächen

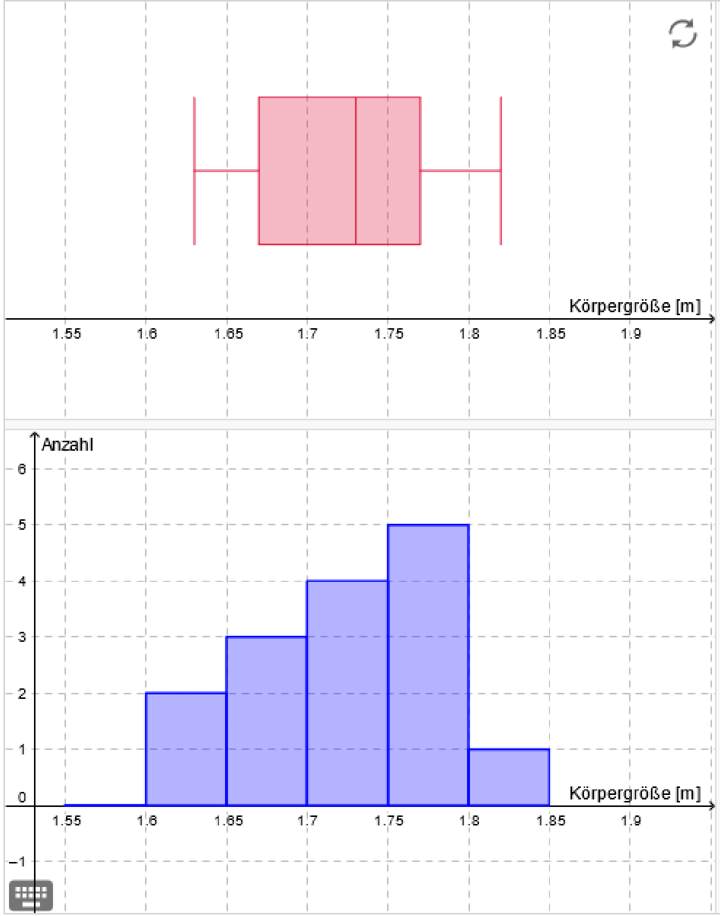
- Profil 3: relative Stärke in Inhaltsbereich 2 „Variable, funktionale Abhängigkeiten“ mit 679,80 Punkten, das ist ein traditionell stark ausgeprägter Themenkomplex im Mathematikunterricht, wie eine Schulbuchanalyse zeigt (Humenberger 2018, 2019)
- Profil 2:
  - relative Stärke im Zuwachs von IK4 „Statistische Darstellungen und Kenngrößen“ (557,67 Punkte)
  - relative Schwächen in IK1 „Zahlen und Maße“ (535,74) und HK2 „Rechnen, Operieren“ (533,70)
- Profil 1:
  - relative Schwächen im Zuwachs von IK2 „Variable, funktionale Abhängigkeiten“ (421,62) und HK2 „Rechnen, Operieren“ (421,82) . Die Interpretation liegt nahe, dass das Rechnen mit Variablen die Schwäche in dieser Schülergruppe ist.
  - maximaler Zuwachs in IK4 „Statistische Darstellungen und Kenngrößen“ (440,22)

(Relativer) Zuwachs in IK4

- Bei Baseline-Testung vermutlich das niedrigste Leistungsniveau, da diesem Inhaltsbereich bis zur Baseline-Testung im Unterricht weniger Augenmerk zuteil wurde als z. B. IK2 „Variable, funktionale Abhängigkeiten“ (vgl. z. B. Borovcnik 1999)
- Wegen Lehrplan Beschränkung auf beschreibende Statistik → es genügt, Begriffe zu kennen, zum Beispiel: ungeordnete Liste von fünf Daten, gesucht ist die Span

Lösungshäufigkeit 63%

  - ➢Aufgaben lassen nicht auf mögliche Verständnisschwierigkeiten schließen, sondern auf die Frage zurückführen: „Ist der involvierte statistische Begriff bekannt oder nicht?“
  - ➢Die so argumentierte Dichotomie, ob bestimmte statistische Kenngrößen bekannt sind oder nicht, besteht für alle drei Schülergruppen → Schüler*innen von Profil 3 zeichnen sich darin nicht aus.



	A	B	C	D	E
1		Körpergröße [m	Abstand	(Abstand)²	
2	$x_1 =$	1.63	-0.0927	0.0086	
3	$x_2 =$	1.64	-0.0827	0.0068	
4	$x_3 =$	1.67	-0.0527	0.0028	
5	$x_4 =$	1.67	-0.0527	0.0028	
6	$x_5 =$	1.68	-0.0427	0.0018	
7	$x_6 =$	1.71	-0.0127	0.0002	
8	$x_7 =$	1.71	-0.0127	0.0002	
9	$x_8 =$	1.73	0.0073	0.0001	
10	$x_9 =$	1.74	0.0173	0.0003	
11	$x_{10} =$	1.75	0.0273	0.0007	
12	$x_{11} =$	1.76	0.0373	0.0014	
13	$x_{12} =$	1.77	0.0473	0.0022	
14	$x_{13} =$	1.78	0.0573	0.0033	
15	$x_{14} =$	1.78	0.0573	0.0033	
16	$x_{15} =$	1.82	0.0973	0.0095	
17	arith. Mittelwert $\bar{x}$	1.7227	0	0.0439	0.0541
18	1. Quartile	1.67	Summe	Summe	$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$
19	Median	1.73			
20	3. Quartile	1.77			
21	Standardabweichun	0.056			
22					

https://www.geogebra.org/m/ChZqfyUT#material/mjvAAtsq

Kontextfragebogen: Individuell erlebter Mathematikunterricht aus Sicht der Schüler*innen

1. Wie oft kommt folgendes in deinem Mathematikunterricht vor?
   - Wir verwenden zum Lösen einer Aufgabe den Taschenrechner.
   - Wir arbeiten mit dem Computer.
2. Die Lehrerin/der Lehrer…
   - erklärt so lange, bis es alle verstanden haben.
   - gibt den Schülerinnen und Schülern speziell an ihre Leistungen angepasste Übungen.

→ Vierstufige Likertskala

- „in jeder Stunde“
- „in den meisten Stunden“

„(sehr) häufig“

- „in einigen Stunden“
- „nie oder fast nie“

„selten“

universität wien

Institut des Bundes
für Qualitätssicherung im
österreichischen Schulwesen

Motive für Auswahl

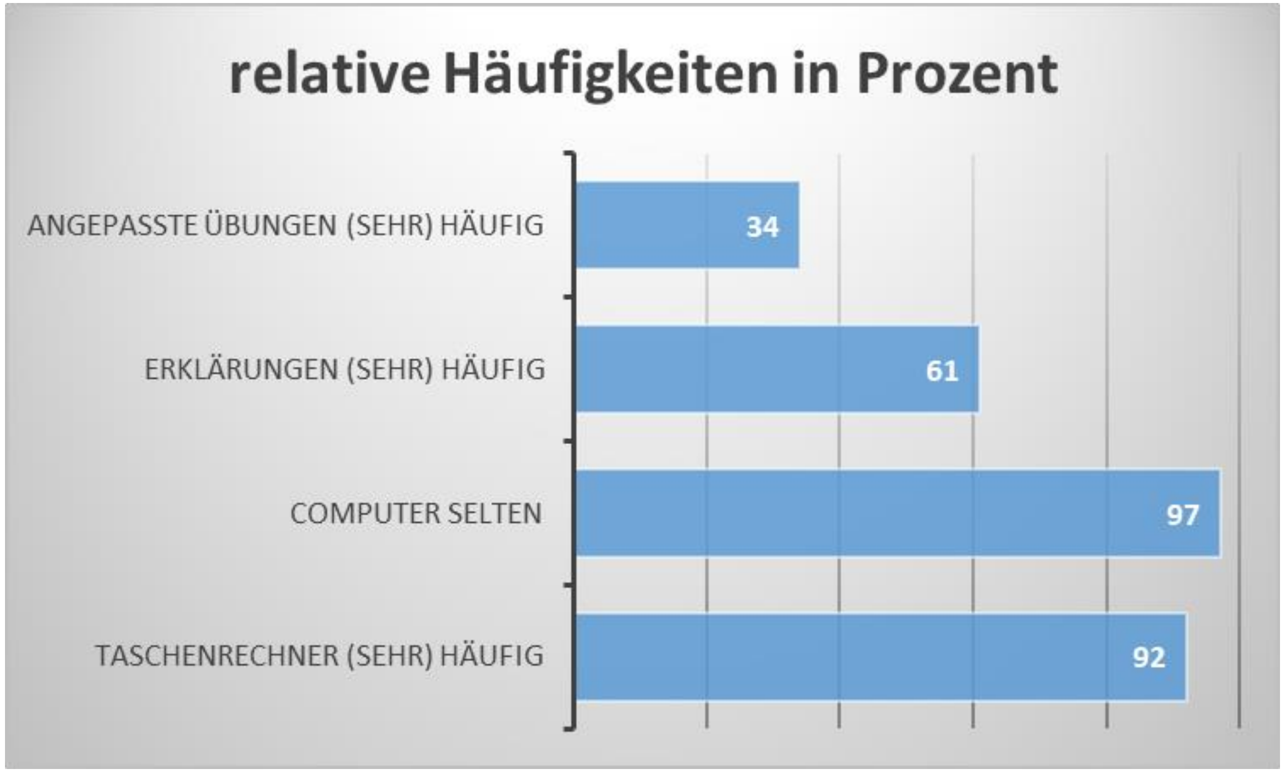
- Technologieeinsatz wieder in Diskussic [illegible] für Bildung, Wissenschaft und Forschung 2020, Stufe 2):

„Im Unterricht wird dazu neben den Gru [illegible] Augenmerk auf das Arbeiten ohne Technologie gelegt. Grundlegende [illegible] ieder ohne Taschenrechner oder höherwertige Technologien beher [illegible]“ (Hervorhebung S. G.)

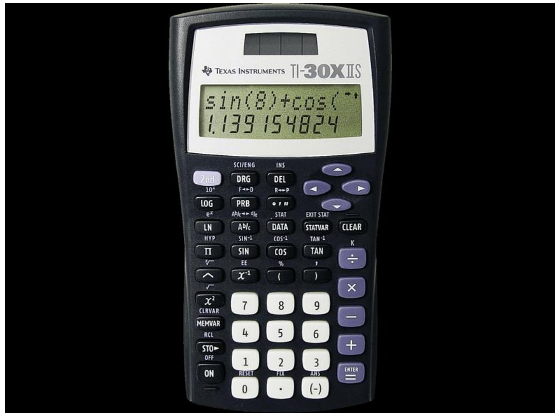
- Erklärungen der Lehrenden nehmen im Mathematikunterricht eine zentrale Rolle ein.
- „In allen Ländern wird der größte Teil der Mathematiklektion mit dem Lösen von Aufgaben bzw. Problemen verbracht.“ (Reusser & Pauli 2003, S. 36). In Österreich sind das 81% (ebd.).

https://www.alamy.de/symbol-fur-das-verbot-des-rechners-rechner-ist-verboten-rotes-rundzeichen-mit-taschenrechner-symbol-stoppen-oder-sperren-vektorgrafik-unzulassiger-vorzeichen-image397833468.html

Gesamtergebnisse



Kompetenzunterschiede nach Kontexten in den Profilen



https://www.studyhelp.de/ lernen/mathe/

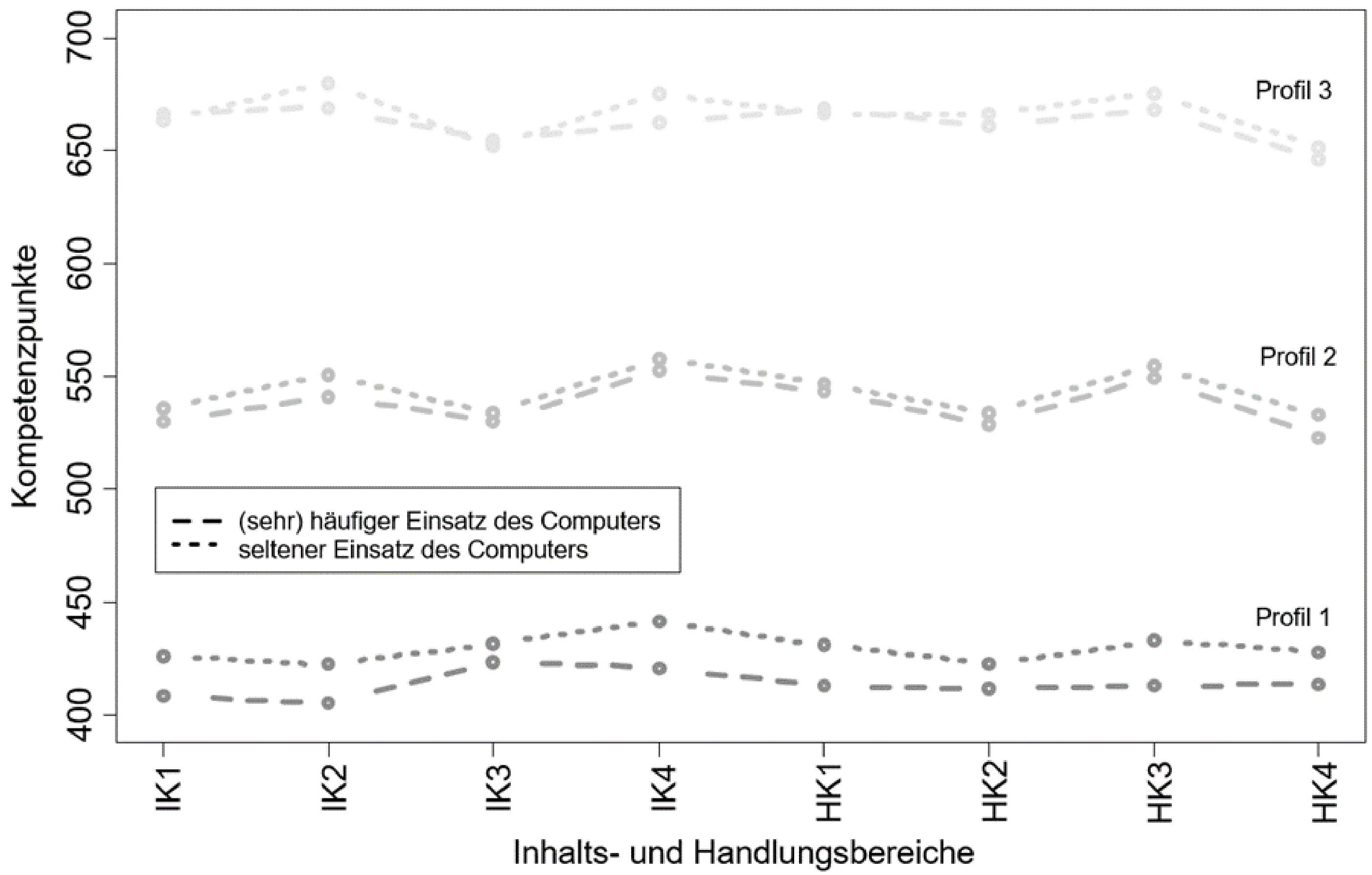
https://www.electronicshop24.at/product_info.php?manufacturers_id=285&products_id=250000000706139404&ano=A-C706139404&mno=THJ-00005&ean=889842670998&ref=index&tab=shipping

https://www.mediamarkt.at/de/product/_texas-taschenrechner-ti-30x-ii-solar-3070822.html

Nutzung des Computers

Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen

Nutzung des Computers im Unterricht



Über alle Kompetenzbereiche hinweg:

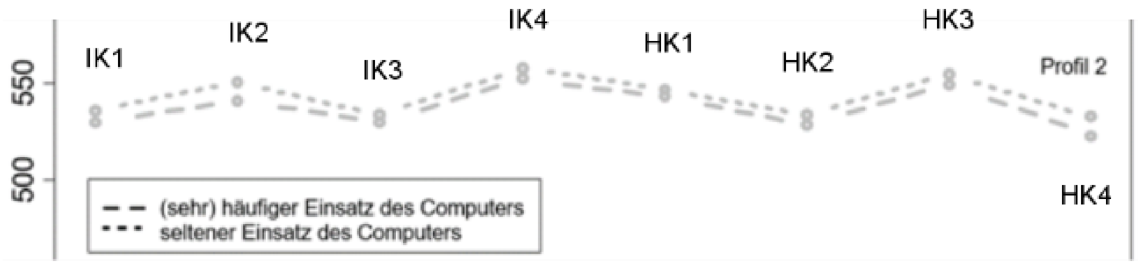
Profil 3: 4,2 Punkte mehr für diejenige Gruppe,
die den Computer selten nutzt

Profil 2: 5,94 Punkte mehr in jener Gruppe,
die den Computer selten nutzt

Profil 1: signifikant positiver Unterschied (15,74 Kompetenzpunkte; *p*-Wert << 0,01 mittels t-Test) zugunsten der Schüler*innen, die den Computer selten im Unterricht verwenden

Einzelne Kompetenzbereiche bei Profil 2

Nahezu parallele Verläufe in den Kompetenzen der beiden Schülergruppen: D. h. die Vorgabe des Kompetenzbereichs beeinflusst die Ausprägung der Profile deutlich stärker als die jeweilige Computeraffinität im Mathematikunterricht.

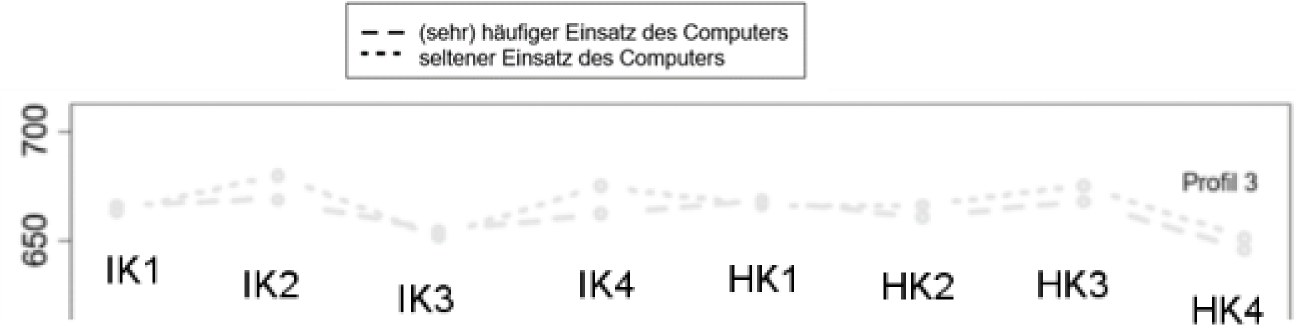


IK1 „Zahlen und Maße“	6,01 Punkte, *p*-Wert = 0,02
IK2 „Variable, funktionale Abhängigkeiten“	9,28 Punkte, *p*-Wert < 0,01
HK2 „Rechnen, Operieren“	4,93 Punkte, *p*-Wert = 0,04
HK3 „Interpretieren“	5,07 Punkte, *p*-Wert = 0,03
HK4 „Argumentieren, Begründen“	10,01 Punkte, *p*-Wert << 0,01

Zugunsten der Gruppe,
die den Computer selten benutzt

Einzelne Kompetenzbereiche bei Profil 3

Insgesamt besteht zwischen den Leistungen der beiden Schülergruppen in Profil 3 wie auch in Profil 2 kein signifikanter Unterschied (4,2 Punkte mehr für diejenige Gruppe, die den Computer selten nutzt).



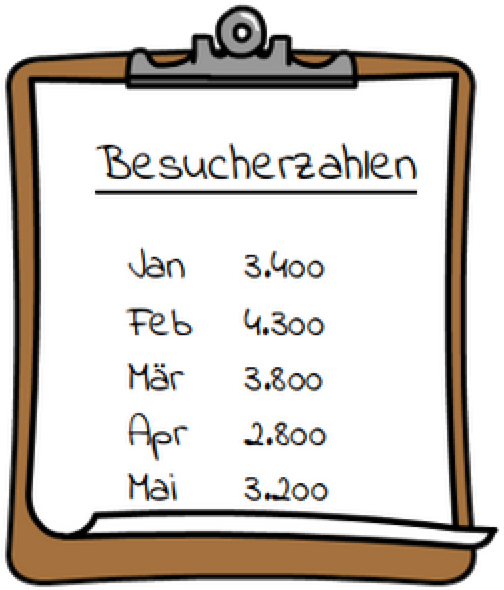
IK1 „Zahlen und Maße“	2,49 Punkte
IK3 „Geometrische Figuren und Körper“	2,55 Punkte
HK1 „Darstellen, Modellbilden“	2,27 Punkte
IK2 „Variable, funktionale Abhängigkeiten“	10,89 Punkte, *p*-Wert = 0,01
IK4 „„Statistische Darstellungen und Kenngrößen“	12,56 Punkte, *p*-Wert = 0,01

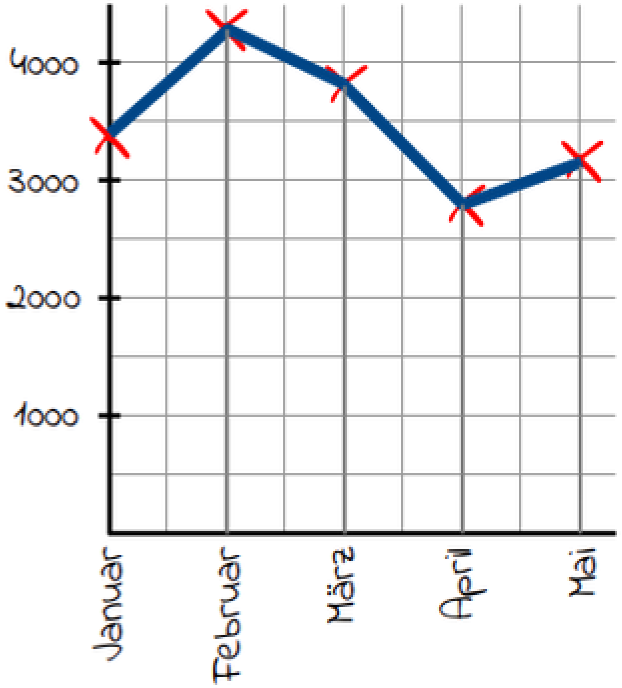
Zugunsten der Gruppe, die den Computer **(sehr) häufig** benutzt

Zugunsten der Gruppe, die den Computer **selten** benutzt

Profil 3: Die Unterschiede betragen also bis zu einem halben Lernjahr in IK4.

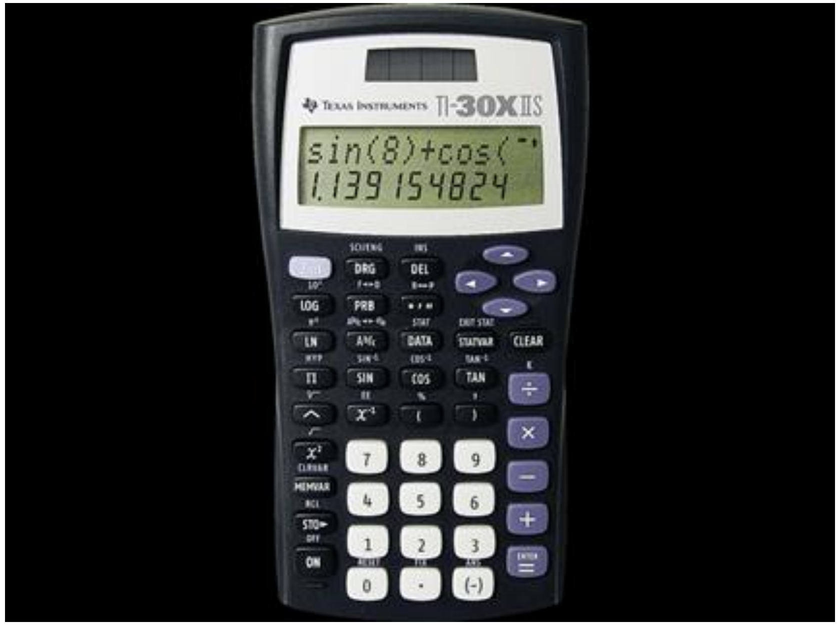
Wenn statistische Darstellungen bei den Bildungsstandardüberprüfungen gefragt sind, dann sind jene mit der Hand zu zeichnen (z. B. ein Liniendiagramm zu fünf vorgegebenen Werten in ein ebenfalls vorgegebenes und beschriftetes Koordinatensystem). Computeraffine Schülerinnen und Schüler haben daher in solchen Fällen keinen Vorteil (sondern, wenn überhaupt, einen Nachteil).





https://www.mathetreff-online.de/wissen/mathelexikon/liniendiagramm-zeichnen

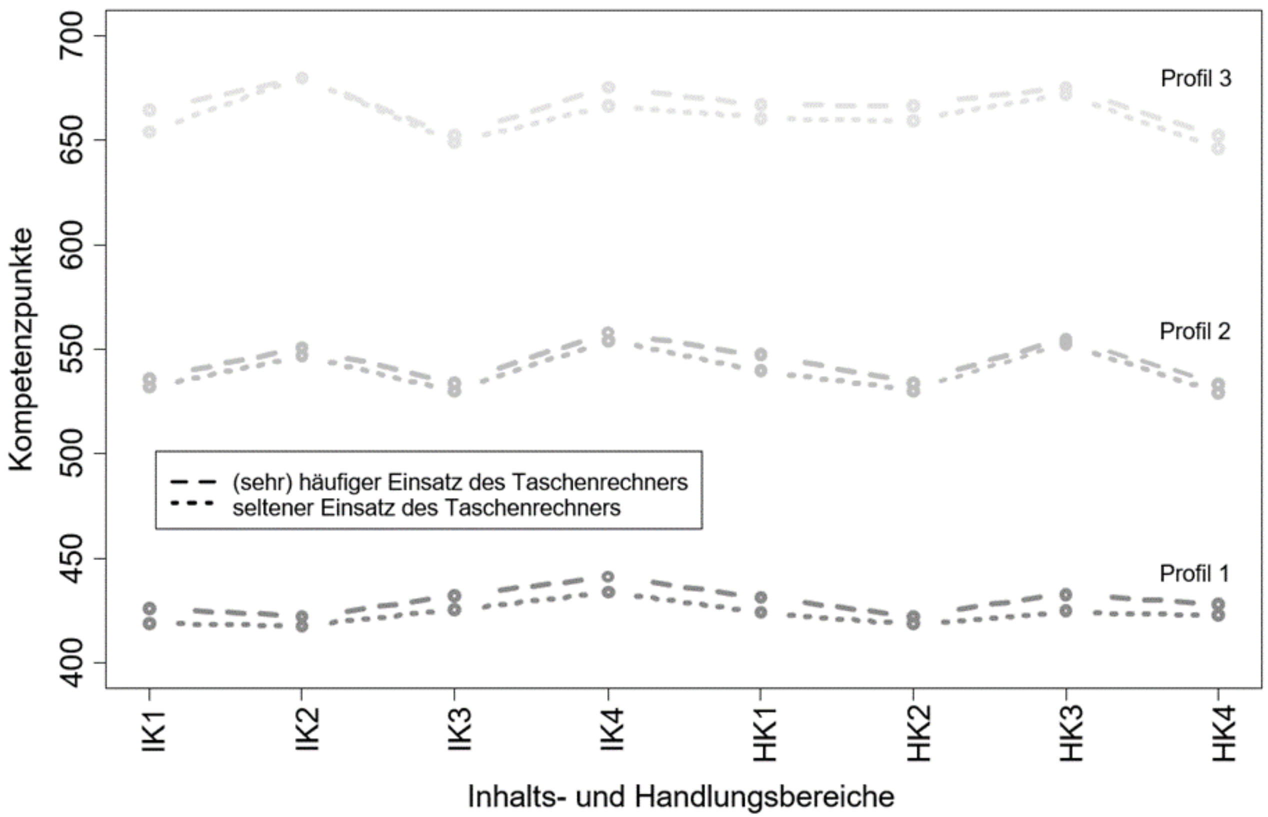
Nutzung des Taschenrechners



universität wien

Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen

Nutzung des Taschenrechners im Unterricht



Über alle Kompetenzbereiche hinweg

Hauptergebnis: jene Schülergruppe erzielt im Mittel bessere Ergebnisse, die den Taschenrechner (sehr) häufig einsetzt.

Differenz der Mittelwerte zwischen den Schülergruppen („(sehr) häufig“ vs. „selten“) beträgt zwischen

- 4,12 (Profil 2) und
- 6,05 (Profil 1)

Kompetenzpunkte.
Alle drei Differenzen sind nicht signifikant.

Es ergibt sich also ein ungefährer Unterschied von weniger als zwei Monaten Lernzeit in allen drei Profilen.

Einzelne Kompetenzbereiche: Profil 1 und Profil 2

- **Profil 1** und **Profil 2**: bis auf eine Ausnahme (HK3 „Interpretieren“ bei Profil 2) schneidet in allen Kompetenzbereichen die Schülergruppe mit dem (sehr) häufigen Taschenrechnereinsatz signifikant besser ab als jene mit dem seltenen Einsatz.
- **Kleinste signifikante Differenz**: 3,47 Kompetenzpunkte (*p*-Wert = 0,01) im Handlungsbereich HK4 „Argumentieren, Begründen“ in **Profil 2**
- **Größte signifikante Differenz**: 8,18 Kompetenzpunkten (*p*-Wert << 0,01) im Handlungsbereich HK3 „Interpretieren“ in **Profil 1**
- **Profil 2: maximale Differenz** von 7,35 Kompetenzpunkten (*p*-Wert << 0,01) im Handlungsbereich HK1 „Darstellen, Modellbilden“

Hier zeigt sich also die Entlastung vom Operieren durch die Verwendung des Taschenrechners zugunsten anderer mathematischer Tätigkeiten deutlich.

Einzelne Kompetenzbereiche: Profil 3

- **Einzige Ausnahme** von der „Regel“, dass die Schülergruppe mit häufigem Taschenrechnereinsatz leistungsstärker ist als die mit seltenem Gebrauch: Im Inhaltsbereich IK2 „Variable, funktionale Abhängigkeiten“ beträgt die (nicht signifikante) Differenz gerade einmal einem Zehntel Kompetenzpunkt zugunsten der Schülergruppe mit seltenem Einsatz des Taschenrechners.
- **Größte Differenz** gemessen **an allen drei Profilen:** im Inhaltsbereich IK1 „Zahlen und Maße“ (10,24 Kompetenzpunkte, p-Wert << 0,01) und ist ein eindrucksvoller Beleg dafür, dass der Taschenrechner offenbar den Kompetenzen der leistungsstärksten Schülerinnen und Schüler in diesem Inhaltsbereich nicht schadet.

  Immerhin entspricht das umgerechnet einem zeitlichen Vorsprung von mehr als dreieinhalb Monaten Lernzeit.

Zusammenfassung für Taschenrechnereinsatz

Maximale Differenzen	Kompetenzbereich	Differenz zugunsten des Taschenrechners
Profil 1	HK3 „Interpretieren“	8,18
Profil 2	HK1 „Darstellen, Modellbilden“	7,35
Profil 3	IK1 „Zahlen und Maße“	10,24

Ein wenig salopp formuliert kann man also sagen, dass der Einsatz des Taschenrechners den Kompetenzen der Schüler*innen jedenfalls nicht schadet und in einzelnen Gebieten sogar einen Vorsprung bis zu einem Drittel Lernjahr verschafft.

Angepasste Übungen

Gesamtvergleiche

- „(sehr) häufig“ : „selten“ = 1:2

- „(sehr) häufig“ versus „selten“: zwischen
  - 4,12 Kompetenzpunkten bei Profil 2 und
  - 6,56 Kompetenzpunkten bei Profil 1

  zugunsten der Schülergruppen die **selten** an ihr Niveau angepasste Übungen von der Lehrperson ausgesucht bekommen.

- Es ergibt sich also ein ungefährer Unterschied von weniger als zwei Monaten Lernzeit in allen drei Profilen.

Für die einzelnen Kompetenzbereiche generell

- in allen drei Profilen und
- in fast allen Kompetenzbereichen

schneiden die Schülergruppen, die selten für sie angepasste Übungen bearbeiten, (signifikant) stärker ab.

→ Testitems ≠ angepasste Übungen → Transferleistung, z. B.:

- geg.: Aussagen über den **Median** und das **arithmetische Mittel** einer Datenliste mit vier Einträgen
- ges.: Beurteilung richtig/falsch. Konkret musste **im Kontext** begründet entschieden werden, **welcher der beiden Mittelwerte der geeignetere** wäre.

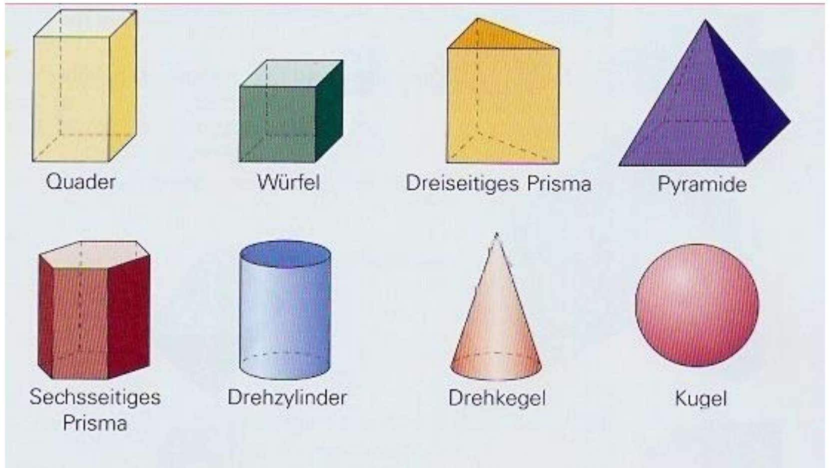
→ Lösungshäufigkeit: 16%

universität wien

Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen

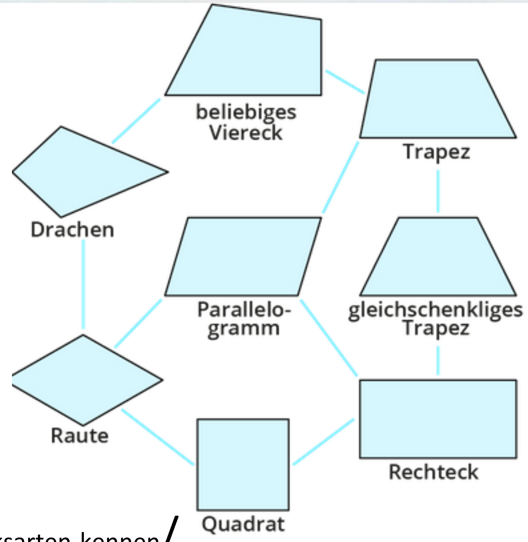
Inhaltsbereich IK3 „Geometrische Figuren und Körper“

- minimale Differenzen von
  - weniger als 3 Kompetenzpunkten (Profil 1) und
  - weniger als 1 Kompetenzpunkt (Profil 2 und Profil 3)



https://www.mathe-online.at/lernpfade/koerper/?kapitel=1&navig=l

- Umkehrschluss:
  - entweder keine angepassten Übungen im Unterricht
  - oder sie spielen für die Performanzen bei den Bildungsstandardüberprüfungen keine große Rolle



https://www.kapiert.de/mathematik/klasse-7-8/geometrie/vierecke-untersuchen-1/vierecksarten-kennen/

Inhaltsbereich IK2 „Variable, funktionale Abhängigkeiten“

- Größte signifikante Differenzen von 9 Kompetenzpunkten bei Profil 1 und bei Profil 2
- Zweitgrößte signifikante Differenz bei Profil 3: 7,49 Punkte

zugunsten jener, die selten mit angepassten Übungen zu tun haben.

Versuch einer **Interpretation**:

1. „**Termrechnen**“ ist ein **wesentlicher Teil** des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe 1 (neben dem Bruchrechnen)
2. **Abstraktheit** des Themas → **mehr angepasste Übungen** als in der Geometrie
3. **Nachteil** für genau **jene Schülergruppe**, die mit diesen Übungen konfrontiert wird

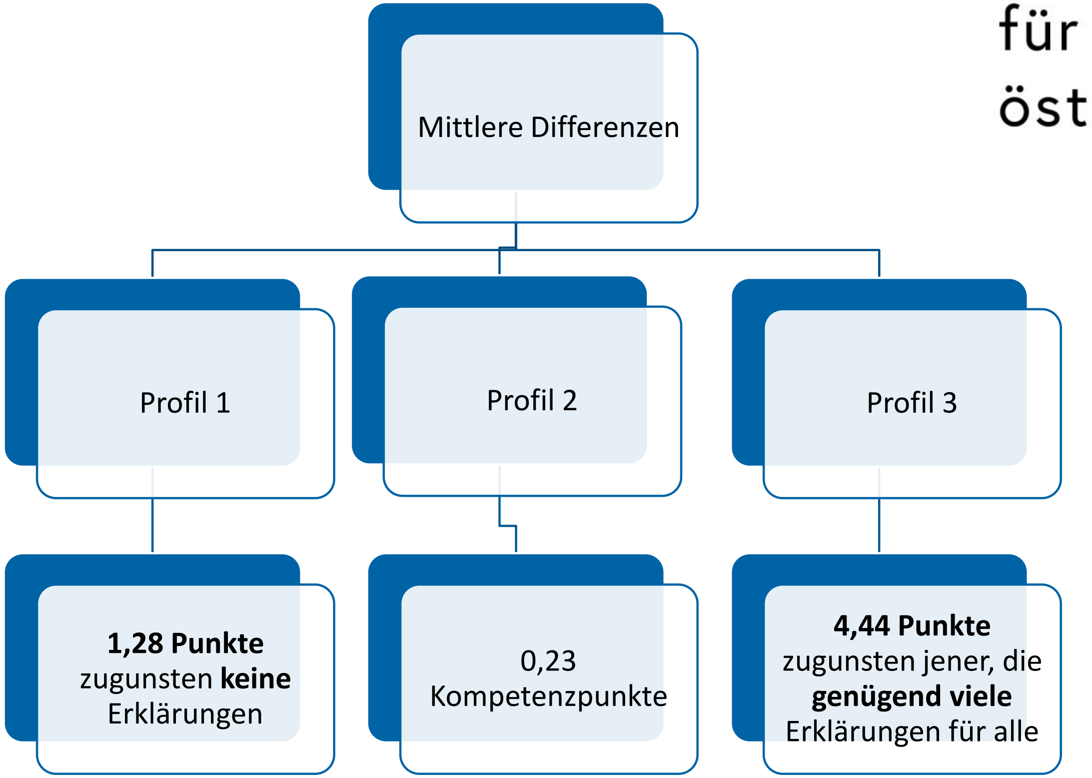
Z. B.: das richtige **Weg-Zeit-Diagramm** unter vieren auszusuchen, der **Kontext** wird in der **Angabe verbal beschrieben**
Lösungshäufigkeit: knapp 60%

Solange Erklärungen, bis alle verstanden haben

universität wien

Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen

Übersicht



Mögliche Erklärung: das Bearbeiten von Aufgaben in den Schüler*innen nicht vertrauten Kontexten fällt **schwachen Schüler*innen** schwerer, wenn sie den **gewohnten Hilfestellungen entbehren** müssen.

Mögliche Erklärung: **starke Schüler*innen** entwickeln trotz (oder wegen) häufiger Erklärungen **eigene, selbstständige Kompetenzen** zur erfolgreichen Auseinandersetzung mit fremden Aufgabenstellungen. Darüber hinaus **profitieren sie aber offenbar von den Erklärungen als zusätzliche Ressource**.

universität wien

Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen

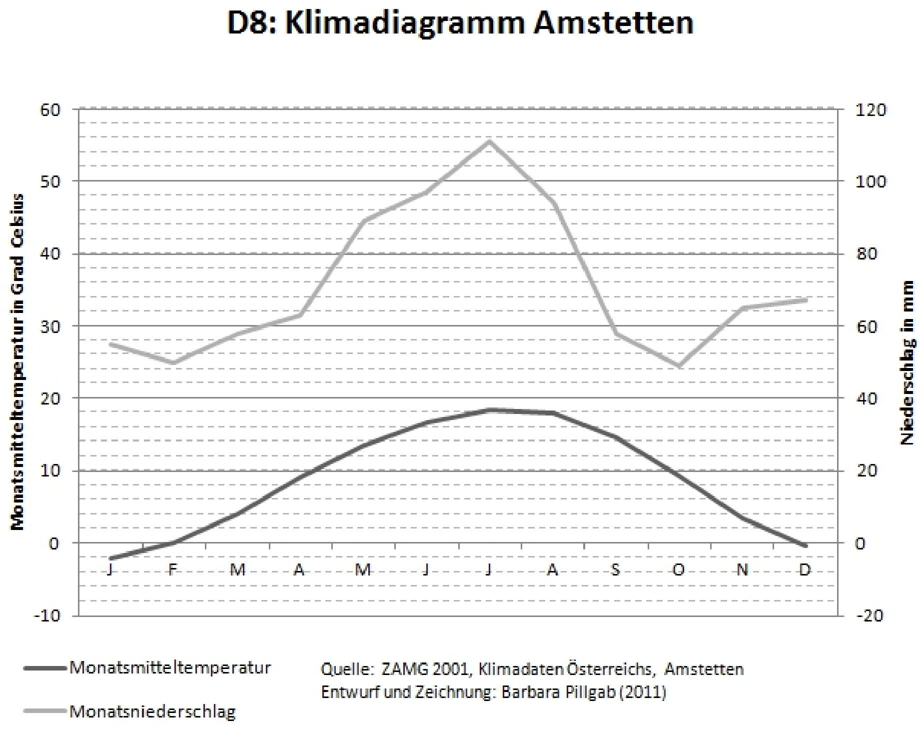
Inhaltsbereich IK4 „Statistische Kenngrößen und Darstellungen“

Profil 1 bis Profil 3: Jene Schülergruppe, die häufig mit umfassenden Erklärungen zu tun hat, ist stärker als die, in der das selten passiert.

Mögliche **Interpretation** aufgrund der **Items**:
In vielen Fällen sind
- **vorgegebene Diagramme zu interpretieren** oder
- **Diagramme** aufgrund von (kleinen) Datenmengen zu **zeichnen**.

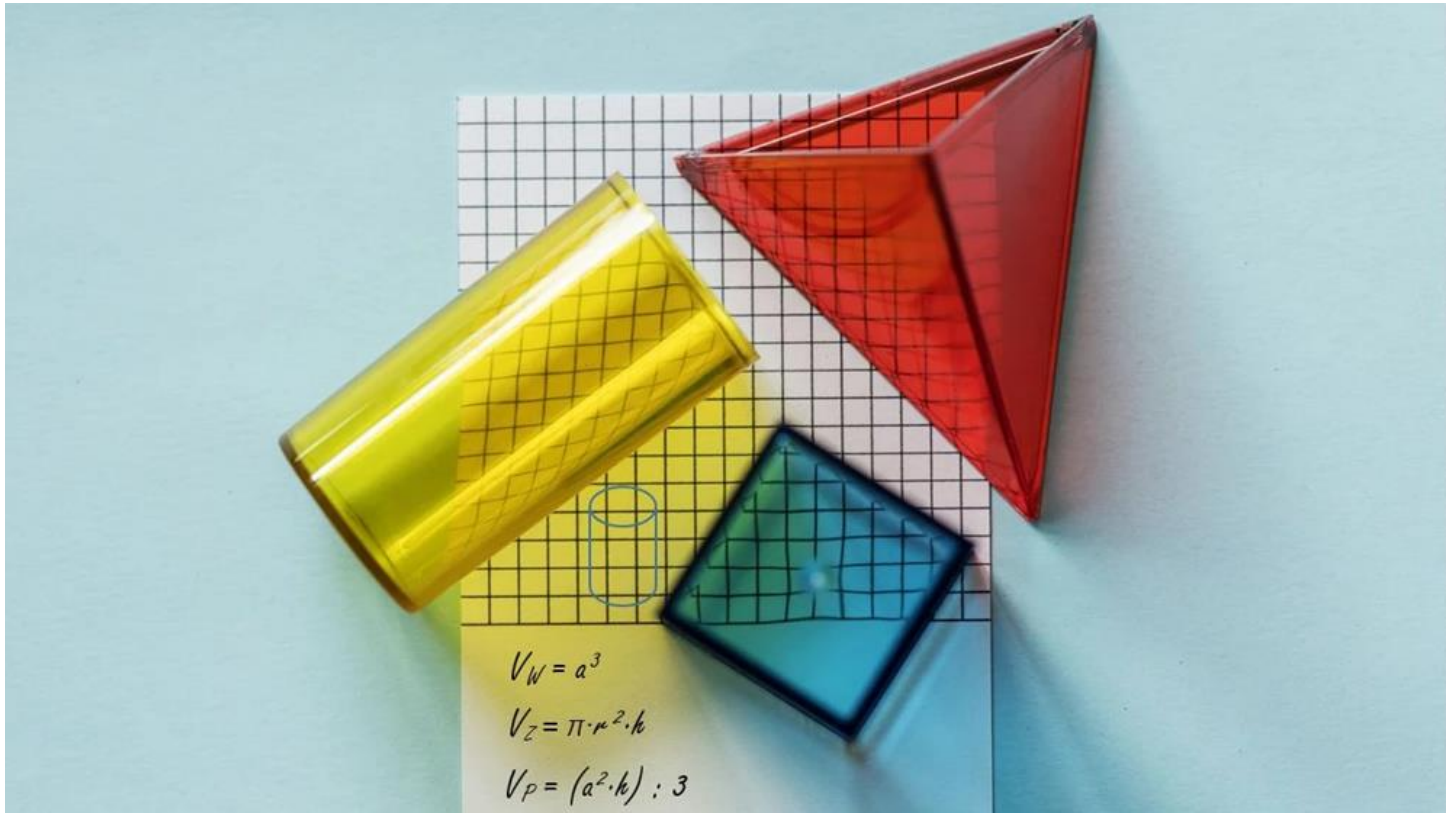
⟶ Aufgabenstellungen, die in jedem Statistik-Unterricht vorkommen
⟶ Erklärungen der Lehrpersonen auch bei den Testungen hilfreich

Passt für die **anderen Inhaltsbereiche nicht** in diesem Maße!



https://www.eduacademy.at/gwb/course/view.php?id=356

Handlungsableitungen



https://www.friedrich-verlag.de/mathematik/konzepte-methoden/das-eis-prinzip-sinnvoll-im-matheunterricht-umsetzen/

Zugrundeliegende Annahmen aus dem ersten Teil abgeleitet

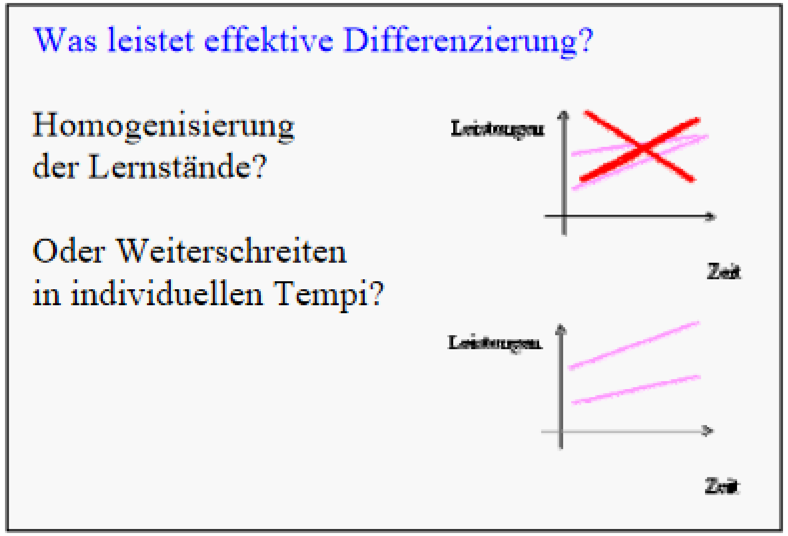
- „Nicht-Überlappung“ der Profillinien hat weitreichende Konsequenzen für den Mathematikunterricht: Weder starke noch schwache Schüler*innen weisen besondere Stärken in spezifischen Kompetenzbereichen auf, sondern sind durchgängig stark oder schwach.
- Offenbar hängen die Kompetenzen in den verschiedenen Inhalts- und Handlungsbereichen so stark zusammen, dass Steigerungen in einzelnen Bereichen immer gleichzeitig zu Steigerungen in allen Bereichen führen.
- Ausgewählte Kontexte (Taschenrechner, Aufgaben, Computer, Erklärungen) zeigen kaum Effekte zwischen den Leistungen der Schülerinnen und Schüler.
- Allerdings: Unterschiede sind immer im Profil der leistungsschwachen Schüler*innen am stärksten ausgeprägt.

Differenzieren im Mathematikunterricht

- unterrichtlichen Strategien, die darauf ausgelegt sind, der Unterschiedlichkeit der Lernenden durch geeignete Lernarrangements gerecht zu werden
- Optimale Förderung aller Schüler*innen auf deren individuellen Niveaus

→ Differenzierung hat also nicht zum Ziel, aus einer heterogenen Gruppe eine möglichst homogene Gruppe zu machen, sondern allen Jugendlichen die Möglichkeit zu eröffnen, sich ihren Voraussetzungen entsprechend bestmöglich zu entwickeln (Bruder & Reibold 2012, Abschnitt 2). Dies ist selbstredend eine enorm hohe Anforderung an Unterricht und kann die

→ „Leistungsschere weiter auseinanderklaffen" (Hußmann & Prediger 2007, S. 2) lassen.



http://www.mathematik.tu-dortmund.de/~prediger/veroeff/07-PM-H17-Hussmann-Prediger-Differenzieren-Webfassung.pdf

Arten der Differenzierung

Differenzierung

- **Innere**: didaktische Strategien innerhalb einer Lerngruppe, um Unterschiedlichkeiten zu berücksichtigen
  - **Geschlossen**: z. B. Stationenbetrieb →
  - **Offen** durch
- **Äußere**: z. B. Aufteilung in Leistungsgruppen

Eine Kombination beider Herangehensweisen der inneren Differenzierung kann abhängig von der jeweiligen Lernsituation sinnvoll sein (Hußmann & Prediger 2007, S. 2).

Schwierigkeitsgenerierende Merkmale für geschlossene Differenzierung

- Art der kognitiven Aktivitäten: z. B. Explorieren, Muster und Zusammenhänge entdecken, formulieren, verallgemeinern, begründen, argumentieren
- technische Kompliziertheit der Ausführung des Lösungsplanes: Wie groß und technisch kompliziert ist der Rechenaufwand (z. B. Größe der Nenner)?
- Komplexitätsgrad: Wie übersichtlich ist die Situation und wie vielschrittig der Lösungsweg?
- Sprachliche Komplexit… werden?

> – hoher Arbeitsaufwand der Lehrkraft beim Erstellen der Aufgaben ist limitierender Faktor
> \+ Möglichkeit, klare Erwartungshorizonte festzusetzen (Prediger 2008)

- Grad der Formalisierung der Aufgabenstellung und der geforderten Lösung: Erfordert die Aufgabe formale Schreibweisen? Wie vertraut sind diese?
- Vorstrukturiertheit bzw. Offenheit der Lösung: Inwieweit ist durch die Enge der Aufgabenstellung bereits alle Vorstrukturierungsarbeit geleistet?
- Bekanntheitsgrad der Mittel: abhängig von Positionierung im Lernprozess

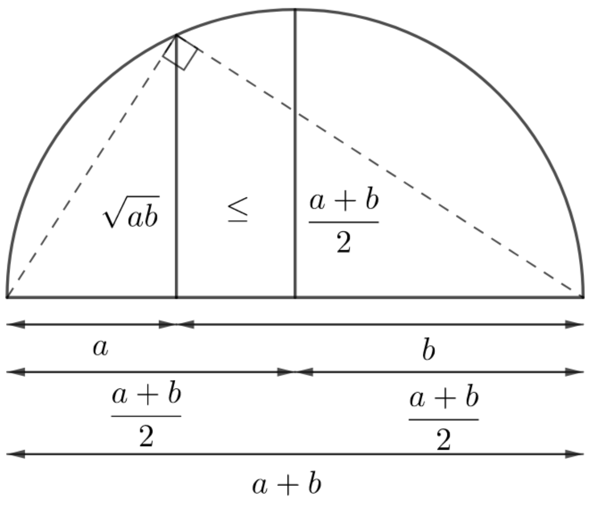
Beispiele

- **Explorieren, Muster erkennen, Verallgemeinern**: Möglichst viele Stammbrüche finden, deren Summe wieder ein Stammbruch ist.

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \qquad \frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12} \qquad \frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20} \qquad \frac{1}{6}=\frac{1}{15}+\frac{1}{10}$$

- **Grad der Formalisierung**:
  Mittelungleichung $\sqrt{x \cdot y} \leq \frac{x+y}{2}$ für alle x, $y > 0$
  algebraisch oder geometrisch begründen

$$\begin{aligned}\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy &= \frac{1}{4}(x^2+2xy+y^2) - xy \\ &= \frac{1}{4}(x^2-2xy+y^2) \\ &= \left(\frac{x-y}{2}\right)^2.\end{aligned}$$



Problemlöseaufgabe: eventuell individuelle Voraussetzungen

Existenz einer „Barriere“ (Bruder & Collet 2011, S. 11)

https://epub.jku.at/obvulihs/content/titleinfo/2751436/full.pdf

i. If the sum of two numbers is 12 and their product is 4, find the sum of their reciprocals.

ii. Ein Mann geht Äpfel pflücken. Um in die Stadt zu kommen, muss er sieben Tore passieren. An jedem Tor steht ein Wächter und verlangt von ihm die Hälfte seiner Äpfel und einen Apfel mehr. Am Schluss bleibt dem Mann ein Apfel übrig. Wie viele hatte er zu Beginn?

i. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{x\cdot y}=\frac{12}{4}=3$ statt $\begin{aligned} x+y&=12 \\ x\cdot y&=4 \end{aligned}$

ii. Rückwärtsarbeiten

Kontextuelle Komplexität

universität wien

Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen

Sprachliche Komplexität

Linguistische Komplexität

hohe linguistische Komplexität	Bei einem Spendenlauf der Santander Bank nehmen 4000 Schüler, für die jeweils ein Betrag von 10 Euro gespendet wird, und 1200 Erwachsene, für die jeweils 5 Euro gespendet werden, teil. Die Teilnahmegebühr, welche zur Hälfte für die Verpflegung der Teilnehmer verwendet und zur anderen Hälfte ebenfalls in die Spendensumme einfließt, beträgt für Schüler 6 Euro und für Erwachsene 12 Euro. Wie hoch sind die diesjährigen Spenden? Notiere deinen Weg zur Lösung.	**Kilometer für den guten Zweck** 04.05.2015, Westdeutsche Zeitung Beim Spendenlauf, welcher von der Santander Consumer Bank und der Stadt Mönchengladbach organisiert wird, nimmt auch Joey Kelly teil. Joey, der ehemals Musiker war und jetzt Extremsportler ist, gerät richtig ins Schwärmen und sagt: „Ich habe schon an vielen Läufen teilgenommen, aber der Spendenlauf in Mönchengladbach ist nicht nur einer der größten in Deutschland, sondern einer der bestorganisierten in Europa, sodass ich es kaum erwarten kann." Joey Kelly, der schon in den vergangenen Jahren das Aushängeschild des Laufs war, wird am Sonntag, den 14. Juni, nicht nur Medaillen an die besten Läufer verteilen, sondern auch selbst die Laufschuhe schnüren, um mit 4000 sportbegeisterten Schülern sowie 1200 erwachsenen Läufern die Stadt unsicher zu machen. Während Grundschüler 1,3 Kilometer laufen, können auch Strecken von 5 Kilometern oder 10 Kilometern absolviert werden. Nach dem Start der Grundschüler um 10:30 Uhr, ertönt der Startschuss für den Jedermann-Lauf über fünf Kilometer und den Hauptlauf, welcher von Oberbürgermeister und Schirmherr Hans Wilhelm Reiners abgegeben wird, erst nachmittags. Start- und Zielpunkt ist die Santander Bank am gleichnamigen Platz. Abgerissen werden die Kilometer jedoch nicht nur für eine persönliche Bestzeit, vielmehr beträgt der Spendenbetrag, den die Santander Bank einem guten Zweck widmet, pro teilnehmendem Schüler 10 Euro und für jeden anderen Teilnehmer 5 Euro. Die Teilnahmegebühr, welche zur Hälfte für die Verpflegung der Teilnehmer verwendet wird und zur anderen Hälfte ebenfalls in die Spendensumme einfließt, beträgt für Erwachsene 12 Euro und für Schüler 6 Euro. Im vergangenen Jahr, als 4800 Schüler mitliefen, kamen so über 60.000 Euro zusammen. Auch das Rahmenprogramm abseits der Strecke, bestehend aus einer Hüpfburg, Kinderschminken sowie zahlreichen Verkaufsständen mit verschiedenen Leckereien, lockt viele Besucher an. Wie hoch sind die diesjährigen Spenden? Notiere deinen Weg zur Lösung.
niedrige linguistische Komplexität	Die Santander Bank veranstaltet einen Spendenlauf für einen guten Zweck. Sie spendet für jeden der 4000 Schüler 10 Euro. Für jeden der 1200 teilnehmenden Erwachsenen spendet sie 5 Euro. Schüler zahlen für die Teilnahme 6 Euro. Erwachsene zahlen 12 Euro. Die Hälfte dieser Gelder wird für die Verpflegung der Läufer verwendet. Den Rest spendet die Santander Bank ebenfalls. Wie hoch sind die diesjährigen Spenden? Notiere deinen Weg zur Lösung.	**Kilometer für den guten Zweck** 04.05.2015, Westdeutsche Zeitung Der Spendenlauf in Mönchengladbach wird von der Santander Consumer Bank und der Stadt organisiert. An dem Lauf nimmt auch Joey Kelly teil. Der ehemalige Musiker ist inzwischen Extremsportler. Er gerät richtig ins Schwärmen und sagt: „Ich habe schon an vielen Läufen teilgenommen. Der Spendenlauf in Mönchengladbach ist nicht nur einer der größten in Deutschland. Er ist auch einer der bestorganisierten in Europa. Ich kann es kaum erwarten". Wie schon in den vergangenen Jahren ist er das Aushängeschild des Santander-Spendenlaufs. Am Sonntag, den 14. Juni, wird Joey Kelly die Medaillen an die besten Läufer verteilen. Außerdem wird er selber teilnehmen. Mit ihm laufen 4000 sportbegeisterte Schüler und 1200 erwachsene Läufer. Insgesamt können die Läufer drei verschiedene Strecken absolvieren. Die Grundschüler laufen 1,3 Kilometer. Alle anderen können 5 oder 10 Kilometer laufen.Die Grundschüler starten ihren Lauf um 10:30 Uhr. Der Jedermann-Lauf über 5 Kilometer und der 10-Kilometer Hauptlauf starten erst nachmittags. Oberbürgermeister Hans Wilhelm Reiners gibt hierbei das Zeichen für den Start. Er ist zusätzlich Schirmherr des Spendenlaufs. Alle Läufer starten und enden an der Santander Bank am gleichnamigen Platz. Die Läufer laufen jedoch nicht nur für eine persönliche Bestzeit. Die Santander Bank spendet pro Schüler 10 Euro für einen guten Zweck. Für jeden anderen Teilnehmer spendet sie 5 Euro. Erwachsene zahlen für die Teilnahme 12 Euro. Schüler zahlen 6 Euro. Die Hälfte dieser Gelder wird für die Verpflegung der Läufer verwendet.Den Rest spendet die Santander Bank ebenfalls. Im vergangenen Jahr liefen 4800 Schüler bei dem Lauf mit. Es kamen über 60.000 Euro Spenden zusammen. Auch abseits der Strecke wird den Zuschauern viel geboten. Zahlreiche Stände verkaufen verschiedene Leckereien, schminken Kinder und bieten eine Hüpfburg an. Wie hoch sind die diesjährigen Spenden? Notiere deinen Weg zur Lösung.
	niedrige situationale Komplexität (Textaufgaben)	*hohe situationale Komplexität (Zeitungsartikelaufgaben)*

(Plath 2020, S. 249)

Selbstdifferenzierende Aufgaben für innere Differenzierung

Dabei arbeiten die Lernenden durchgehend an denselben Fragen, bestimmen dabei selbst Umfang und Tiefe der Bearbeitung.

„Die Chance, Mathematik mit Erfahrungen zu verbinden, sollte man […] nutzen, denn Erkenntnisse, die aus einem enaktiven Erleben erwachsen, bleiben auch nachhaltiger im Gedächtnis." (Barzel 2009, S. 10)

Funktionales Denken

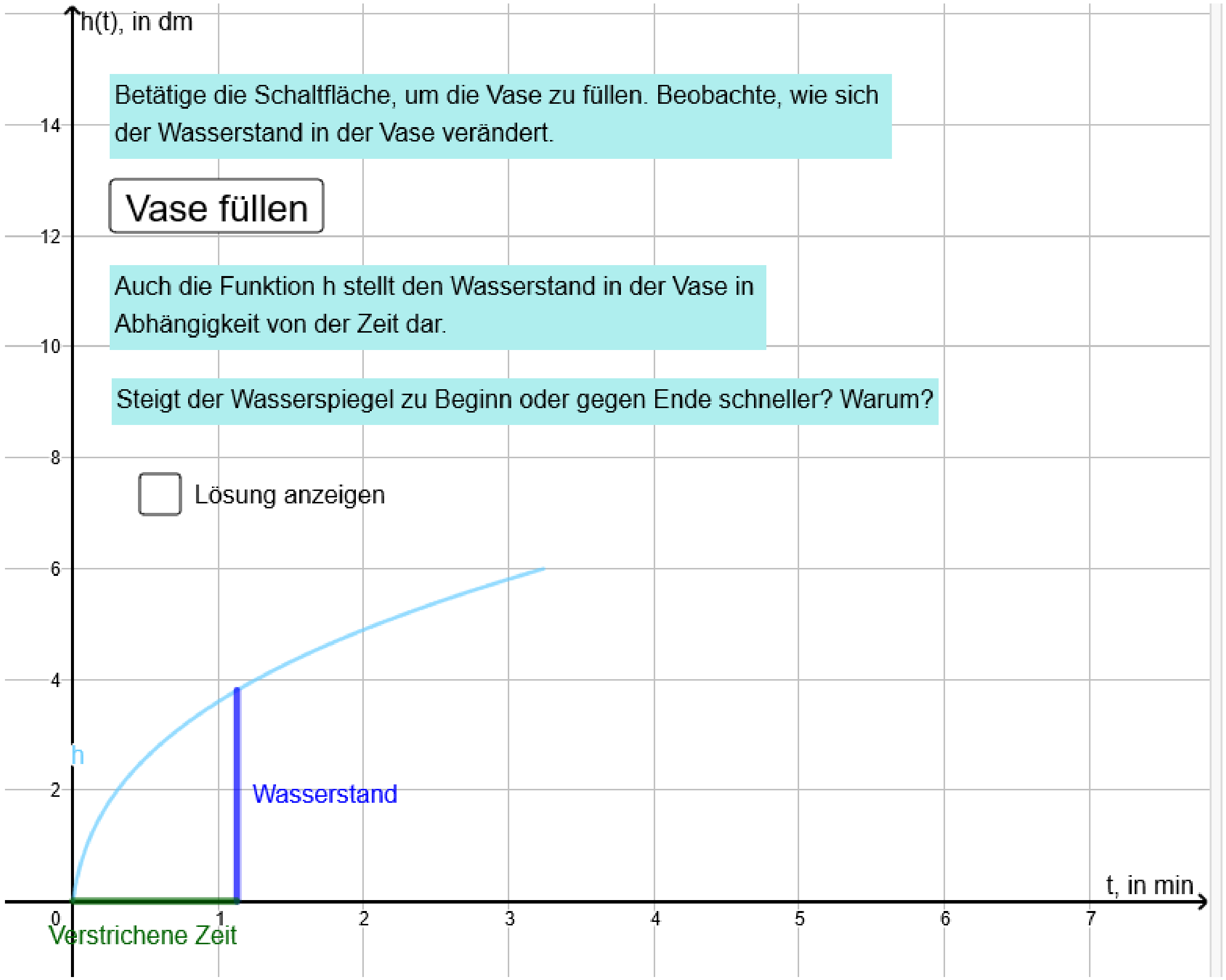
„Füllgraphen werden oft genutzt, um Grundvorstellungen zu funktionalen Zusammenhängen zu erarbeiten und zu festigen. Dabei vernetzen sie räumliche Vorstellungen mit graphischen Darstellungen über funktionale Zusammenhänge. Bei den Aufgaben zu Füllgraphen wird meist […] implizit vorausgesetzt, dass die im Querschnitt gezeichnet vorgegebenen Gefäße rotationssymmetrisch sind und sich gleichmäßig füllen. Die Füllgeschwindigkeit im Sinne des pro Zeiteinheit hinzukommenden Flüssigkeitsvolumens ist also konstant." (Lambert & Hilgers o. J.)

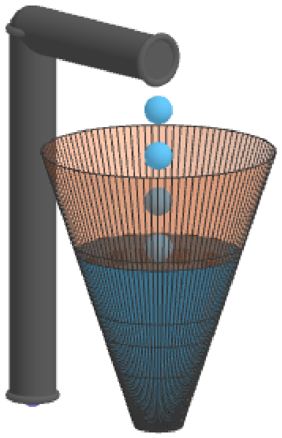
- Zuordnungsaspekt: jedem Wert eines Bereiches wird ein bestimmter Wert zugeordnet
- Kovariationsaspekt: gemeinsames Änderungsverhalten zweier Werte
- Objektaspekt: Operationen wie z. B. den Graphen verschieben

Grundvorstellungen
(Barzel 2009, S. 13)

Erstellen von Füllgraphen bzw. -funktionen

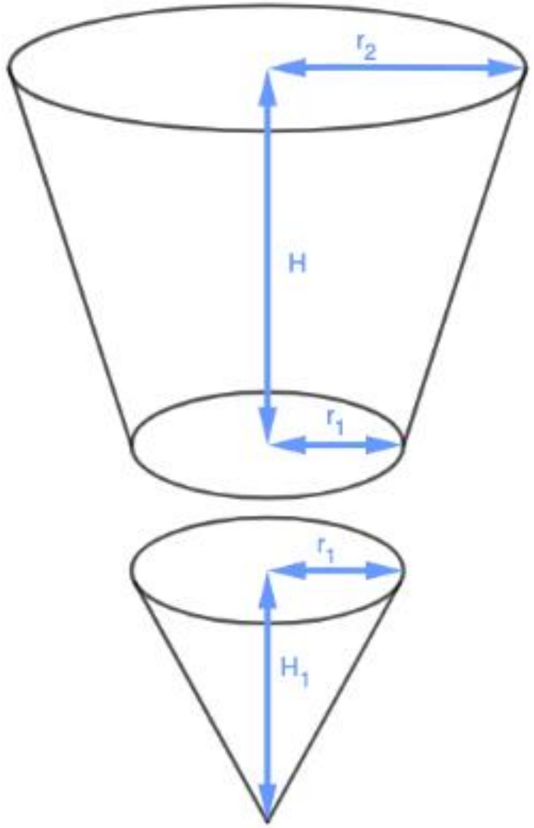
https://www.dzlm.de/files/material/Materialien_020_0.pdf





https://www.geogebra.org/m/e2crshz5

1. Schritt: Herleitung einer Volumsformel



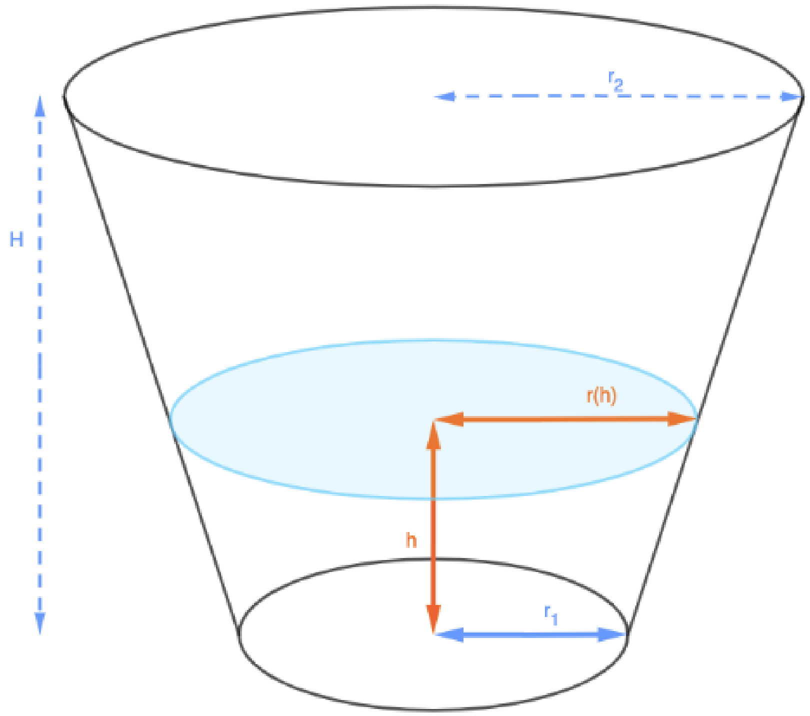
Das Volumen des Kegelstumpfes ergibt sich, wenn vom Volumen eines Kegels, das Volumen eines kleineren Kegels abgezogen wird:

$$V = \frac{r_2^2 \cdot \pi \cdot (H_1 + H)}{3} - \frac{r_1^2 \cdot \pi \cdot H_1}{3}$$

Vereinfacht man diese Differenz und drückt H_1 mit Hilfe des Strahelsatzes durch H, r_1 und r_2 aus, so erhält man:

$$V = \frac{H \cdot \pi}{3} \cdot (r_2^2 + r_1 \cdot r_2 + r_1^2)$$

2. Schritt: Änderung des Radius der Querschnittsfläche

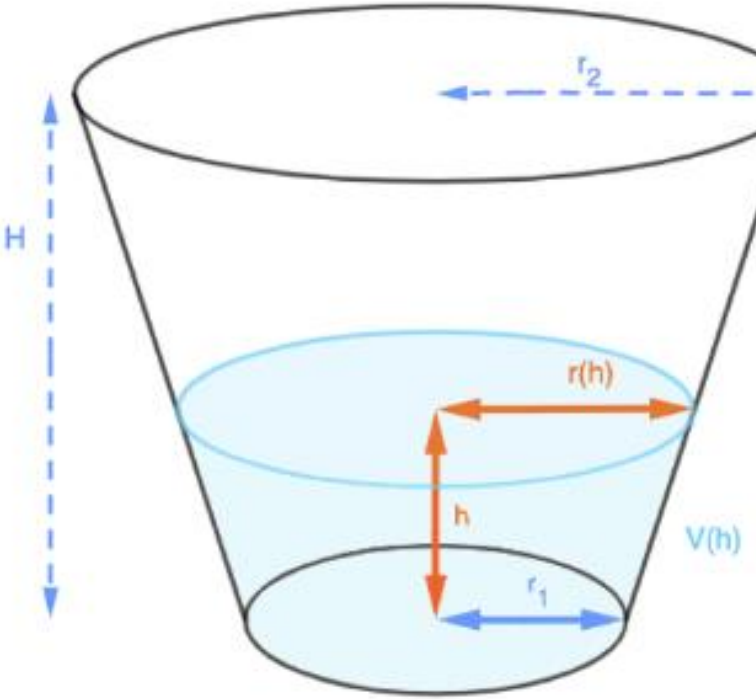


Der Radius r(h) der blauen Querschnittsfläche wächst linear mit zunehmender Höhe h an. Er kann also durch eine Funktion der Form $r(h) = k \cdot h + d$ beschrieben werden.
Am Boden, also bei der Höhe h = 0, ist der Radius r(h) so groß wie der Radius r_1 und somit gilt:
$r(0) = r_1 = d$.

Außerdem gilt:
$r(H) = r_2 = k \cdot H + r_1$

Umformen auf k liefert
$k = \frac{r_2 - r_1}{H}$.
Wir erhalten also die lineare Funktion r mit
$$r(h) = \frac{r_2 - r_1}{H} \cdot h + r_1 .$$

3. Schritt: $V = V(h)$



Um das Volumen V(h) des Wassers im Kegelstumpf in Abhängigkeit von der Füllhöhe h angeben zu können, verwenden wir die oben aufgestellte Formel für das Volumen, setzen jedoch h anstelle der Höhe H ein und r(h) anstelle von r_2.

Aus $V = \frac{H \cdot \pi}{3} \cdot \left(r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2\right)$ wird also:

$$V(h) = \frac{h \cdot \pi}{3} \cdot \left[r_1^2 + r_1 \cdot \left(\frac{r_2 - r_1}{H} \cdot h + r_1\right) + \left(\frac{r_2 - r_1}{H} \cdot h + r_1\right)^2\right]$$

4. Schritt: Umkehrfunktion mit CAS

1

$$V = \pi \, \frac{h}{3} \left(r_1^2 + \left(\frac{r_2 - r_1}{H} \, h + r_1 \right) r_1 + \left(\frac{r_2 - r_1}{H} \, h + r_1 \right)^2 \right)$$

$$\rightarrow \; \mathbf{V = \frac{1}{3} \, h \, \pi \left(r_1^2 + \left(h \, \frac{-r_1 + r_2}{H} + r_1 \right)^2 + r_1 \left(h \, \frac{-r_1 + r_2}{H} + r_1 \right) \right)}$$

2

$$\text{Löse}\left(V = \pi \, \frac{h}{3} \left(r_1^2 + \left(\frac{r_2 - r_1}{H} \, h + r_1 \right) r_1 + \left(\frac{r_2 - r_1}{H} \, h + r_1 \right)^2 \right), h \right)$$

$$\rightarrow \; \left\{ \mathbf{h = \frac{\sqrt[3]{-H^3 \, r_1^3 \, \pi^3 + 3 \, H^2 \, V \, r_1 \, \pi^2 - 3 \, H^2 \, V \, r_2 \, \pi^2} + H \, r_1 \, \pi}{\underbrace{r_1 \, \pi - r_2 \, \pi}}} \right\}$$

5. Schritt: händische (!) Umformung

Für h(V) gilt also:

$$h(V) = \frac{\sqrt[3]{-H^3 \cdot r_1^3 \cdot \pi^3 + 3 \cdot H^2 \cdot V \cdot r_1 \cdot \pi^2 - 3 \cdot H^2 \cdot V \cdot r_2 \cdot \pi^2} + H \cdot r_1 \cdot \pi}{r_1 \cdot \pi - r_2 \cdot \pi} =$$

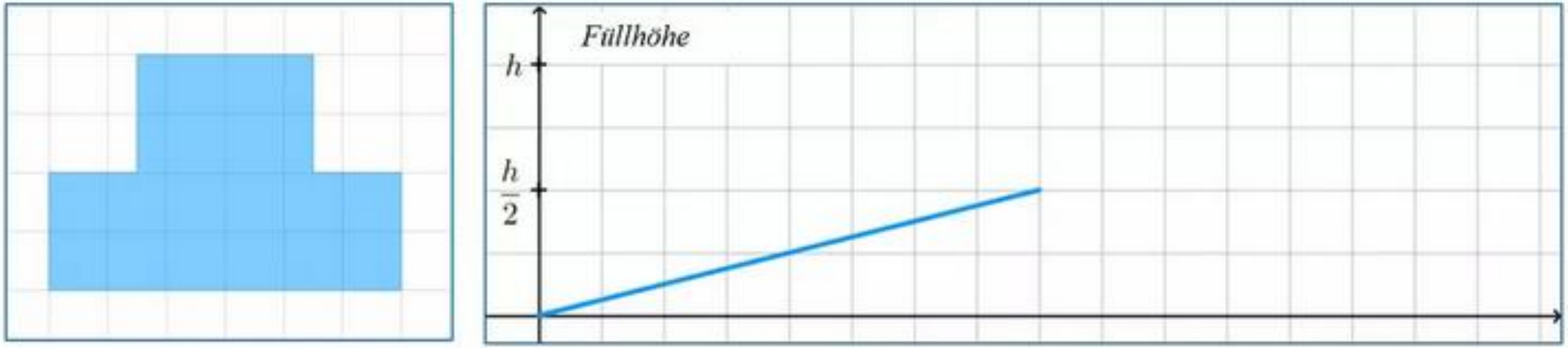
$$= \frac{H \cdot \pi}{r_1 - r_2} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{3 \cdot V \cdot (r_1 - r_2)}{\pi \cdot H} - r_1^3} + r_1 \right) =$$

$$= \frac{H \cdot \pi}{r_1 - r_2} \cdot (-1) \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{3 \cdot V \cdot (r_1 - r_2)}{\pi \cdot H} - r_1^3} + r_1 \right) \cdot (-1) =$$

$$= \frac{H \cdot \pi}{r_2 - r_1} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{3 \cdot V \cdot (r_2 - r_1)}{\pi \cdot H} + r_1^3} - r_1 \right)$$

$$\boxed{V = v_f \cdot t}$$

Möglichkeiten der Differenzierung 1 (Lambert & Hilgers o. J.)

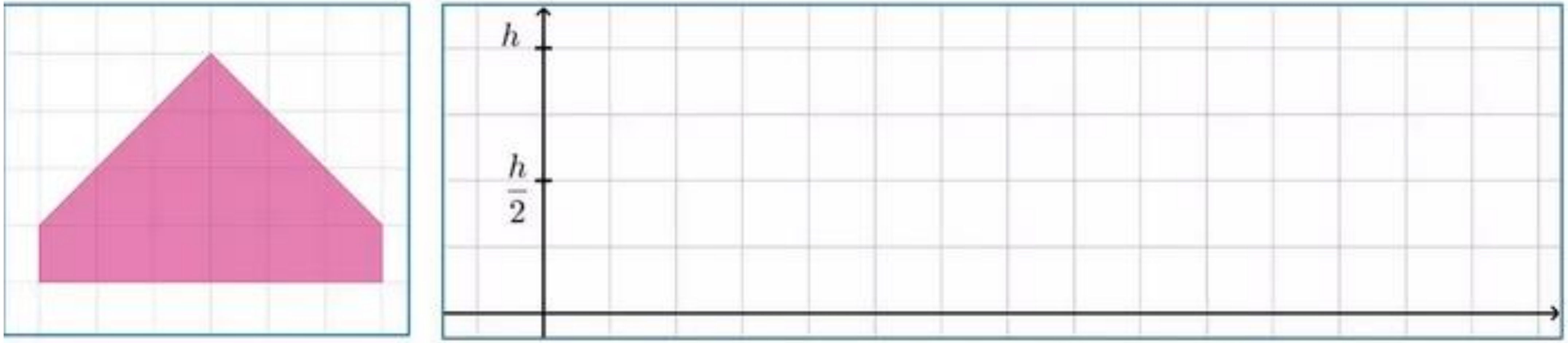


Ein Füllgraph für den unteren Zylinder ist gegeben. Wie geht es weiter? Foto: A. Lambert

Möglichkeiten der Differenzierung 2 (Lambert & Hilgers o. J.)

Querschnitt 2: Der obere Zylinder ist ein Drittel so breit wie der untere. Wie sieht jetzt der Füllgraph aus?

Möglichkeiten der Differenzierung 3 (Lambert & Hilgers o. J.)



Wie sieht der Füllgraph aus, wenn auf dem Zylinder ein dreimal so hoher Kegel ist? Foto: A. Lambert

Zylinder und Kegel haben dasselbe Volumen → Zeitdauer bis zur vollständigen Befüllung

Blütenaufg

- Die Blütenaufg
  geschlossene
- Ein Erwartung
- Die ersten Teil
  Umkehraufgab
- Der Kontext w
  Blickwinkeln b
  variiert.
- Eine komplette
  erforderlich.
- Der Ausführun
  nicht zu hoch

nd nicht in cm.
n.
W) an. Wie viel cm
ße W 30?
ßband zeigt 63,5 cm.

abelle an, um schnell
zu die Ergebnisse

e Größe in cm weißt

mit einer Dezimalzahl
ößer als die

Resümee

– Eine Herausforderung stellt sich dabei sofort, die Lernenden dazu zu bringen, ihrem Niveau entsprechend zu arbeiten (etwa bei einer Aufgabentheke nicht immer nur die einfachen Aufgaben auszuwählen).

\+ Andererseits kann es natürlich auch passieren, dass leistungsschwache Schüler*innen die Offenheit nützen und sich auch einmal an einer aufwendigeren Aufgabenstellung versuchen.

Drei didaktische Kernelemente für offene Differenzierung (Bruder und Reibold 2012, Abschnitt 2):

- „Unterstützung der *Selbstregulation* (Zielklarheit und Zielbildung, Selbsteinschätzung),
- Differenzierte *Ausgangsniveausicherung* (Basiswissen und -können wachhalten und entstandene Lücken füllen),
- Differenzierte *kognitive Aktivierung* (bei Erkenntnisgewinnung und beim Festigen).“

(ebd., S. 74 f., Hervorhebung im Original)

Methodische Hinweise

für differenzierten Unterricht

universität wien

Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen

An Vorerfahrungen anknüpfen

Z. B. zum

- Inhaltsbereich IK4 „Statistische Darstellungen und Kenngrößen“ und zum
- Handlungsbereich HK3 „Interpretieren“

→ **Diagnostische Fähigkeiten** der Lehrkraft, um
- die **individuellen Lernvoraussetzungen** aufzuspüren und um
- **differenzierende, passende Aufgabenstellungen** zu stellen (Leuders & Prediger 2012)

https://www.derstandard.at/story/2000134884018/von-40-bis-175-prozent-wie-der-gaspreisanstieg-haushalte-unterschiedlich

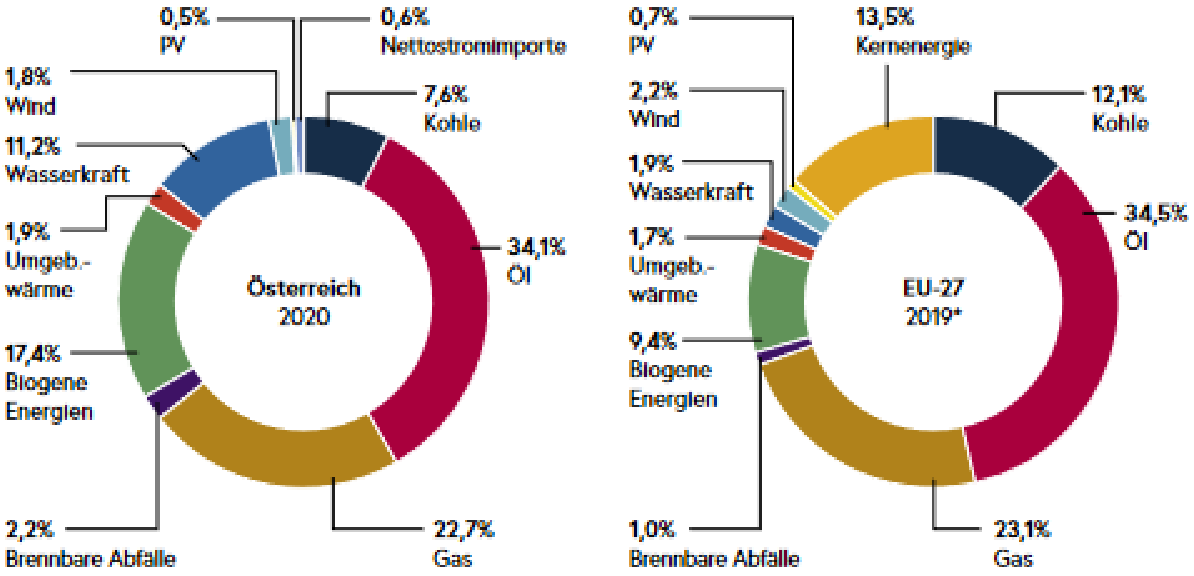
DERSTANDARD online vom 13.04.2022

universität wien

Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen

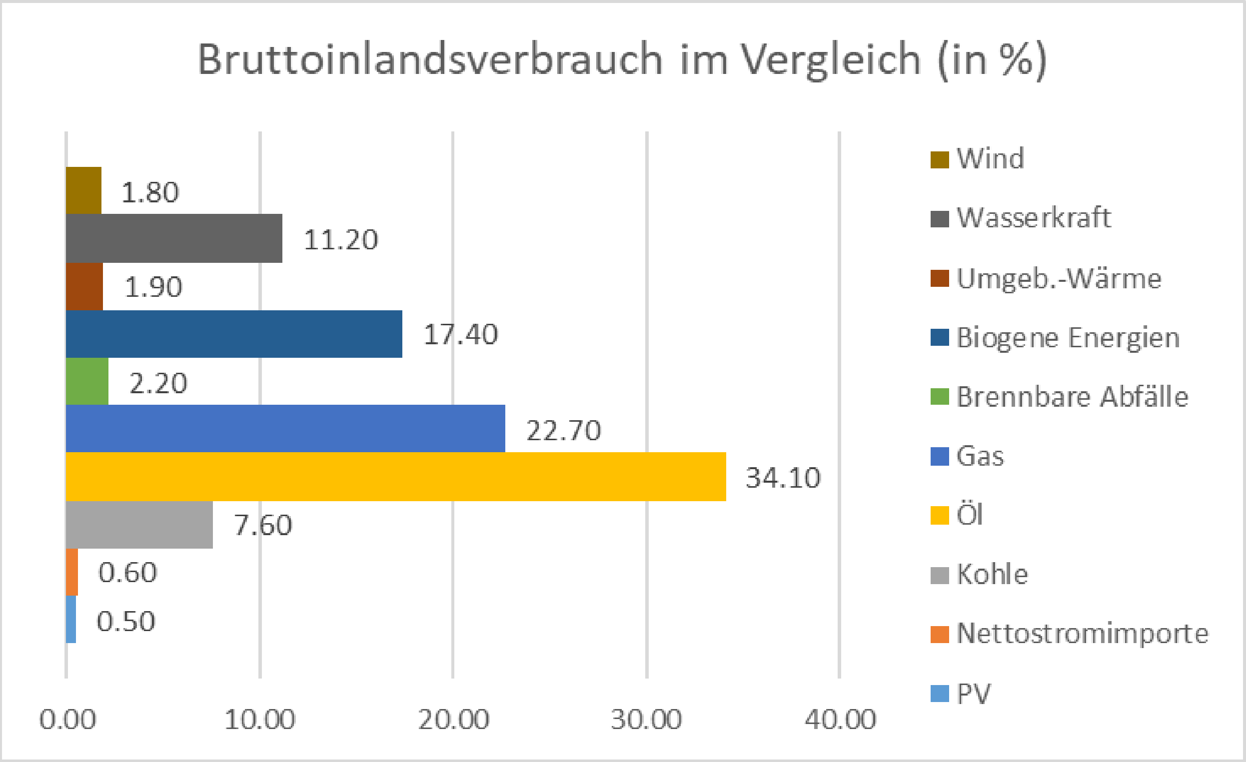
Reflexion: Kreisdiagramme etwa eignen sich nicht zur Darstellung von Merkmalen mit vielen Ausprägungen.

Bruttoinlandsverbrauch im Vergleich



https://www.bmk.gv.at/themen/energie/publikationen/zahlen.html

Balkendiagramm mit Excel erstellt: „besser“?



universität wien

Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen

Inhaltsbereich IK4 „Statistische Darstellungen und Kenngrößen“: Möglichkeiten der Differenzierung

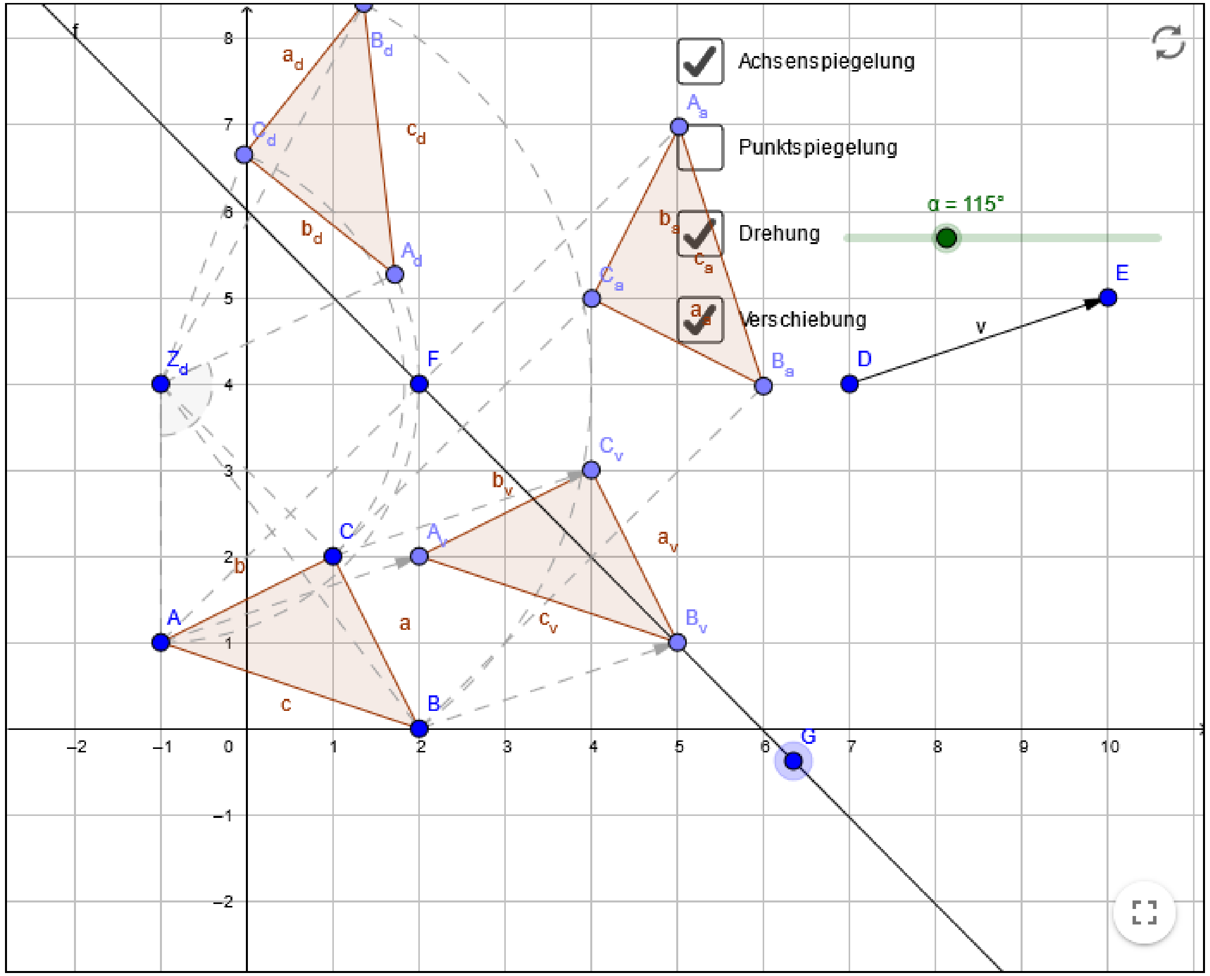
Darstellen kleiner, vorgegebener Datenmengen: HK1 „Darstellen, Modellbilden“

…

Vergleichen konkurrierender Diagrammtypen in komplexen statistischen Situationen: HK4 „Argumentieren, Begründen“

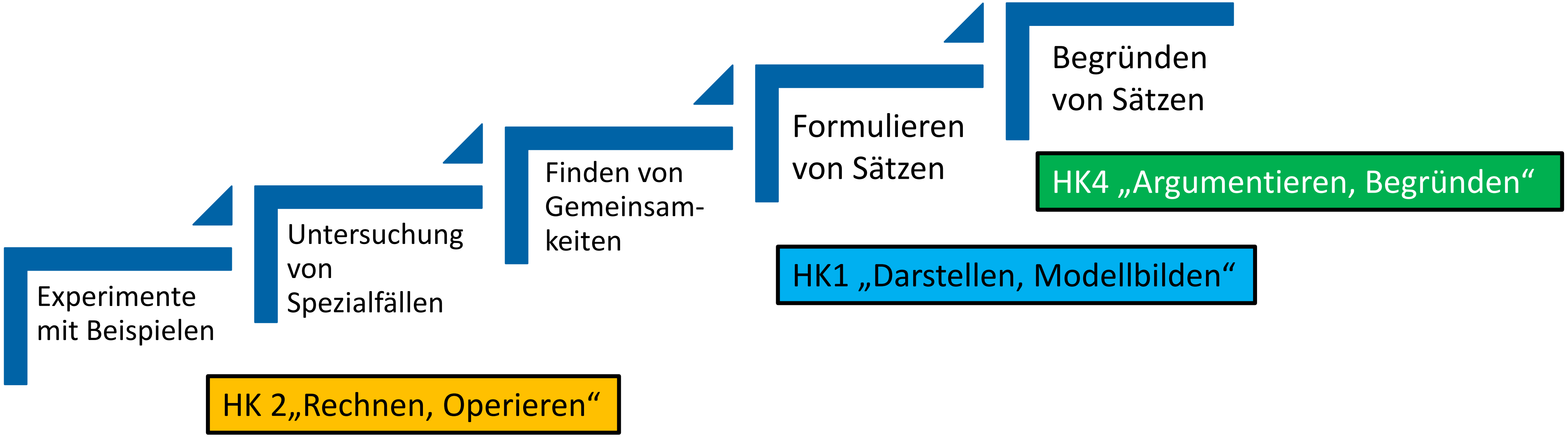
Erkunden neuer Themen

- Z. B. geometrische Figuren so zu transformieren, dass sie deckungsgleich bleiben:
  - IK3 „Geometrische Figuren und Körper“ und
  - HK2 „Rechnen, Operieren“
- gestufte Impulse:
  - von „einer Möglichkeit“ zu
  - „mehreren“ bis zu
  - „allen“ (Hußmann & Prediger 2007)



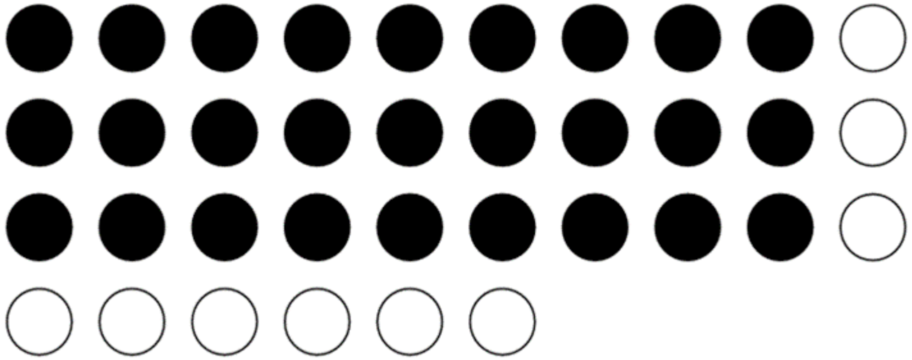
https://www.geogebra.org/m/gPe7wSut

Teilbarkeitsregeln



Teilbarkeitsregel durch neun (Sattlberger & Götz 2007, S. 107 f.)

1. Paradigmatische Beispiele: $9 \nmid 37, 9|36, 9 \nmid 100, 9|99$
2. Ikonische Darstellung:



3. Konkrete Formalisierung:

$$36 = 3 \cdot 10 + 6 = 3 \cdot (9+1) + 6 = 3 \cdot 9 + 3 \cdot 1 + 6 = 3 \cdot 9 + \underbrace{(3+6)}_{\text{Ziffernsumme}}$$

4. Verallgemeinerung mit Variablen: $ab = a \cdot 10 + b = a \cdot 9 + \underbrace{a+b}_{\text{Ziffernsumme}}$

$(n+1)$-stellige Zahlen $(n \in \mathbb{N})$

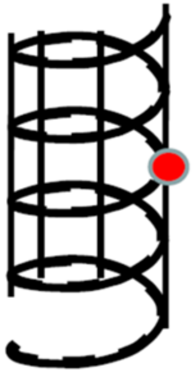
5. Noch eine Verallgemeinerung:

$$(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_{10} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 =$$

$$= a_n \cdot \underbrace{(10^n - 1)}_{9|} + a_{n-1} \cdot \underbrace{(10^{n-1} - 1)}_{9|} + \dots + a_1 \cdot \underbrace{(10 - 1)}_{9|}$$

$$+ \underbrace{a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0}_{\text{Ziffernsumme}}$$

→Spiralprinzip



Unterstützungsmaßnahmen, Aufgabendesign und Austausch

(Leuders & Prediger 2012)

- geeignete Lehrerimpulse,
- vorstellungsunterstützende Materialien
- regelmäßige Aufforderungen zu Zwischenreflexionen (Lerntagebücher)

Aufgaben für das Erkunden sollen so gestaltet bzw. ausgewählt werden, dass
- vielfältige Lösungswege,
- alternative Repräsentationen oder
- Begründungen auf verschiedenen Abstraktionsstufen möglich sind.

Strategiekonferenzen für den Austausch der verschiedenen Zugänge, Erfahrungen und Resultate
- Zugänglichkeit für alle unbedingt notwendig (auch für die leistungsschwächeren Schülerinnen und Schüler muss es möglich sein, den Beiträgen der anderen zu folgen)
- (von der Lehrperson) eine Zielorientierung: auf welcher Stufe
  - ✓ welche Strategie,
  - ✓ welcher Inhalt,
  - ✓ welche Begründung etc.

von den Lernenden erworben werden soll

Strategiekonferenzen

Sie dienen auch zum Sammeln individueller Ideen und zum Systematisieren von unterschiedlichen Herangehensweisen.

Eine Gleichung kann zum Beispiel auf verschiedene Arten gelöst werden:
- durch (systematisches) Probieren,
- durch Anwenden eines Lösungsverfahrens,
- (oder näherungsweise durch Iterieren eines Approximationskalküls)

(IK2 „Variable, funktionale Abhängigkeiten“ und HK2 „Rechnen, Operieren“).

→ relative Schwächen
- im Profil 1,

für den Handlungsbereich auch in
- Profil 2

Stochastische Probleme können durch
- das Berechnen von Wahrscheinlichkeiten,
- durch kombinatorisches Abzählen von Fällen oder
- durch Simulation analysiert werden.

https://www.familie.de/kleinkind/kinderspiele/spielanleitung-wuerfeln-im-quadrat/

Steigendes Anforderungstableau (Hußmann & Prediger 2007)

Tragfähige Strategie sicher beherrschen

Wissen, dass es auch noch andere gibt

Beherrschung mehrerer Strategien

Bewusstes Wählen zwischen Strategien

Leuders & Prediger (2012, S. 52):

„Nachhaltiges konzeptuelles Wissen, das insbesondere die Vorstellungen und Darstellungen umfasst, muss jeweils für alle Niveaus gesichert werden, dagegen ist ausdifferenziertes Abgrenzungswissen (wann kann ich statt diesem Verfahren günstiger ein anderes anwenden?) und weitgreifende Vernetzungen (der Satz ist unter Berücksichtigung der Nebenbedingung x ein Spezialfall von y) eher für die Stärkeren zu konsolidieren.“

Transferieren von Strategien in neue, nicht vertraute Situation

Das ist die Herausforderung des Mathematikunterrichts schlechthin!

Impulse von Lehrer*innenseite können hierbei differenzierend wirken:

- Untersuche nur einen bestimmten Spezialfall!
- Triff erst Vereinfachungen und rechne dann!
- Selektiere zwischen verschiedenen Fällen!

Dazu:

1. von der Lehrerin bzw. von dem Lehrer vorgegebenen Aufgabensatz, dessen Items nach Schwierigkeitsgrad geordnet werden sollen → Leistungsfähigkeit einer einzelnen Person → Orientierung (Hußmann & Prediger 2007)
2. das Formulieren selbsterstellter Aufgaben, die jeweils vom Sitznachbarn bzw. von der Sitznachbarin gelöst werden müssen

Ein Beispiel zum Sortieren aus der neunten Schulstufe

Gleichungen sortieren

Schreibe die Gleichungen auf Kärtchen und schneide sie aus. Sortiere die Karten mit den Gleichungen. Nenne deine Kriterien und erläutere sie.
Beachte: Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Gleichungen zu sortieren.

A $-2x^2=3x^2+15x-10$	B $x^2+4x=0$	C $(x-8)^2=0$	D $2x+x^2-10=0$
E $-10=(x+4)^2$	F $x^2+x-4=0$	G $x^2=-16x-64$	H $(x-5)(x+3)=9$
I $6x^2-15=0$	J $x^2=x$	K $5x^2=-26$	L $(2x-7)^2=20$
M $40=8x^2$	N $4x\cdot(3x+12)=0$	O $4x^2+16x+20=0$	P $x^2=50$
Q $(x-5)(x+3)=0$	R $(x+3)=\frac{6}{(x-9)}$	S $x^2=-14$	T $x^2+9x-20=16$

(Block 2018, S. 23)

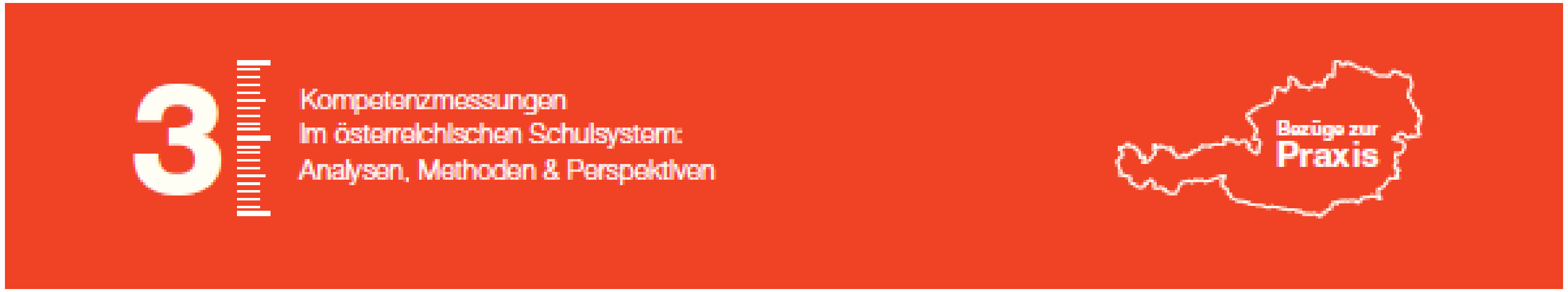
Weiterführende Arbeitsschritte:
- Such dir drei Aufgaben aus! Löse sie! Begründe, warum du diese gewählt hast!
- Stell dir vor, du musst alle Aufgaben lösen und darfst fünf aussortieren. Welche würdest du aussortieren? Warum?

(Block 2018, S. 24)

1. Vorgegebene Sortierung → Schüler*innen konstruieren Merkmale
2. Aufgaben werden nach vorgegeben Kriterien sortiert.
3. Selbstständiges Finden von Sortierkriterien

Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen

Erscheint im Juli 2022 im Waxmann-Verlag:



Empirische Befunde zu Kompetenzen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und Folgerungen für die Praxis

Hrsg.:
- Ann Cathrice George (IQS)
- S. G. (Uni Wien)
- Evelyn Süss-Stepancik (PH Wien)
- Marcel Illetschko (IQS)

Der Band ist über die Webseite des Waxmann-Verlags per Open Access kostenlos zu beziehen.

Literatur

- Barzel, B. (2009). Mathematik mit allen Sinnen erfahren – auch in der Sekundarstufe! In T. Leuders, L. Hefendehl-Hebeker und H.-G. Weigand (Hrsg.), *Mathemagische Momente* (S. 6–17). Berlin: Cornelsen.
- bifie (Hrsg.). (2011). *Praxishandbuch für „Mathematik" 8. Schulstufe*. Graz: Leykam. https://www.iqs.gv.at/downloads/nationale-kompetenzerhebung/materialien-zu-ikm-und-bildungsstandards/publikationen-mathematik
- Block, J. (2018): Sortieren und Variieren. Aufgaben werden zu Aufgaben. *mathematik lehren* 209, 22–27.
- Borovcnik, M. (1999). Bestrebungen zur Förderung von Unterricht in Statistik. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Höheren Schulen der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft* (Heft 30), 10–29. www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/1999%20Band%2030/Borovcnik1999.pdf
- Bruder, R. & Reibold, J. (2012). Erfahrungen mit Elementen offener Differenzierung im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I im niedersächsischen Modellprojekt MABIKOM. In R. Lazarides & A. Ittel (Hrsg.*), Differenzierung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Implikationen für Theorie und Praxis* (S. 67–92). Bad Heilbrunn: Verlag Julius Klinkhardt.
- Bruder, R. & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen.
- Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (2020). SRP Mathematik (AHS*): 3-Stufen-Plan zur Weiterentwicklung des Mathematik-Unterrichts und der Mathematik-Matura.* https://www.matura.gv.at/fileadmin/user_upload/downloads/Begleitmaterial/MA/srp_ma_3-stufen-plan_2020-10-01.pdf

Literatur

- Humenberger, H. (Hrsg.). (2018). *Das ist Mathematik 2*. Wien: öbv.
- Humenberger, H. (Hrsg.). (2019). *Das ist Mathematik 3*. Wien: öbv.
- Hußmann, S. & Prediger, S. (2007). Mit Unterschieden rechnen – Differenzieren und Individualisieren. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *49* (17), 1–8.
- Lambert, A. & Hilgers, A. (o. J.). *Füllgraphen – wie man sieht!* https://www.friedrich-verlag.de/mathematik/funktionen/funktionale-zusammenhaenge-zwischen-fuellgraph-und-gefaess-erkunden/
- Leuders, T. & Prediger, S. (2012). „Differenziert Differenzieren" – Mit Heterogenität in verschiedenen Phasen des Mathematikunterrichts umgehen. In R. Lazarides & A. Ittel (Hrsg.), *Differenzierung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Implikationen für Theorie und Praxis* (S. 35–67). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.
- Plath, J. (2020). Verstehensprozesse bei der Bearbeitung realitätsbezogener Mathematikaufgaben: Klassische Textaufgaben vs. Zeitungstexte. *Journal für Mathematik- Didaktik 41*, 237–266.
- Prediger, S. (2008). Mit der Vielfalt rechnen –Aufgaben, Methoden und Strukturen für den Umgang mit Heterogenität im Mathematikunterricht. Online Version des Kapitels in S. Hußmann, A. Liegmann, E. Nyssen, K. Racherbäumer, & C. Walzebug (Hrsg.), *Indive – Individualisieren, Differenzieren, Vernetzen*. Hildesheim: Franzbecker. http://www.mathematik.tu-dortmund.de/~prediger/veroeff/07-Indive-Differenzieren.pdf

Literatur

- Reusser, K. & Pauli, C. (2003). *Mathematikunterricht in der Schweiz und in weiteren sechs Ländern. Bericht über die Ergebnisse einer internationalen und schweizerischen Video-Unterrichtsstudie*. Universität Zürich. https://www.ife.uzh.ch/dam/jcr:ffffffff-a01a-a899-ffff-ffffac377c90/VideostudieCH.pdf
- Sattlberger, E. & Götz, S. (2007). ERBEG – Erklären und Begründen im Mathematikunterricht. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Höheren Schulen der ÖMG*, Heft 39, 102 – 132. http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2006%20Band%2039/VortragGoetzSattlberger.pdf
- Schreiner, C., Breit, S., Pointinger, M., Pacher, K., Neubacher, M. & Wiesner, C. (Hrsg.). (2018). *Standardüberprüfung 2017. Mathematik, 8. Schulstufe. Bundesergebnisbericht*. Salzburg: bifie. https://www.iqs.gv.at/downloads/archiv-des-bifie/bildungsstandardueberpruefungen/ergebnisberichte
- Wendt, H., Kasper, D., Bos, W., Vennemann, M. & Goy, M. (2017). Wie viele Punkte auf der TIMSS-Metrik entsprechen einem Lernjahr? – Leistungszuwächse in Mathematik und Naturwissenschaften am Ende der Grundschulzeit. In T. Eckert & B. Gniewosz (Hrsg.), *Bildungsgerechtigkeit* (S. 121–152). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.