Daten, Modelle und Prognosen

Das verborgene Vordringen der α-Variante von SARS-CoV-2

Dr. Lukas Donner ÖMG-Fortbildungstag für Lehrkräfte 22.04.2022

gemeinsame Arbeit mit: *Dr. Sebastian Bauer (Univ. Göttingen) & Johanna Doktor (Leibniz Gym. Gelsenkirchen-Buer)*

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN
Offen im Denken

Inhalt

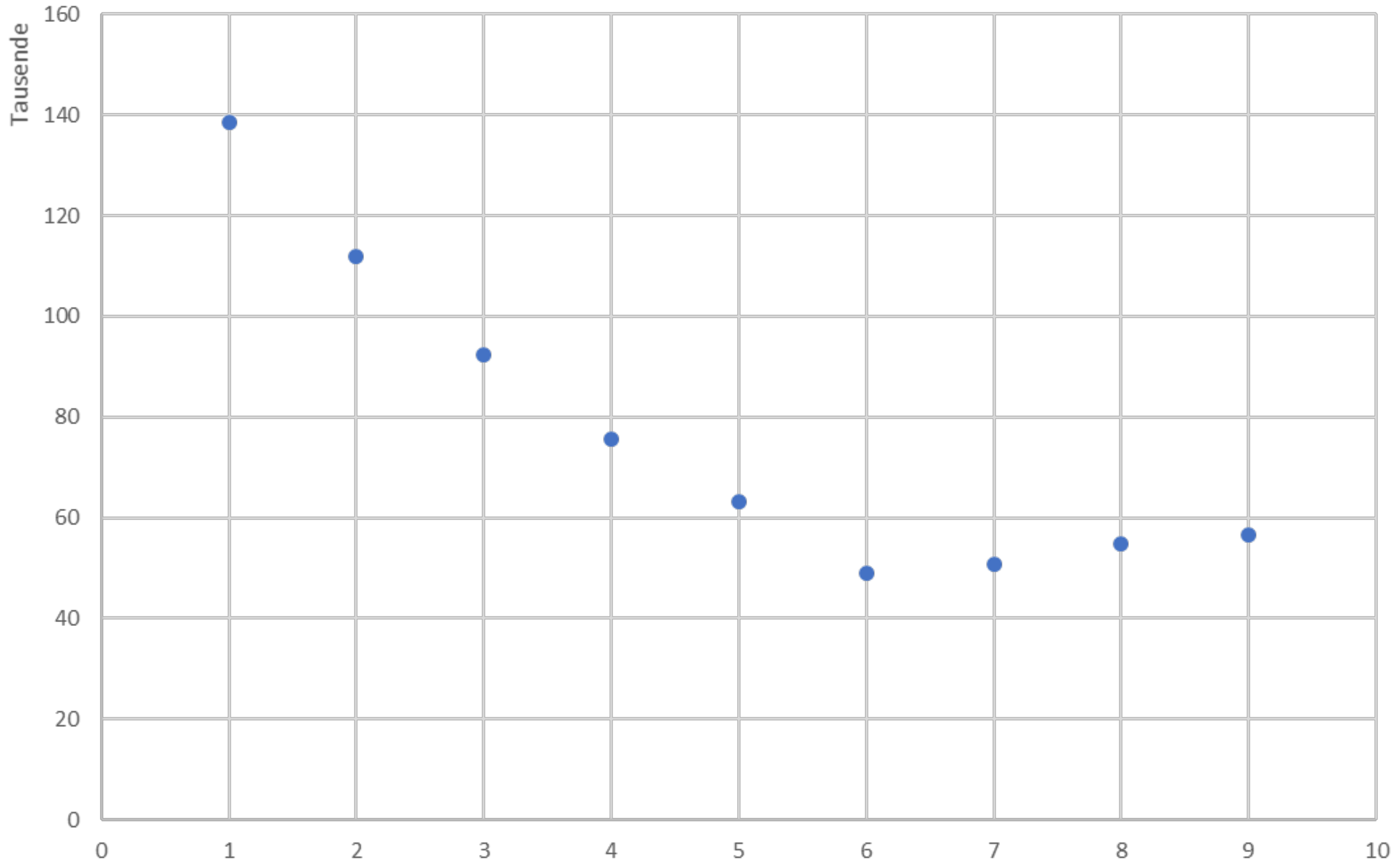
Rückblick: Erstes Jahr mit Sars-CoV-2

- Seit 2020 beschäftigt uns ein neuartiges Corona-Virus
- Regierungen reagieren im Frühjahr 2020 mit Maßnahmen, um Kollabieren der Gesundheitssysteme zu verhindern

Rückblick: Erstes Jahr mit Sars-CoV-2

- Seit 2020 beschäftigt uns ein neuartiges Corona-Virus
- Regierungen reagieren im Frühjahr 2020 mit Maßnahmen, um Kollabieren der Gesundheitssysteme zu verhindern
- Herbst/Winter 2020: massive Infektionswelle in Deutschland (und Österreich): Teillockdown bzw. Lockdown bis Ende 2020
- Abebben der zweiten Welle im Jänner und Februar 2021.

Rückblick: Erstes Jahr mit Sars-CoV-2

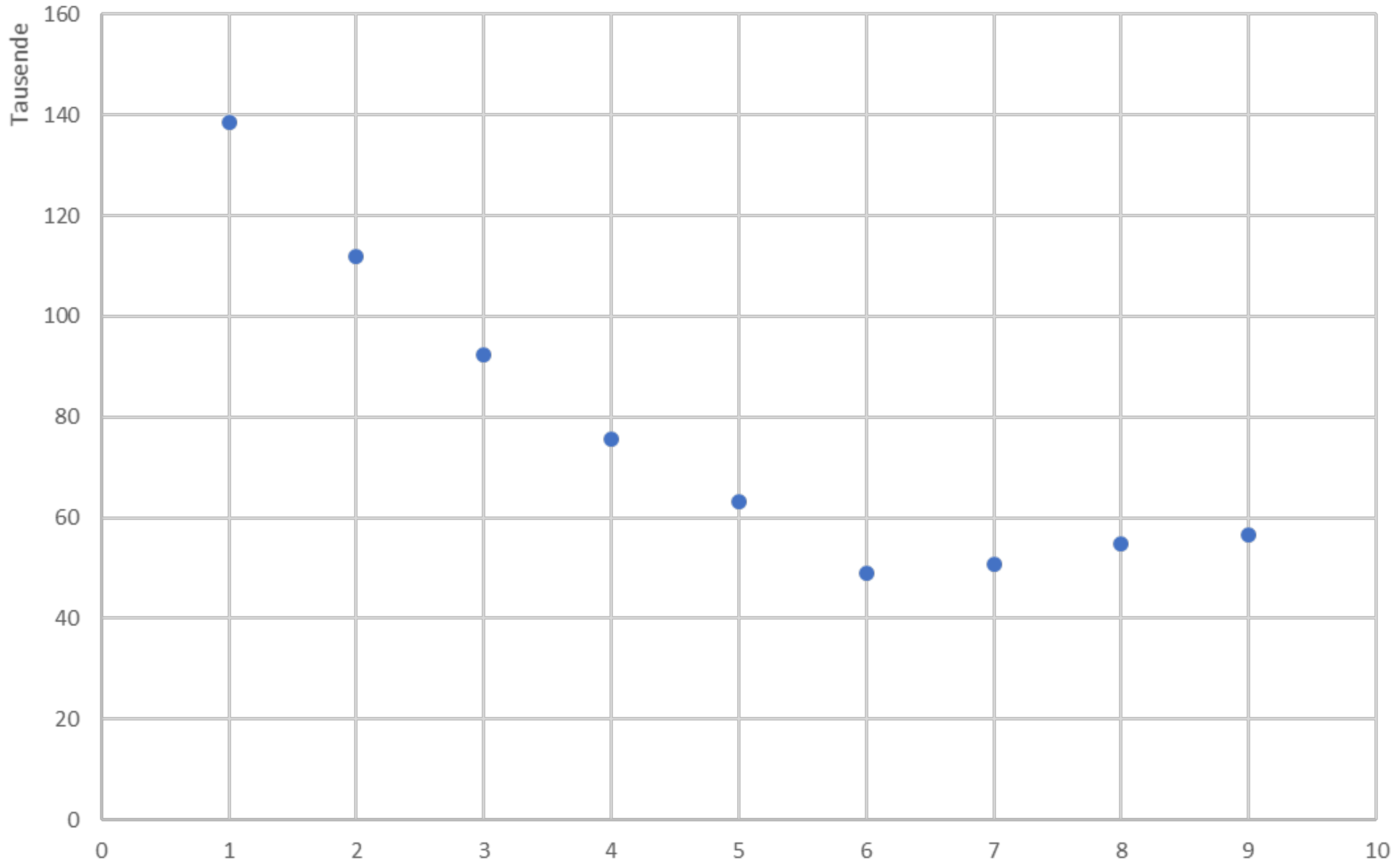


Rückblick: Erstes Jahr mit Sars-CoV-2

- Seit 2020 beschäftigt uns ein neuartiges Corona-Virus
- Regierungen reagieren im Frühjahr 2020 mit Maßnahmen, um Kollabieren der Gesundheitssysteme zu verhindern
- Herbst/Winter 2020: massive Infektionswelle in Deutschland (und Österreich): Teillockdown bzw. Lockdown bis Ende 2020
- Abebben der zweiten Welle im Jänner und Februar 2021.
- **Mitten in dieser Phase stagnierender und zurückgehender Neuinfektionen warnt das RKI (Robert-Koch Institut) vor exponentiell steigenden Fallzahlen.**
    - Ausgangspunkt für unsere Lernumgebung

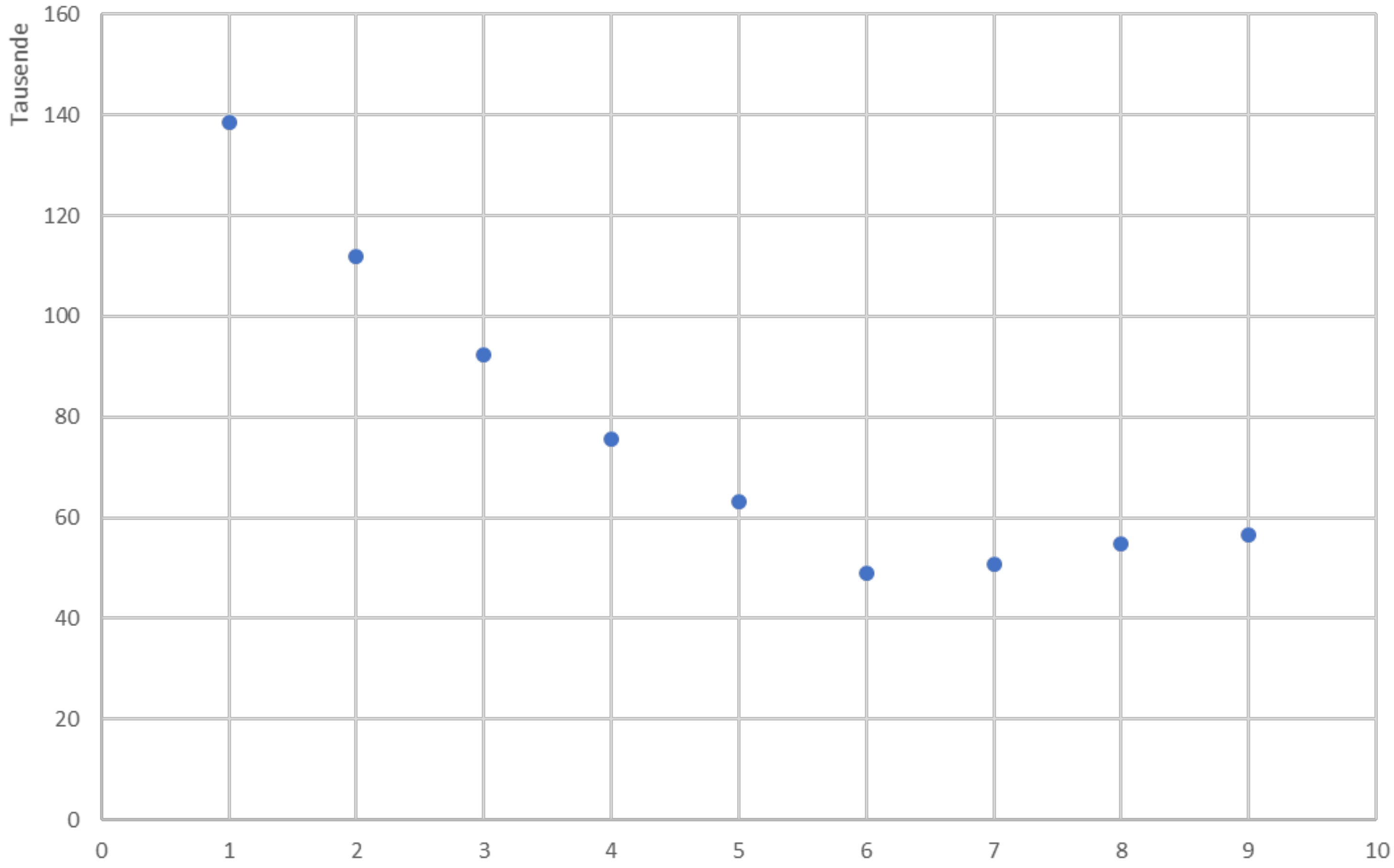
Unterrichtsvorhaben: Motivation & Einstieg

Einstiegsfrage: Welcher funktionelle Zusammenhang ist hier erkennbar?



Unterrichtsvorhaben: Motivation & Einstieg

Das RKI warnt aufgrund dieser Daten am 17.3 (KW 10) vor exponentiell wachsenden Fallzahlen aufgrund der α-Variante B 1.1.7



KW	Zahl Fälle	Anteil α-Variante
1	138516	2,5%
2	111785	2,0%
3	92457	3,6%
4	75585	4,7%
5	63209	7,2%
6	49018	17,6%
7	50691	25,9%
8	54716	40,0%
9	56518	54,4%

Unterrichtsvorhaben: Phase 1

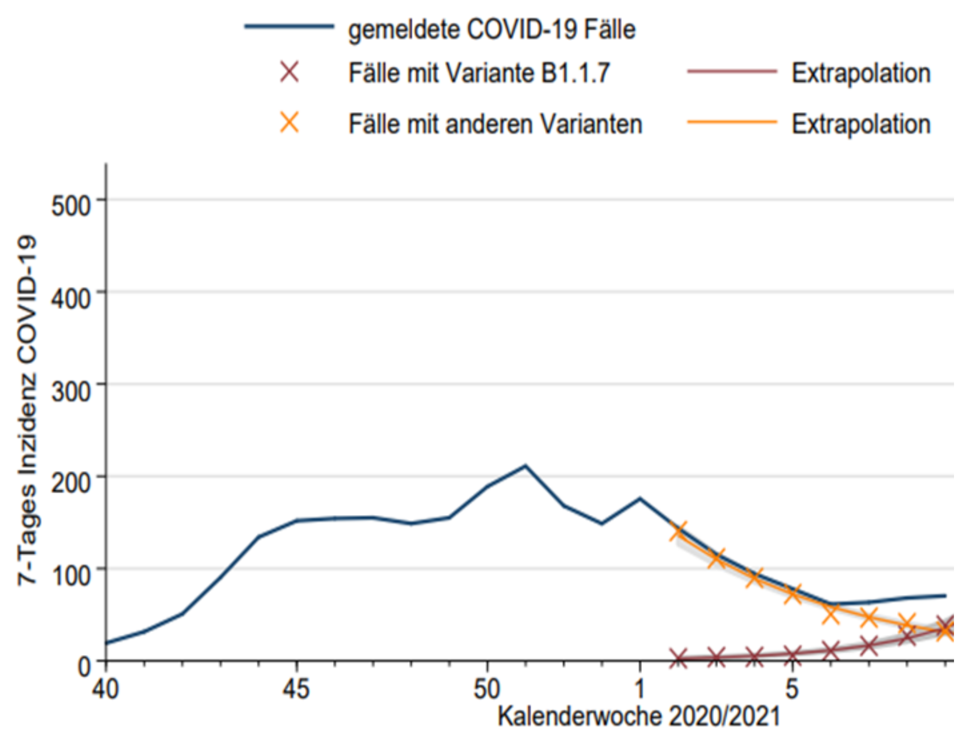


Abbildung 6: Analyse der 7-Tages Inzidenz als Summe der 7-Tages Inzidenz der Variante B.1.1.7 und aller übrigen Varianten (Datenstand 12.03.2021, n= 14.912). Es zeigt sich ein exponentiell ansteigender Trend der 7-Tages Inzidenz der Variante B.1.1.7 seit Kalenderwoche 2. Diese steigt in jeder Woche um etwa 46% an und hat sich also etwa alle 12 Tage verdoppelt. Demgegenüber zeigt der Verlauf der 7-Tage Inzidenz aller übrigen Varianten einen Rückgang um etwa 19% pro Woche. Diese beiden Trends überlagern sich zurzeit, was insgesamt zu der nur langsam ansteigenden 7-Tage-Inzidenz der letzten 4 Wochen (Kalenderwoche 06 bis 09) führte. Die Extrapolation der Trends zeigt, dass mit Fallzahlen über dem Niveau von Weihnachten ab KW 14 zu rechnen ist.

KW	Wildtyp	α-Variante
01	135053	3463
02	109549	2236
03	89129	3328
04	71806	3779
05	58279	4930
06	39803	9215
07	37157	13534
08	32173	22543
09	25094	31424

Daten: Robert Koch-Institut (RKI)

Unterrichtsvorhaben: Phase 1

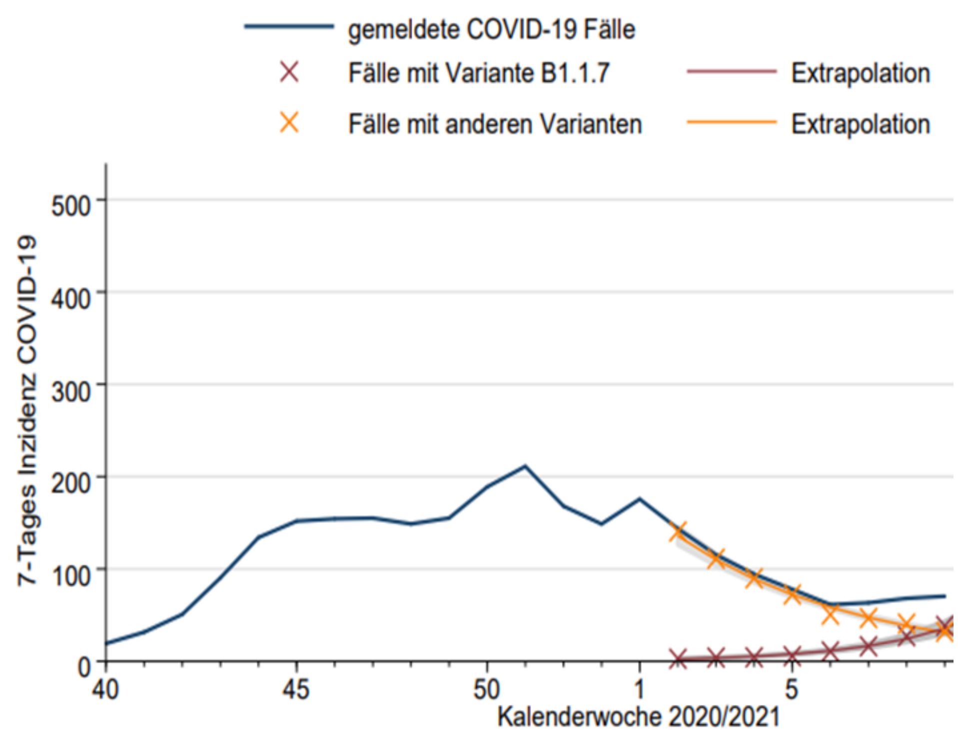


Abbildung 6: Analyse der 7-Tages Inzidenz als Summe der 7-Tages Inzidenz der Variante B.1.1.7 und aller übrigen Varianten (Datenstand 12.03.2021, n= 14.912). Es zeigt sich ein exponentiell ansteigender Trend der 7-Tages Inzidenz der Variante B.1.1.7 seit Kalenderwoche 2. Diese steigt in jeder Woche um etwa 46% an und hat sich also etwa alle 12 Tage verdoppelt. Demgegenüber zeigt der Verlauf der 7-Tage Inzidenz aller übrigen Varianten einen Rückgang um etwa 19% pro Woche. Diese beiden Trends überlagern sich zurzeit, was insgesamt zu der nur langsam ansteigenden 7-Tage-Inzidenz der letzten 4 Wochen (Kalenderwoche 06 bis 09) führte. Die Extrapolation der Trends zeigt, dass mit Fallzahlen über dem Niveau von Weihnachten ab KW 14 zu rechnen ist.

KW	Wildtyp	α-Variante
01	135053	3463
02	109549	2236
03	89129	3328
04	71806	3779
05	58279	4930
06	39803	9215
07	37157	13534
08	32173	22543
09	25094	31424

Daten: Robert Koch-Institut (RKI)

Frage: Wie können die Parameter einer Modellfunktion bestimmt werden?

Unterrichtsvorhaben: Phase 1

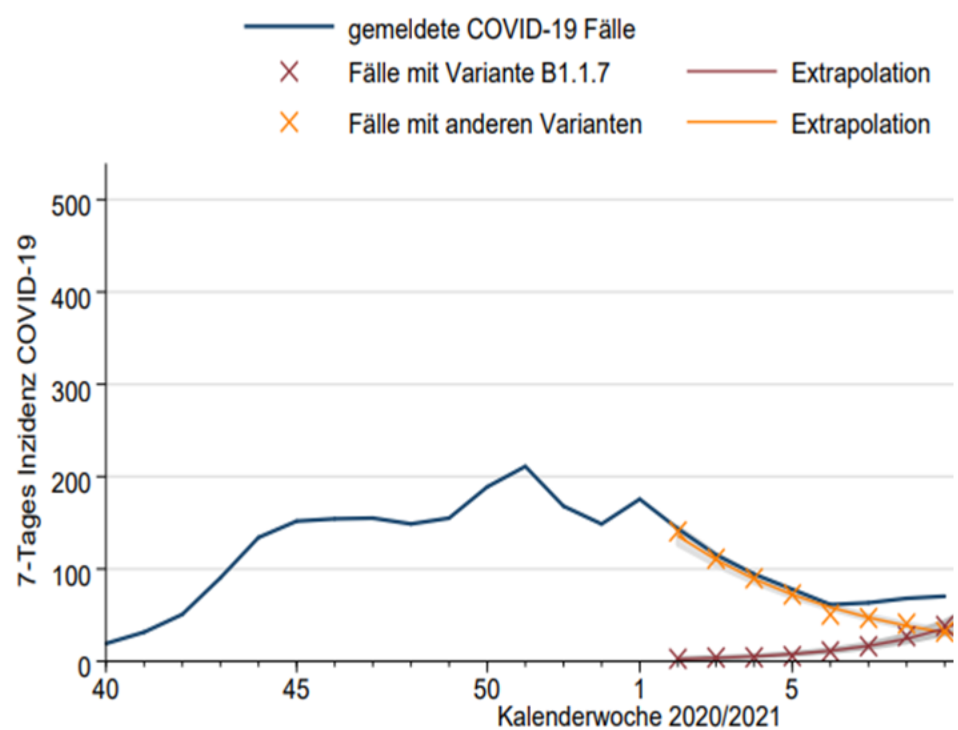


Abbildung 6: Analyse der 7-Tages Inzidenz als Summe der 7-Tages Inzidenz der Variante B.1.1.7 und aller übrigen Varianten (Datenstand 12.03.2021, n= 14.912). Es zeigt sich ein exponentiell ansteigender Trend der 7-Tages Inzidenz der Variante B.1.1.7 seit Kalenderwoche 2. Diese steigt in jeder Woche um etwa 46% an und hat sich also etwa alle 12 Tage verdoppelt. Demgegenüber zeigt der Verlauf der 7-Tage Inzidenz aller übrigen Varianten einen Rückgang um etwa 19% pro Woche. Diese beiden Trends überlagern sich zurzeit, was insgesamt zu der nur langsam ansteigenden 7-Tage-Inzidenz der letzten 4 Wochen (Kalenderwoche 06 bis 09) führte. Die Extrapolation der Trends zeigt, dass mit Fallzahlen über dem Niveau von Weihnachten ab KW 14 zu rechnen ist.

KW	Wildtyp	α-Variante
01	135053	3463
02	109549	2236
03	89129	3328
04	71806	3779
05	58279	4930
06	39803	9215
07	37157	13534
08	32173	22543
09	25094	31424

Daten: Robert Koch-Institut (RKI)

Frage: Wie können die Parameter einer Modellfunktion bestimmt werden?

Antwort: Steckbriefaufgabe unter Zuhilfenahme zweier Datenpunkte

Unterrichtsvorhaben: Phase 1

Aufg. 1) $f_\alpha(1) = c_\alpha \cdot e^{k_\alpha \cdot 1} = 2236 \quad |: e^{k_\alpha \cdot 1}$

$f_\alpha(4) = c_\alpha \cdot e^{k_\alpha \cdot 4} = 4930 \quad |: e^{k_\alpha \cdot 4}$

$= c_\alpha = \frac{2236}{e^{k_\alpha \cdot 1}}$

$= c_\alpha = \frac{4930}{e^{k_\alpha \cdot 4}}$

$4930 = \frac{2236}{e^{k_\alpha \cdot 1}} \cdot e^{k_\alpha \cdot 4}$

$4930 = \cancel{\frac{2236}{e^{k_\alpha \cdot 1}}} \; 2236 \cdot e^{k_\alpha \cdot 3}$

$\frac{4930}{2236} = e^{k_\alpha \cdot 3} \quad | \cancel{\log} \; \ln$

$\ln\left(\frac{4930}{2236}\right) = e^{k_\alpha \cdot 3}$

$0{,}79063 = k_\alpha \cdot 3 \quad |:3$

$\boxed{0{,}26355 = k_\alpha}$

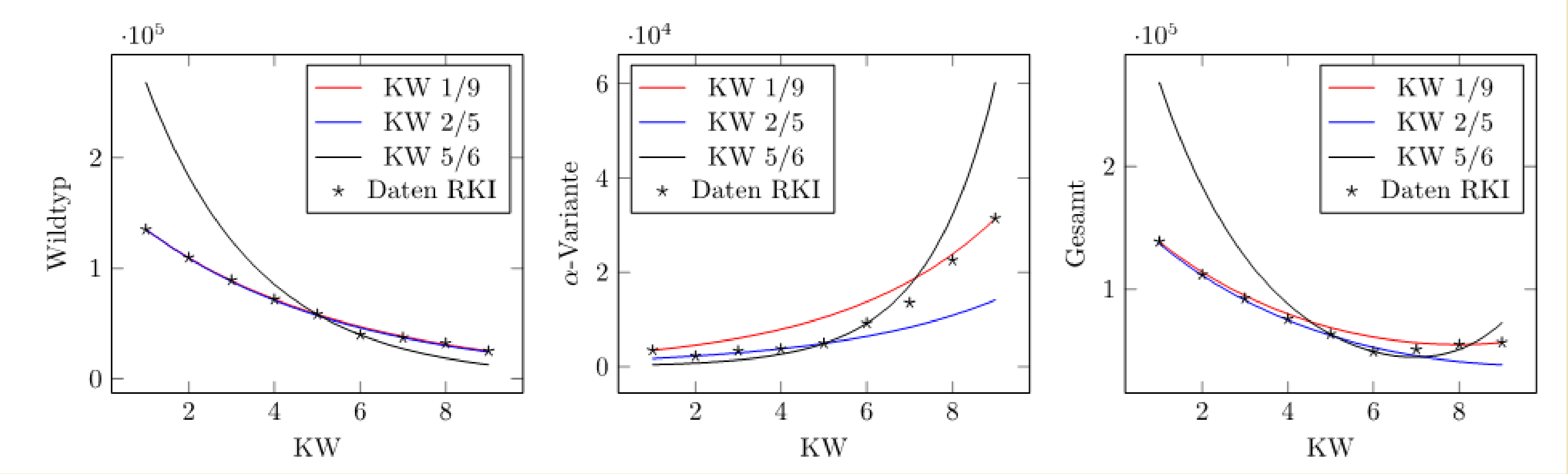
$\boxed{c_\alpha = \frac{2236}{e^{k_\alpha \cdot 1}} = 1718{,}39}$

Berechnung der Parameter der Exponentialfunktion $f(x) = c_\alpha \cdot e^{k_\alpha \cdot x}$.

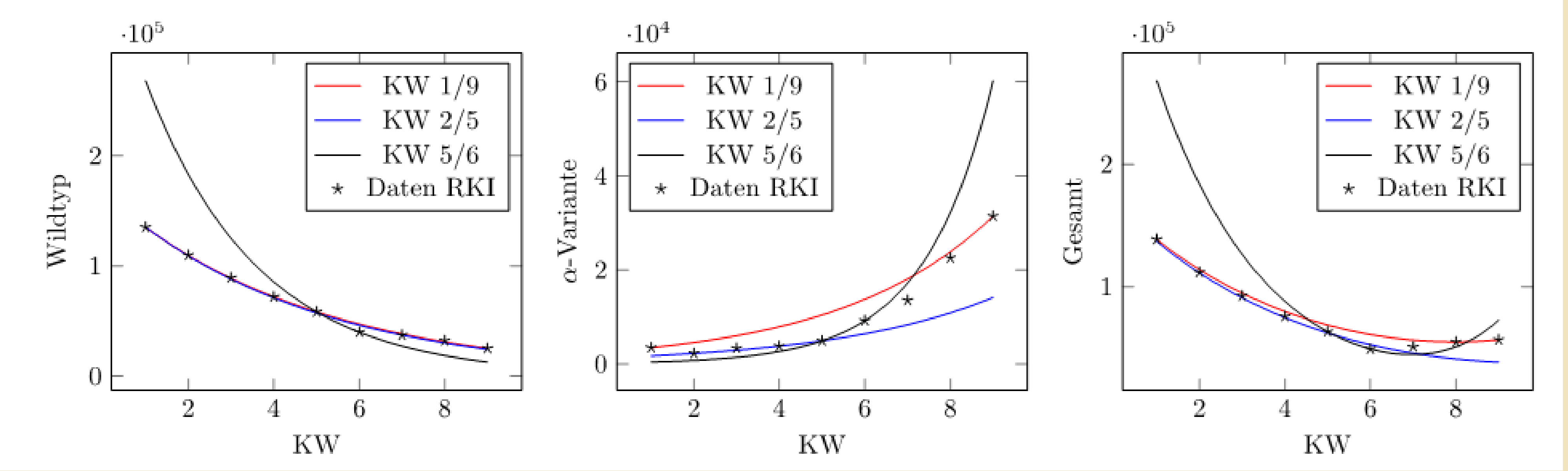
anschließend: Eintragen in vorbereitetes Excel-File und Vergleich der Modellkurve mit den Datenpunkten

Unterrichtsvorhaben: Phase 1

Ergebnis von Phase 1:



Ergebnis von Phase 1:

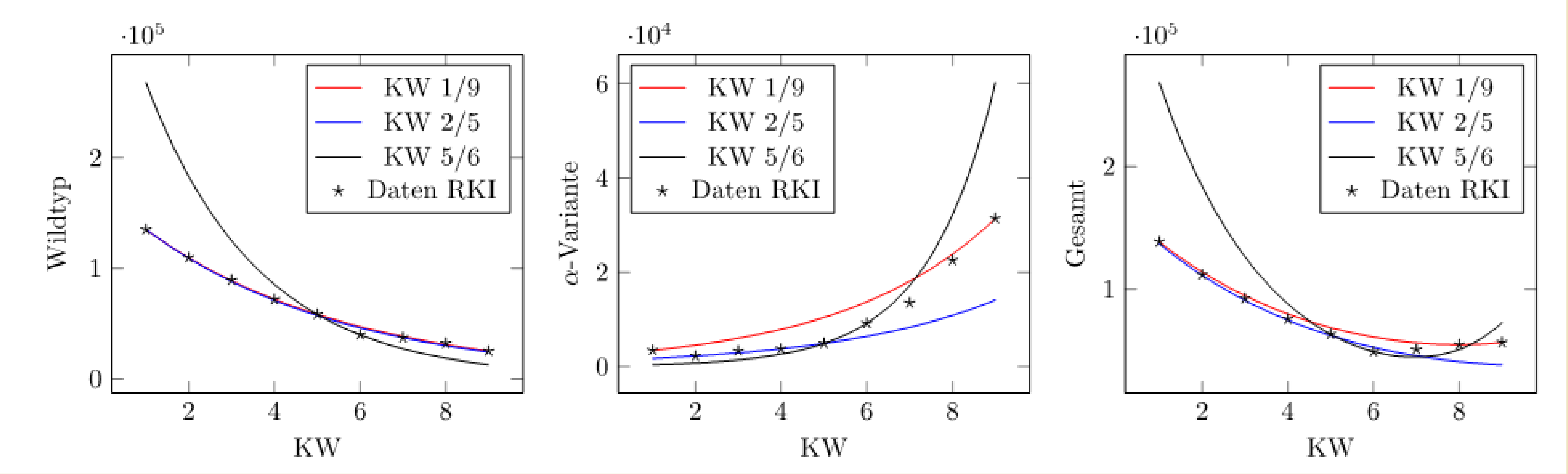


Erkenntnisse:

- Die Anpassung an genau zwei Datenpunkte liefert sehr unterschiedliche Modellfunktionen, je nach Wahl der Datenpunkte
- Eine Beurteilung der Passung des exponentiellen Modells ist so nicht möglich

Unterrichtsvorhaben: Phase 1

Ergebnis von Phase 1:



Wie gehen wir mit diesem Ergebnis um?

Exkurs I: Ein Blick in das Schulbuch

Aufgaben

Grundkompetenzen

Die Höhe des Bierschaums in einem Glas wurde alle 20 s gemessen.

Zeit t (in s)	0	20	40	60	80	100	120
Höhe (in mm)	30	26	23	19	17	15	13

1) Zeichne die zur Tabelle gehörigen Punkte in ein Diagramm ein!
2) Begründe, warum man von einer näherungsweisen exponentiellen Abnahme der Schaumhöhe sprechen kann und gib eine passende Termdarstellung der Funktion $h: t \mapsto h(t)$ an!
3) Was bedeuten die Zahlen in dieser Termdarstellung?
4) Man spricht von „sehr guter Bierschaumhaltbarkeit", wenn die Halbwertszeit des Schaumzerfalls mehr als 2 min beträgt. Liegt im vorliegenden Fall sehr gute Bierschaumhaltbarkeit vor?

Malle et al. Mathematik verstehen, 6.

Exkurs I: Ein Blick in das Schulbuch

Aufgaben **Grundkompetenzen**

Die Höhe des Bierschaums in einem Glas wurde alle 20 s gemessen.

Zeit t (in s)	0	20	40	60	80	100	120
Höhe (in mm)	30	26	23	19	17	15	13

1) Zeichne die zur Tabelle gehörigen Punkte in ein Diagramm ein!

2) Begründe, warum man von einer näherungsweisen exponentiellen Abnahme der Schaumhöhe sprechen kann und gib eine passende Termdarstellung der Funktion $h: t \mapsto h(t)$ an!

3) Was bedeuten die Zahlen in dieser Termdarstellung?

4) Man spricht von „sehr guter Bierschaumhaltbarkeit", wenn die Halbwertszeit des Schaumzerfalls mehr als 2 min beträgt. Liegt im vorliegenden Fall sehr gute Bierschaumhaltbarkeit vor?

Malle et al. Mathematik verstehen, 6.

Exkurs I: Ein Blick in das Schulbuch

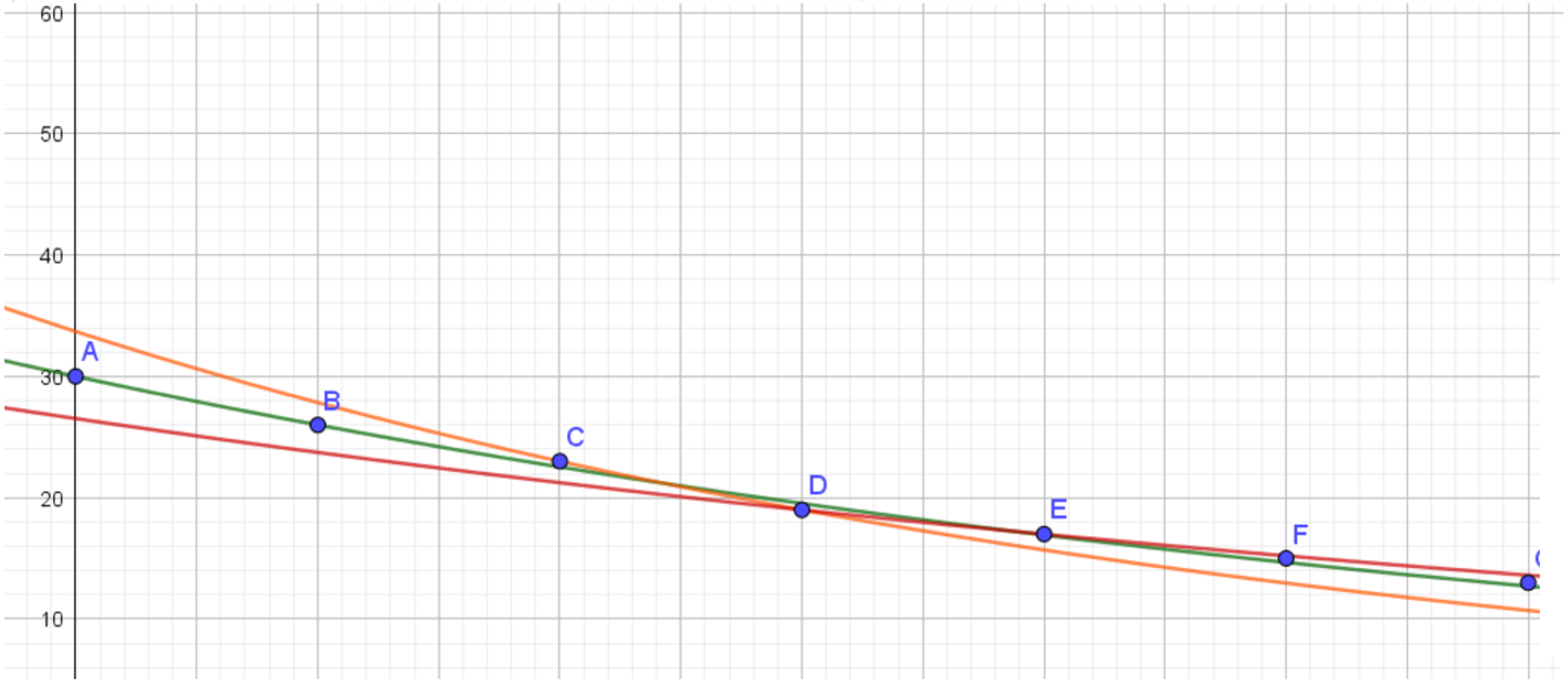
Aufgaben **Grundkompetenzen**

Die Höhe des Bierschaums in einem Glas wurde alle 20 s gemessen.

1) Zeichne die zur Tabelle gehörigen Punkte in ein Diagramm ein!

2) Begründe, warum man von einer näherungsweisen exponentiellen Abnahme der Schaumhöhe sprechen kann und gib eine passende Termdarstellung der Funktion h: $t \mapsto h(t)$ an!

Zeit t (in s)	0	20	40	60	80	100	120
Höhe (in mm)	30	26	23	19	17	15	13



A & B

C & D

D & E

Exkurs I: Ein Blick in das Schulbuch

Aufgaben **Grundkompetenzen**

Die Höhe des Bierschaums in einem Glas wurde alle 20 s gemessen.

1) Zeichne die zur Tabelle gehörigen Punkte in ein Diagramm ein!

Zeit t (in s)	0	20	40	60	80	100	120
Höhe (in mm)	30	26	23	19	17	15	13

2) Begründe, warum man von einer näherungsweisen exponentiellen Abnahme der Schaumhöhe sprechen kann und gib eine passende Termdarstellung der Funktion $h: t \mapsto h(t)$ an!
3) Was bedeuten die Zahlen in dieser Termdarstellung?
4) Man spricht von „sehr guter Bierschaumhaltbarkeit", wenn die Halbwertszeit des Schaumzerfalls mehr als 2 min beträgt. Liegt im vorliegenden Fall sehr gute Bierschaumhaltbarkeit vor?

Malle et al. Mathematik verstehen, 6.

	HWZ
A & B	$1,6$
C & D	$1,25$
D & E	**2,07**

Exkurs I: Ein Blick in das Schulbuch

Aufgaben **Grundkompetenzen**

Die Höhe des Bierschaums in einem Glas wurde alle 20 s gemessen.

Zeit t (in s)	0	20	40	60	80	100	120
Höhe (in mm)	30	26	23	19	17	15	13

1) Zeichne die zur Tabelle gehörigen Punkte in ein Diagramm ein!
2) Begründe, warum man von einer näherungsweisen exponentiellen Abnahme der Schaumhöhe sprechen kann und gib eine passende Termdarstellung der Funktion h: $t \mapsto h(t)$ an!
3) Was bedeuten die Zahlen in dieser Termdarstellung?
4) Man spricht von „sehr guter Bierschaumhaltbarkeit“, wenn die Halbwertszeit des Schaumzerfalls mehr als 2 min beträgt. Liegt im vorliegenden Fall sehr gute Bierschaumhaltbarkeit vor?

Malle et al. Mathematik verstehen, 6.

"**Schrödingers Bierschaum**":
er ist sowohl sehr gut als auch nicht sehr gut haltbar

	HWZ
A & B	$1,6$
C & D	$1,25$
D & E	**2,07**

Exkurs I: Ein Blick in das Schulbuch

Aufgaben **Grundkompetenzen**

Die Höhe des Bierschaums in einem Glas wurde alle 20 s gemessen.

Zeit t (in s)	0	20	40	60	80	100	120
Höhe (in mm)	30	26	23	19	17	15	13

1) Zeichne die zur Tabelle gehörigen Punkte in ein Diagramm ein!
2) Begründe, warum man von einer näherungsweisen exponentiellen Abnahme der Schaumhöhe sprechen kann und gib eine passende Termdarstellung der Funktion $h: t \mapsto h(t)$ an!
3) Was bedeuten die Zahlen in dieser Termdarstellung?
4) Man spricht von „sehr guter Bierschaumhaltbarkeit“, wenn die Halbwertszeit des Schaumzerfalls mehr als 2 min beträgt. Liegt im vorliegenden Fall sehr gute Bierschaumhaltbarkeit vor?

Malle et al. Mathematik verstehen, 6.

"**Schrödingers Bierschaum**":
er ist sowohl sehr gut als auch nicht sehr gut haltbar

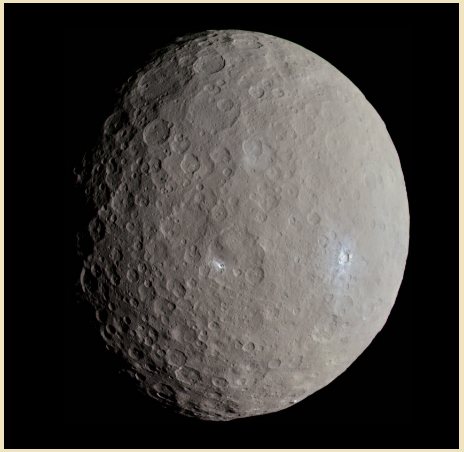
Problem: Es liegen mehr Daten vor, als zur Bestimmung der Parameter nötig sind.

	HWZ
A & B	$1,6$
C & D	$1,25$
D & E	**2,07**

Wenn die astronomischen Beobachtungen und die übrigen Zahlen, auf welche die Bahnberechnung sich stützt, einer absoluten Genauigkeit sich erfreuten, so würden auch Elemente, mag man sie nun aus drei oder vier Beobachtungen herleiten, sogleich absolut genau herauskommen [...] Da aber alle unsere Messungen und Beobachtungen nichts als Annäherungen an die Wahrheit sind, und dasselbe von allen darauf gestützten Rechnungen gelten muss, so muss das höchste Ziel aller über concrete Erscheinungen darin gefunden werden, der Wahrheit so nahe als möglich zu kommen. Dies kann aber in keiner anderen Weise geschehen, als durch eine geeignete Combination von **mehr** Beobachtungen, als absolut zur Bestimmung der unbekannten Größe erforderlich sind. Diese Arbeit lässt sich jedoch erst dann unternehmen, wenn man bereits eine angenäherte Kenntnis der Bahn besitzt, welche dann so zu verbessern ist, dass sie allen Beobachtungen **so nahe wie möglich** entspricht.

Theorie der Bewegung der Himmelskörper, welche in Kegelschnitten die Sonne umlaufen. *Dritter Abschnitt, S.250.*, 1865.
Original: "Theoria motus corporum coelestium", 1809.

Exkurs II: Geschichte der Mathematik

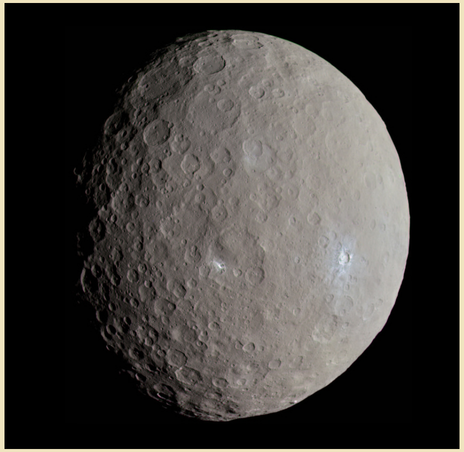


Bildquelle: Wikipedia

- am Neujahrsabend 1801 entdeckte Guiseppi Piazzi einen neuen (Zwerg-)planeten, *Ceres*
- dieser ging wieder verloren.

Exkurs II: Geschichte der Mathematik

- am Neujahrsabend 1801 entdeckte Guiseppi Piazzi einen neuen (Zwerg-)planeten, *Ceres*
- dieser ging wieder verloren.
- **Carl Friedrich Gauß** entwickelte eine Methode zur Bahnbestimmung, mit der Ceres am 7. Dezember 1801 wiederentdeckt werden konnte
- die **Methode der kleinsten Quadrate** war nun im öffentlichen Diskurs angekommen



Bildquelle: Wikipedia

Methode der kleinsten Quadrate:

Idee:

- geht man von einem festen (begründbaren) mathematischen Modell aus, enthält dieses in der Regel Parameter, deren Werte anhand vorhandener Daten geschätzt werden müssen
- liegen mehr Daten vor als nötig, so kommt es in der Regel zu Abweichungen
- bei jeder Parameterwahl entstehen Differenzen zwischen gemessenen Werten (O_i) und mittels Parametern berechneten Modelldaten (C_i)

Methode der kleinsten Quadrate:

Idee:

- geht man von einem festen (begründbaren) mathematischen Modell aus, enthält dieses in der Regel Parameter, deren Werte anhand vorhandener Daten geschätzt werden müssen
- liegen mehr Daten vor als nötig, so kommt es in der Regel zu Abweichungen
- bei jeder Parameterwahl entstehen Differenzen zwischen gemessenen Werten (O_i) und mittels Parametern berechneten Modelldaten (C_i)

Annahme:

- die Modellfehler schwanken rein zufällig um 0 (d.h. Durchschnitt ist Null, Varianz ist konstant, Unabhängigkeit von jedem anderen Messfehler)

Methode der kleinsten Quadrate:

Idee:

- geht man von einem festen (begründbaren) mathematischen Modell aus, enthält dieses in der Regel Parameter, deren Werte anhand vorhandener Daten geschätzt werden müssen
- liegen mehr Daten vor als nötig, so kommt es in der Regel zu Abweichungen
- bei jeder Parameterwahl entstehen Differenzen zwischen gemessenen Werten (O_i) und mittels Parametern berechneten Modelldaten (C_i)

Annahme:

- die Modellfehler schwanken rein zufällig um 0 (d.h. Durchschnitt ist Null, Varianz ist konstant, Unabhängigkeit von jedem anderen Messfehler)

Maß für den Fehler:

- Berechne $QF := \sum_{i=1}^{n} (O_i - C_i)^2$.
- **Minimierung von QF führt zu einer möglichen Schätzung von Parametern**

Methode der kleinsten Quadrate:

Satz von Gauß(-Markov):

Unter diesen Annahmen ist der Kleinste-Quadrate-Schätzer die beste lineare erwartungstreue Schätzfunktion.

wurde von Gauß 1821 bewiesen.

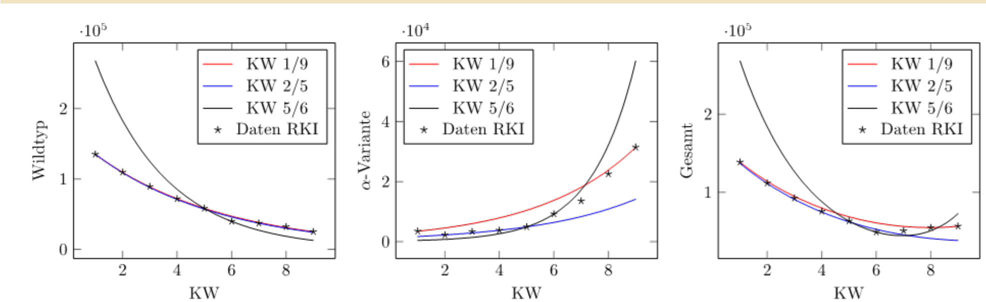
Annahme:

- die Modellfehler schwanken rein zufällig um 0 (d.h. Durchschnitt ist Null, Varianz ist konstant, Unabhängigkeit von jedem anderen Messfehler)

Maß für den Fehler:

- Berechne $QF := \sum_{i=1}^{n} (O_i - C_i)^2$.
- **Minimierung von QF führt zu einer möglichen Schätzung von Parametern**

Zurück zu den Aufgabenstellungen



Aufgaben **Grundkompetenzen**

Die Höhe des Bierschaums in einem Glas wurde alle 20 s gemessen.

1) Zeichne die zur Tabelle gehörigen Punkte in ein Diagramm ein!

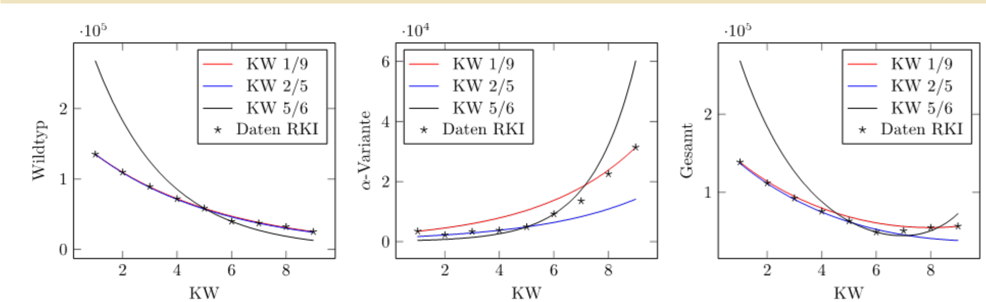
Zeit t (in s)	0	20	40	60	80	100	120
Höhe (in mm)	30	26	23	19	17	15	13

2) Begründe, warum man von einer näherungsweisen exponentiellen Abnahme der Schaumhöhe sprechen kann und gib eine passende Termdarstellung der Funktion h: t ↦ h(t) an!
3) Was bedeuten die Zahlen in dieser Termdarstellung?
4) Man spricht von „sehr guter Bierschaumhaltbarkeit", wenn die Halbwertszeit des Schaumzerfalls mehr als 2 min beträgt. Liegt im vorliegenden Fall sehr gute Bierschaumhaltbarkeit vor?

- Wir wissen, dass wir die Datenpunkte jeweils **mittels exponentiellem Modell anpassen** können

  In Worten von Gauß: *"Diese Arbeit lässt sich jedoch erst dann unternehmen, wenn man bereits eine angenäherte Kenntnis der Bahn besitzt"...*

Zurück zu den Aufgabenstellungen



Aufgaben **Grundkompetenzen**

Die Höhe des Bierschaums in einem Glas wurde alle 20 s gemessen.

1) Zeichne die zur Tabelle gehörigen Punkte in ein Diagramm ein!

Zeit t (in s)	0	20	40	60	80	100	120
Höhe (in mm)	30	26	23	19	17	15	13

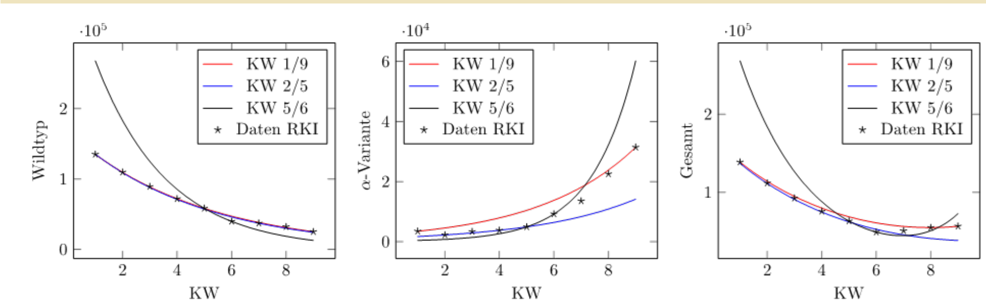
2) Begründe, warum man von einer näherungsweisen exponentiellen Abnahme der Schaumhöhe sprechen kann und gib eine passende Termdarstellung der Funktion h: $t \mapsto h(t)$ an!
3) Was bedeuten die Zahlen in dieser Termdarstellung?
4) Man spricht von „sehr guter Bierschaumhaltbarkeit“, wenn die Halbwertszeit des Schaumzerfalls mehr als 2 min beträgt. Liegt im vorliegenden Fall sehr gute Bierschaumhaltbarkeit vor?

- Wir wissen, dass wir die Datenpunkte jeweils **mittels exponentiellem Modell anpassen** können

  In Worten von Gauß: *"Diese Arbeit lässt sich jedoch erst dann unternehmen, wenn man bereits eine angenäherte Kenntnis der Bahn besitzt"...*

- Um die Datenpunkte adäquat annähern zu können, müssen wir jedoch das **Verfahren ändern**, denn Steckbriefaufgabe führt zu schlechter Anpassung

Zurück zu den Aufgabenstellungen



Aufgaben **Grundkompetenzen**

Die Höhe des Bierschaums in einem Glas wurde alle 20 s gemessen.

1) Zeichne die zur Tabelle gehörigen Punkte in ein Diagramm ein!

Zeit t (in s)	0	20	40	60	80	100	120
Höhe (in mm)	30	26	23	19	17	15	13

2) Begründe, warum man von einer näherungsweisen exponentiellen Abnahme der Schaumhöhe sprechen kann und gib eine passende Termdarstellung der Funktion $h: t \mapsto h(t)$ an!
3) Was bedeuten die Zahlen in dieser Termdarstellung?
4) Man spricht von „sehr guter Bierschaumhaltbarkeit", wenn die Halbwertszeit des Schaumzerfalls mehr als 2 min beträgt. Liegt im vorliegenden Fall sehr gute Bierschaumhaltbarkeit vor?

- Wir wissen, dass wir die Datenpunkte jeweils **mittels exponentiellem Modell anpassen** können

  In Worten von Gauß: *"Diese Arbeit lässt sich jedoch erst dann unternehmen, wenn man bereits eine angenäherte Kenntnis der Bahn besitzt"...*
- Um die Datenpunkte adäquat annähern zu können, müssen wir jedoch das **Verfahren ändern**, denn Steckbriefaufgabe führt zu schlechter Anpassung
- D.h.: Loslösen von der Passung **einzelner** Datenpunkte
- Im Gegenzug dazu **bessere Passung an alle Datenpunkte**

  ... "welche dann so zu verbessern ist, dass sie allen Beobachtungen so nahe wie möglich entspricht. "

Zurück zu den Aufgabenstellungen

Auszug aus Schulbüchern:

Von der Messreihe zur Funktion

1 a) Lass aus einem Wasserhahn Wassertropfen in einen Messzylinder fallen. Miss das Volumen des Wassers in Abhängigkeit von der Anzahl der Tropfen.

Tropfenanzahl	50	100	150	200	250	...
Volumen						

b) Stelle die Funktion *Tropfenanzahl* → *Volumen (in cm^3)* wie in Fig. 1 grafisch dar.

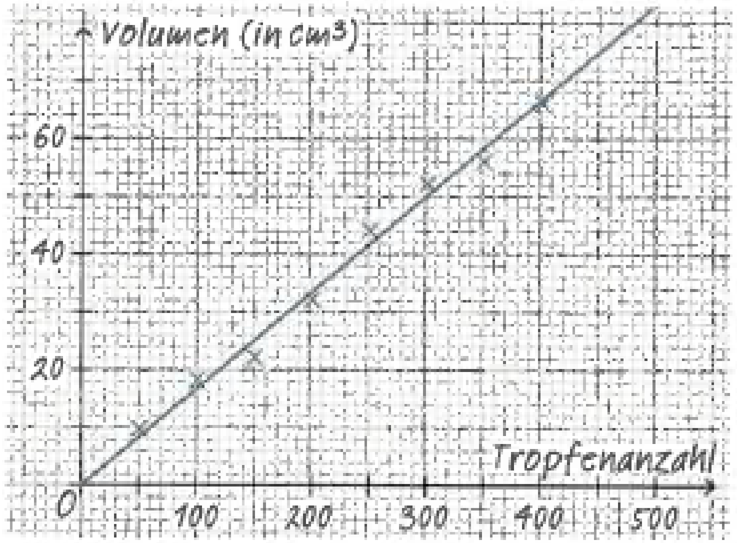


Fig. 1

Lambacher-Schweizer, 7.Schulstufe (Hessen), S. 137. (Kapitel Lineare Funktionen)

Zurück zu den Aufgabenstellungen

Universität Duisburg Essen
Offen im Denken

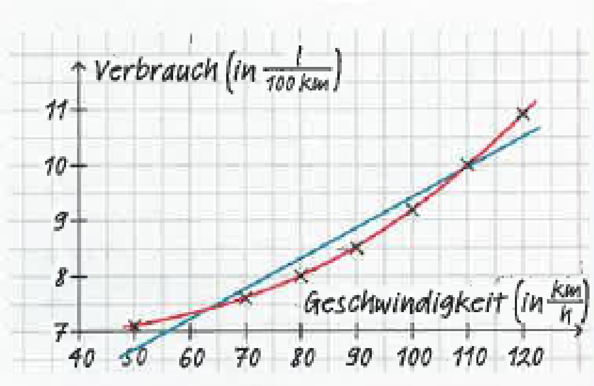
Auszug aus Schulbüchern:

Ausgleichskurven

Um den Benzinverbrauch eines Sportwagens in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit angeben zu können, wurden die folgenden Werte gemessen.

Geschwindigkeit (in km/h)	50	70	80	90	100	110	120
Verbrauch (in l/100 km)	7,1	7,6	8,0	8,5	9,2	10	10,9

Wenn man diese Daten als Punktdiagramm darstellt, erkennt man, dass die Punkte nicht auf einer Geraden liegen. Die blaue Ausgleichsgerade zeigt sehr große Abweichungen. Man kann vermuten, dass die Punkte auf einer Parabel liegen können. Dann muss es einen quadratischen Zusammenhang zwischen beiden Größen geben.



Mithilfe einer Tabellenkalkulation kann man sich die Ausgleichskurve sowie die Funktionsgleichung dieser Kurve anzeigen lassen. Dabei wählt das Programm den Graphen als Ausgleichskurve, bei dem die Abweichungen zu der Messreihe insgesamt am geringsten sind. Für obige Daten erhält man so $y = 0{,}0006 \cdot x^2 - 0{,}0509 \cdot x + 8{,}1081$.

Mithilfe dieser Funktionsgleichung kann man nun Vorhersagen treffen: So würde das Auto bei einer Geschwindigkeit von 40 km/h ca. 7 Liter auf 100 km verbrauchen.

Laut Funktionsgleichung würde der Verbrauch bei 0 km/h bei 8,1081 Liter liegen. Dieser Wert ist nicht sinnvoll. Dementsprechend muss man berechnete Werte, die außerhalb der Messdaten liegen, dahingehend hinterfragen, ob sie sinnvoll sein können.

Zum Bestimmen einer Ausgleichsgeraden bzw. Ausgleichskurve, sagt man auch, dass man eine lineare Regression bzw. eine quadratische Regression durchführt.

Lambacher-Schweizer, 8.Schulstufe (Hessen), S. 188. (Kapitel: Quadratische Funktionen und Gleichungen)

Zurück zu den Aufgabenstellungen

Auszug aus Schulbüchern:

Ausgleichskurven

Um den Benzinverbrauch eines Sportwagens in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit angeben zu können, wurden die folgend Werte gemessen.

Geschwindigkeit (in km/h)	50	70	80	90	100	110	120

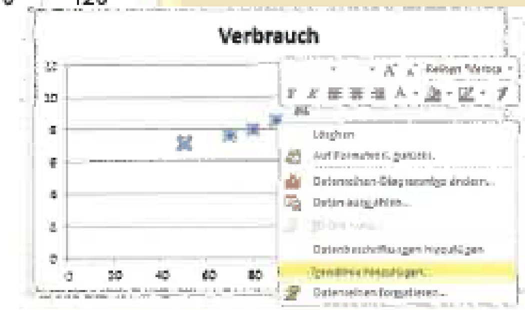
Wenn man diese Daten als Pur dass die Punkte nicht auf einer gleichsgerade zeigt sehr große ten, dass die Punkte auf einer l es einen quadratischen Zusamı geben.

Mithilfe einer Tabellenkalkulati kurve sowie die Funktionsgleic Dabei wählt das Programm der bei dem die Abweichungen zu geringsten sind. Für obige Date $y = 0{,}0006 \cdot x^2 - 0{,}0509 \cdot x + 8{,}1$

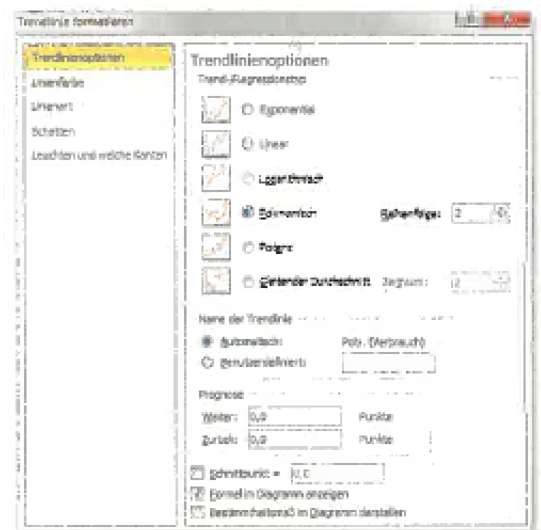
Mithilfe dieser Funktionsgleich treffen: So würde das Auto bei ca. 7 Liter auf 100 km verbraucł

Laut Funktionsgleichung würde 8,1081 Liter liegen. Dieser Wert chend muss man berechnete V liegen, dahingehend hinterfrag

Bei **Excel** gibt man zunächst die Daten ein und erstellt mithilfe des Diagrammassistenten einen Graphen. Nun markiert man auf dem Diagramm per Mausklick die Datenreihe und öffnet mit der rechten Maustaste die Registerkarte, in der man die „Trendlinie hinzufügen“ kann.



Es öffnet sich eine Registerkarte, in der man unter „Typ“ die Art der Trendlinie angeben kann. Glaubt man, dass ein linearer Zusammenhang vorliegt, klickt man „Linear“ an. Vermutet man wie im obigen Beispiel, dass ein quadratischer Zusammenhang vorliegt, muss man „Polynomisch“ anklicken. Am Ende der Registerkarte kann man anklicken, dass die Funktionsgleichung direkt mit angegeben wird. Dazu setzt man per Mausklick im Feld vor dem Text „Formel im Diagramm anzeigen“ ein Häkchen.



Lambacher-Schweizer, 8.Schulstufe (Hessen), S. 188. (Kapitel: Quadratische Funktionen und Gleichungen)

Zurück zu den Aufgabenstellungen

Auszug aus Schulbüchern:

Ausgleichskurven

Um den Benzinverbrauch eines Sportwagens in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit angeben zu können, wurden die folgend Werte gemessen.

Geschwindigkeit (in km/h)	50	70	80	90	100	110	120

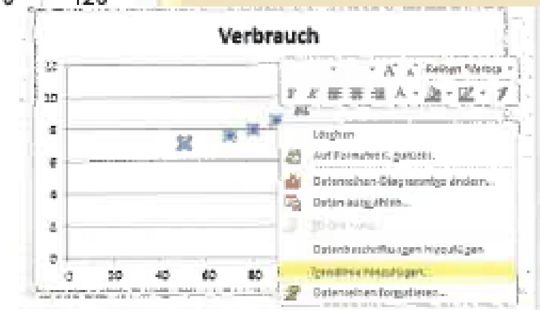
Wenn man diese Daten als Pur dass die Punkte nicht auf einer gleichsgerade zeigt sehr große ten, dass die Punkte auf einer l es einen quadratischen Zusamı geben.

Mithilfe einer Tabellenkalkulati kurve sowie die Funktionsgleic Dabei wählt das Programm der bei dem die Abweichungen zu geringsten sind. Für obige Date $y = 0{,}0006 \cdot x^2 - 0{,}0509 \cdot x + 8{,}1$

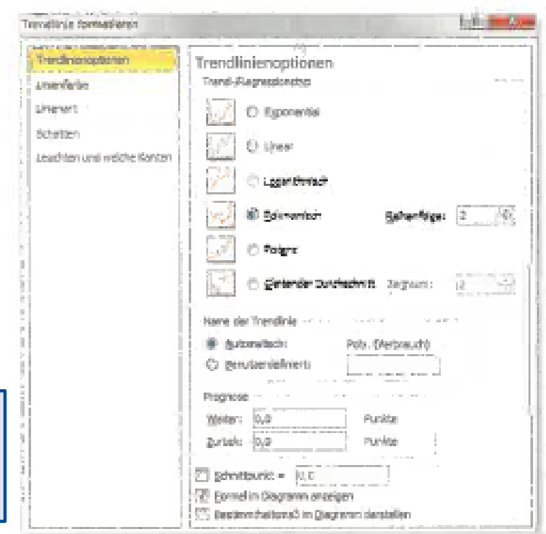
Mithilfe dieser Funktionsgleich treffen: So würde das Auto bei ca. 7 Liter auf 100 km verbraucht

Laut Funktionsgleichung würde 8,1081 Liter liegen. Dieser Wert chend muss man berechnete V liegen, dahingehend hinterfrag

Bei **Excel** gibt man zunächst die Daten ein und erstellt mithilfe des Diagrammassistenten einen Graphen. Nun markiert man auf dem Diagramm per Mausklick die Datenreihe und öffnet mit der rechten Maustaste die Registerkarte, in der man die „Trendlinie hinzufügen“ kann.



Es öffnet sich eine Registerkarte, in der man unter „Typ“ die Art der Trendlinie angeben kann. Glaubt man, dass ein linearer Zusammenhang vorliegt, klickt man „Linear“ an. Vermutet man wie im obigen Beispiel, dass ein quadratischer Zusammenhang vorliegt, muss man „Polynomisch“ anklicken. Am Ende der Registerkarte kann man anklicken, dass die Funktionsgleichung direkt mit angegeben wird. Dazu setzt man per Mausklick im Feld vor dem Text „Formel im Diagramm anzeigen“ ein Häkchen.



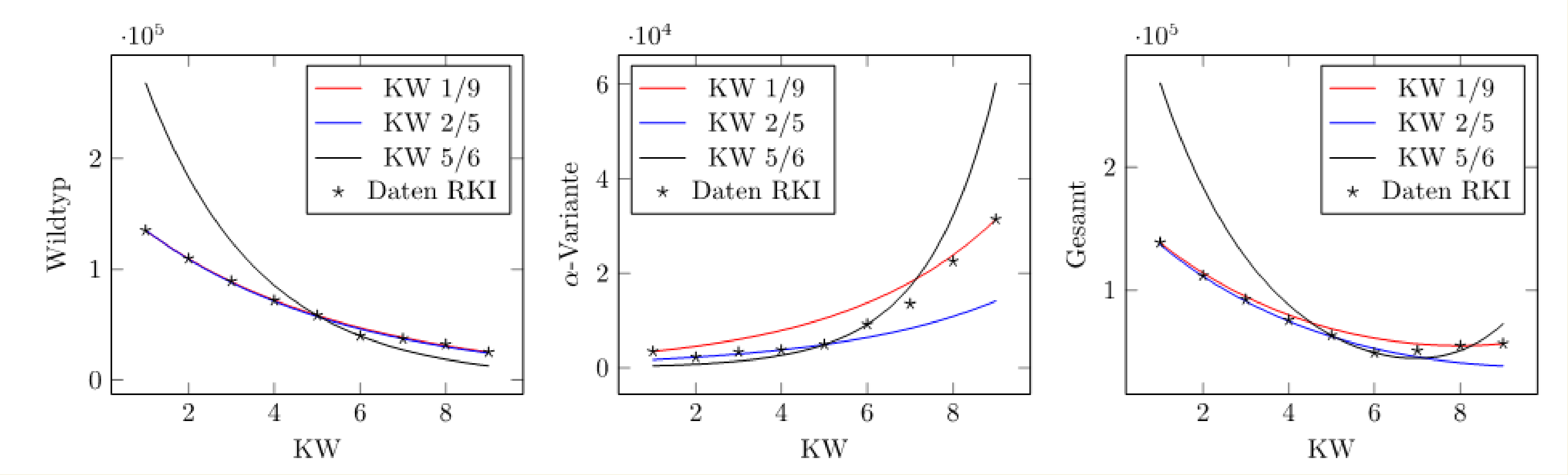
Erklärung **WIE** die Eingabe gemacht wird, aber nicht **WAS** Excel tut.

Lambacher-Schweizer, 8.Schulstufe (Hessen), S. 188. (Kapitel: Quadratische Funktionen und Gleichungen)

Unterrichtsvorhaben: Phase 2

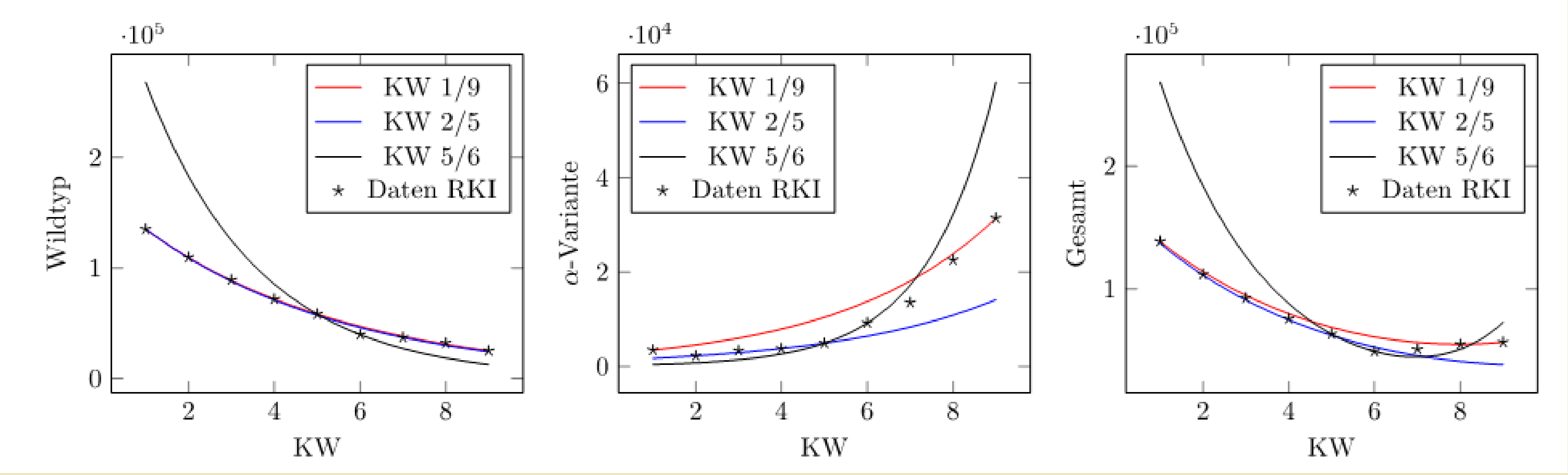
Auftrag: Suche nach Passung möglichst aller Datenpunkte

Problem könnte durch "Knopfdruck" gelöst werden (z.B. mittels Excel "Solver"); aber wir wollen **Verständnis schaffen**.



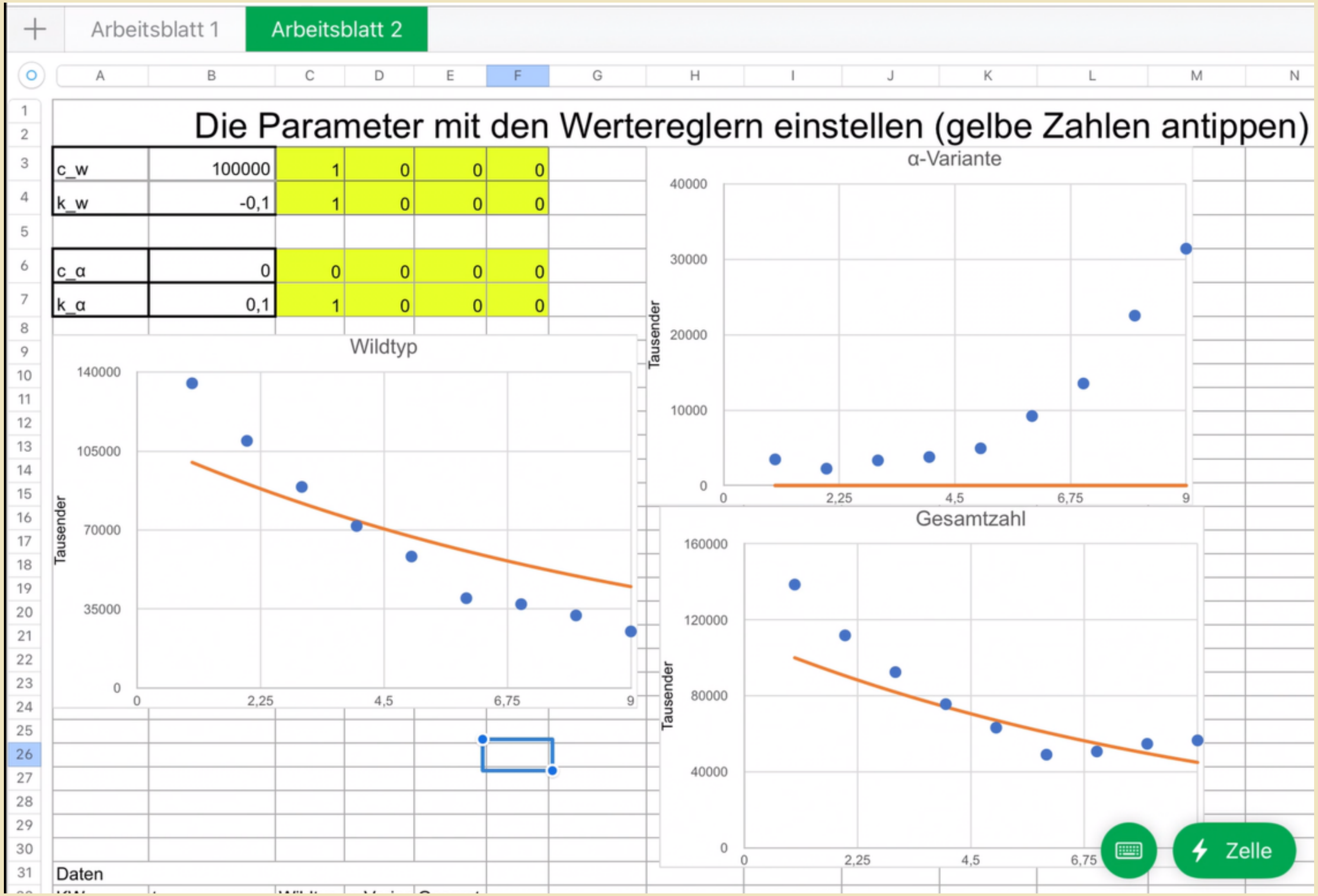
Unterrichtsvorhaben: Phase 2

Auftrag: Suche nach Passung möglichst aller Datenpunkte
Methode: Schüler*innen bestimmen die optimalen Parameter nach *Augenmaß*



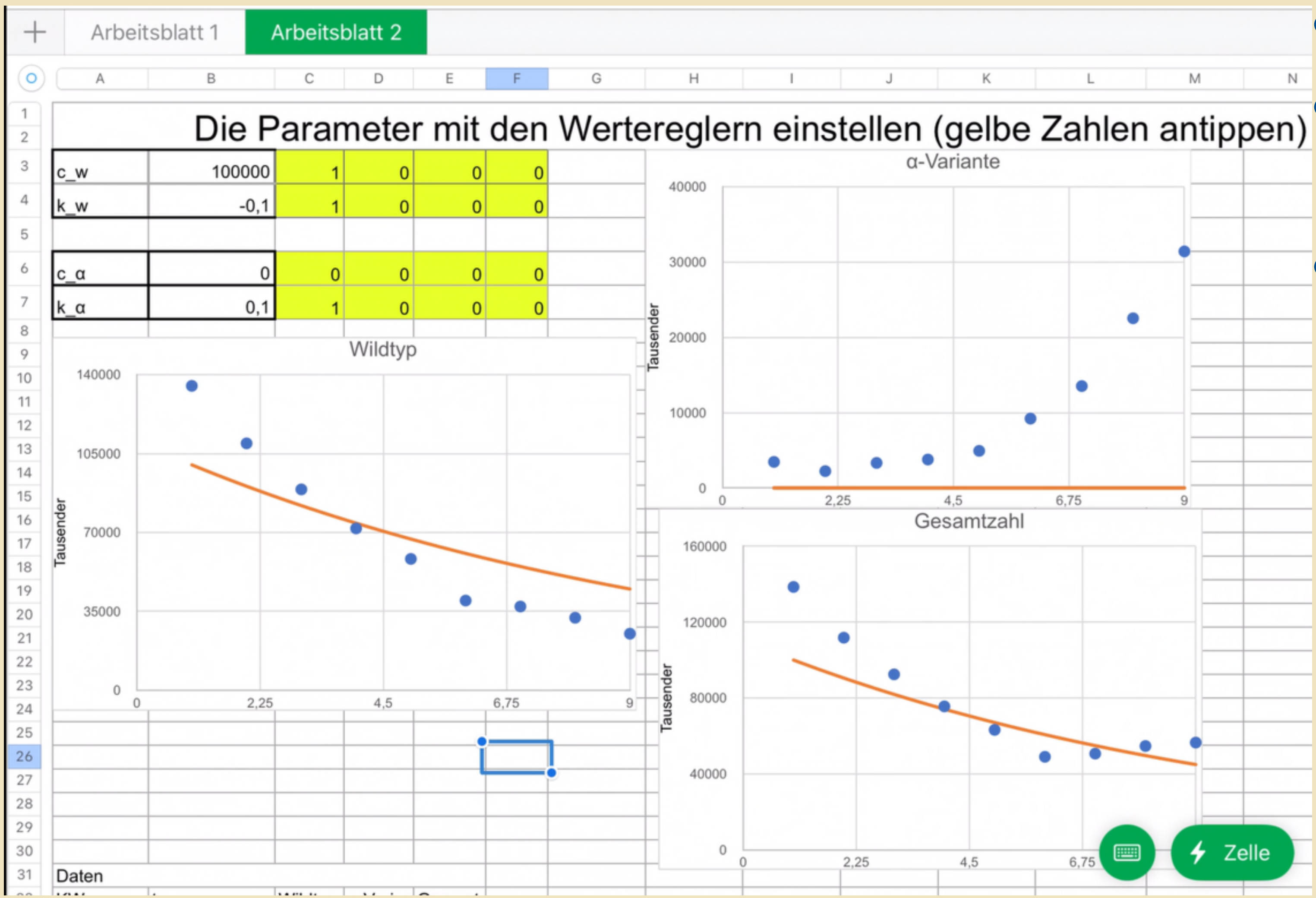
Unterrichtsvorhaben: Phase 2

Auftrag: Suche nach Passung möglichst aller Datenpunkte
Methode: Schüler*innen bestimmen die optimalen Parameter nach *Augenmaß*



Unterrichtsvorhaben: Phase 2

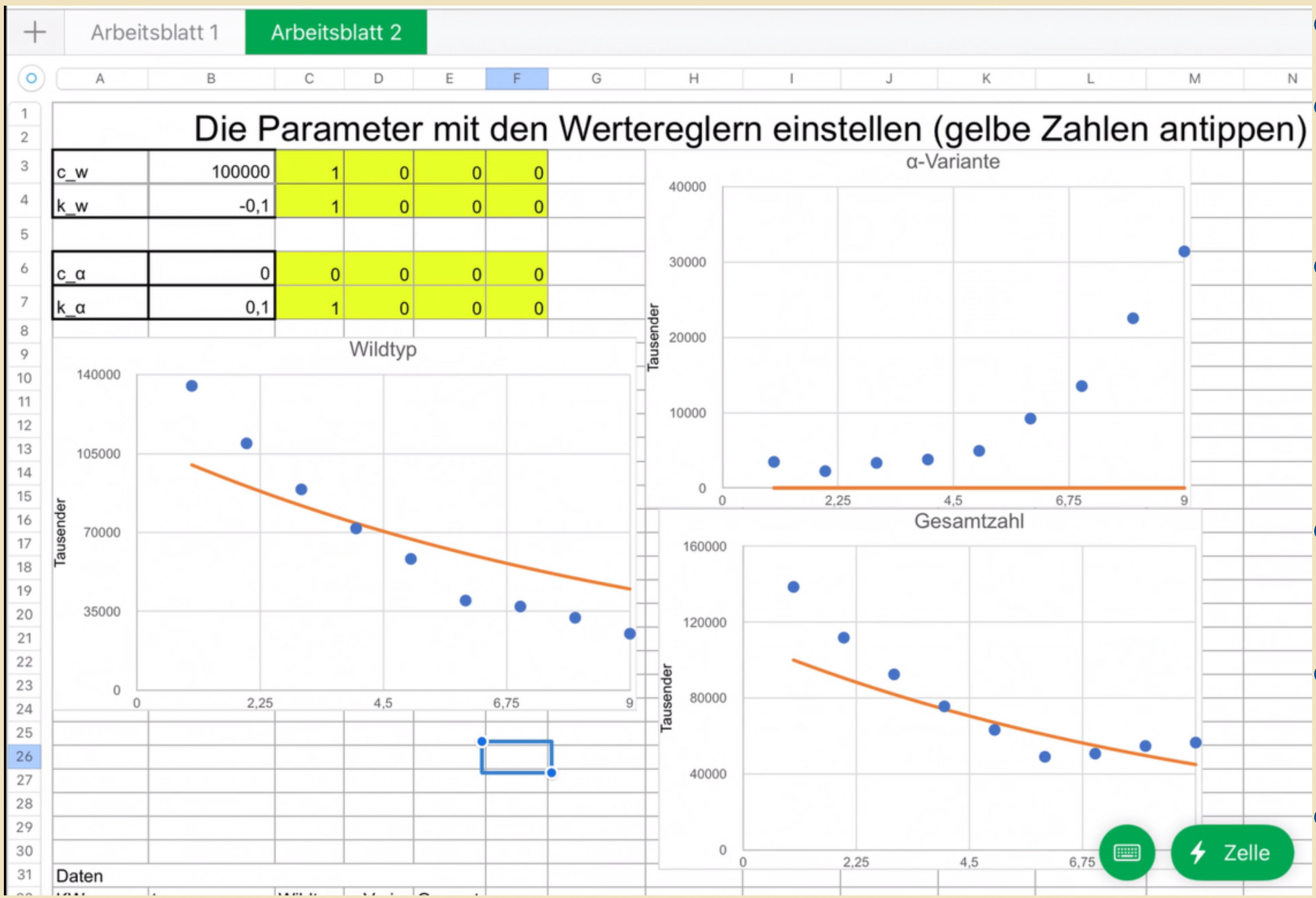
Auftrag: Suche nach Passung möglichst aller Datenpunkte
Methode: Schüler*innen bestimmen die optimalen Parameter nach *Augenmaß*



- Schieberegler
- verschiedene Größenordnungen
- Wie wirken sich Parameter auf Form der Modellfkt aus?

Unterrichtsvorhaben: Phase 2

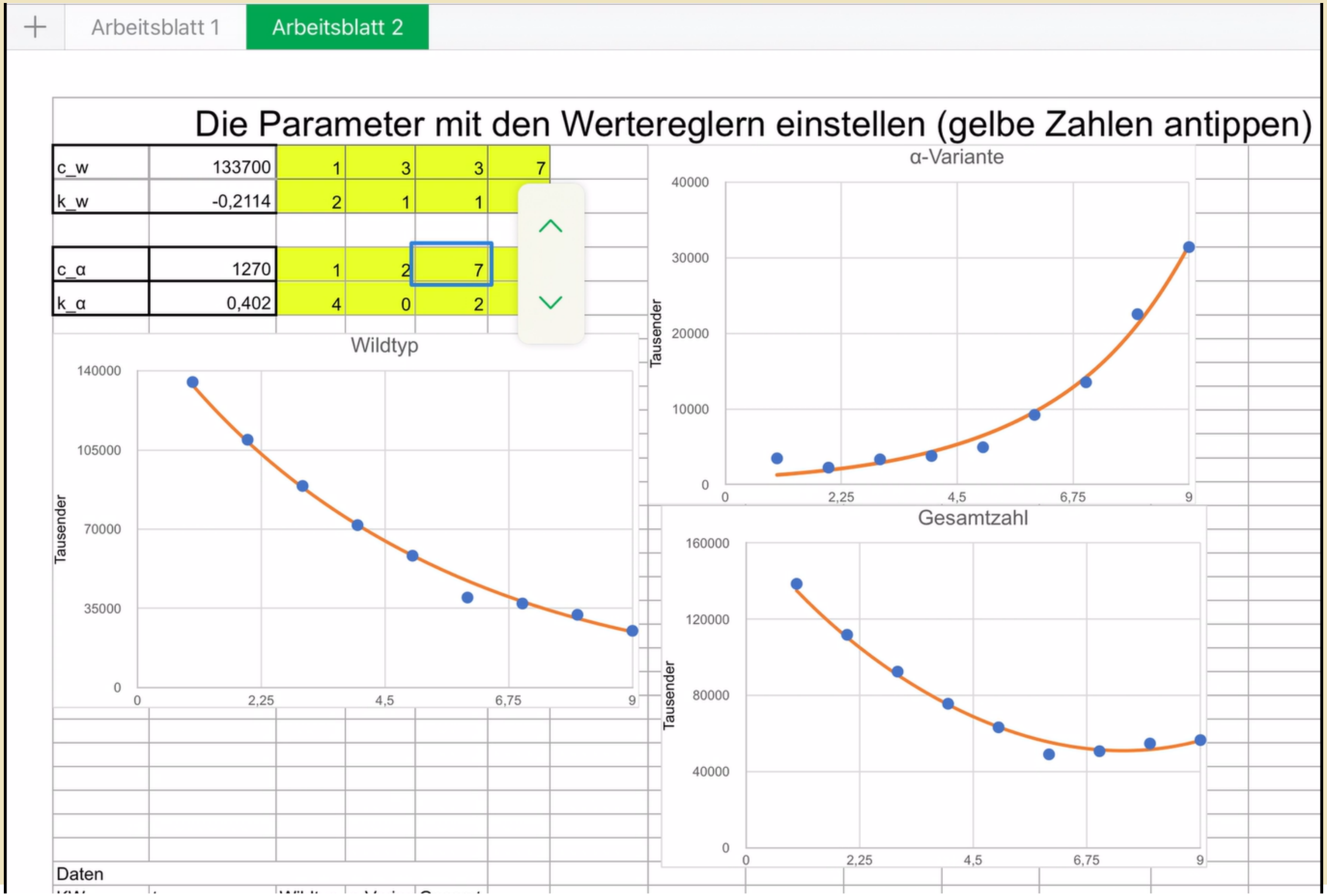
Auftrag: Suche nach Passung möglichst aller Datenpunkte
Methode: Schüler*innen bestimmen die optimalen Parameter nach *Augenmaß*



- Schieberegler
- verschiedene Größenordnungen
- Wie wirken sich Parameter auf Form der Modellfkt aus?
- Strategie muss entwickelt werden
- iteratives Justieren wird begünstigt
- Favorit in 4er-Gruppe wählen

Unterrichtsvorhaben: Phase 2

Auftrag: Suche nach Passung möglichst aller Datenpunkte
Methode: Schüler*innen bestimmen die optimalen Parameter nach *Augenmaß*



Unterrichtsvorhaben: Phase 2

Auftrag: Suche nach Passung möglichst aller Datenpunkte
Methode: Schüler*innen bestimmen die optimalen Parameter nach *Augenmaß*

Modellvergleiche mit Ziel: Welches Modell passt am besten?

Unterrichtsvorhaben: Phase 2

Auftrag: Suche nach Passung möglichst aller Datenpunkte
Methode: Schüler*innen bestimmen die optimalen Parameter nach *Augenmaß*

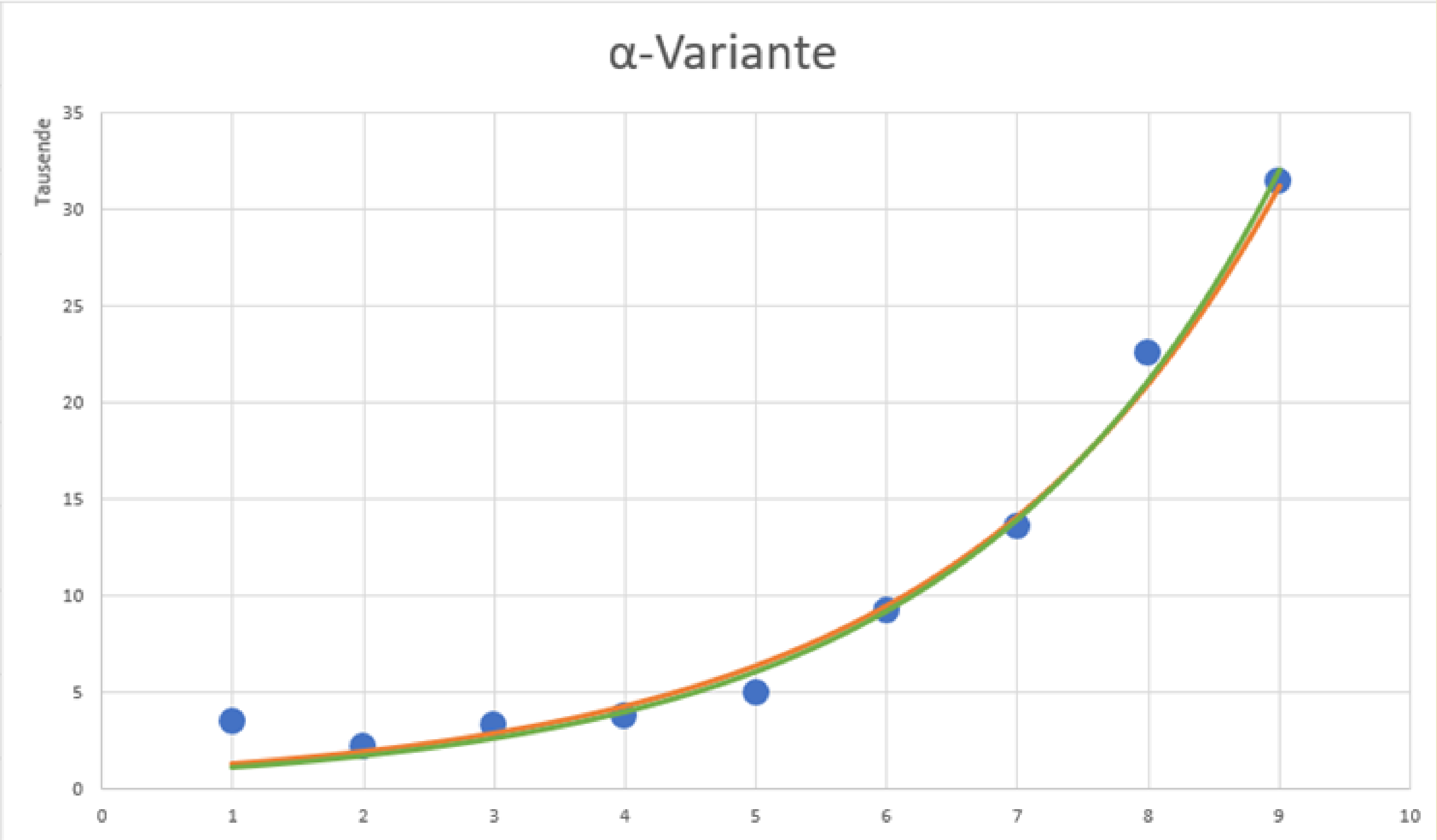
Modellvergleiche mit Ziel: Welches Modell passt am besten?

- Gruppenmodelle treten paarweise gegeneinander an.
- Siegermodell bleibt "am Tisch"
- Lehrkraft hat das Modell des kleinsten quadratischen Fehlers in der Hinterhand

Unterrichtsvorhaben: Phase 2

Auftrag: Suche nach Passung möglichst aller Datenpunkte
Methode: Schüler*innen bestimmen die optimalen Parameter nach *Augenmaß*

Modell A	eintragen
c_w	134000
k_w	-0,21
c_α	1300
k_α	0,397
Modell B	**eintragen**
c_w	136700
k_w	-0,2184
c_α	1163
k_α	0,4143

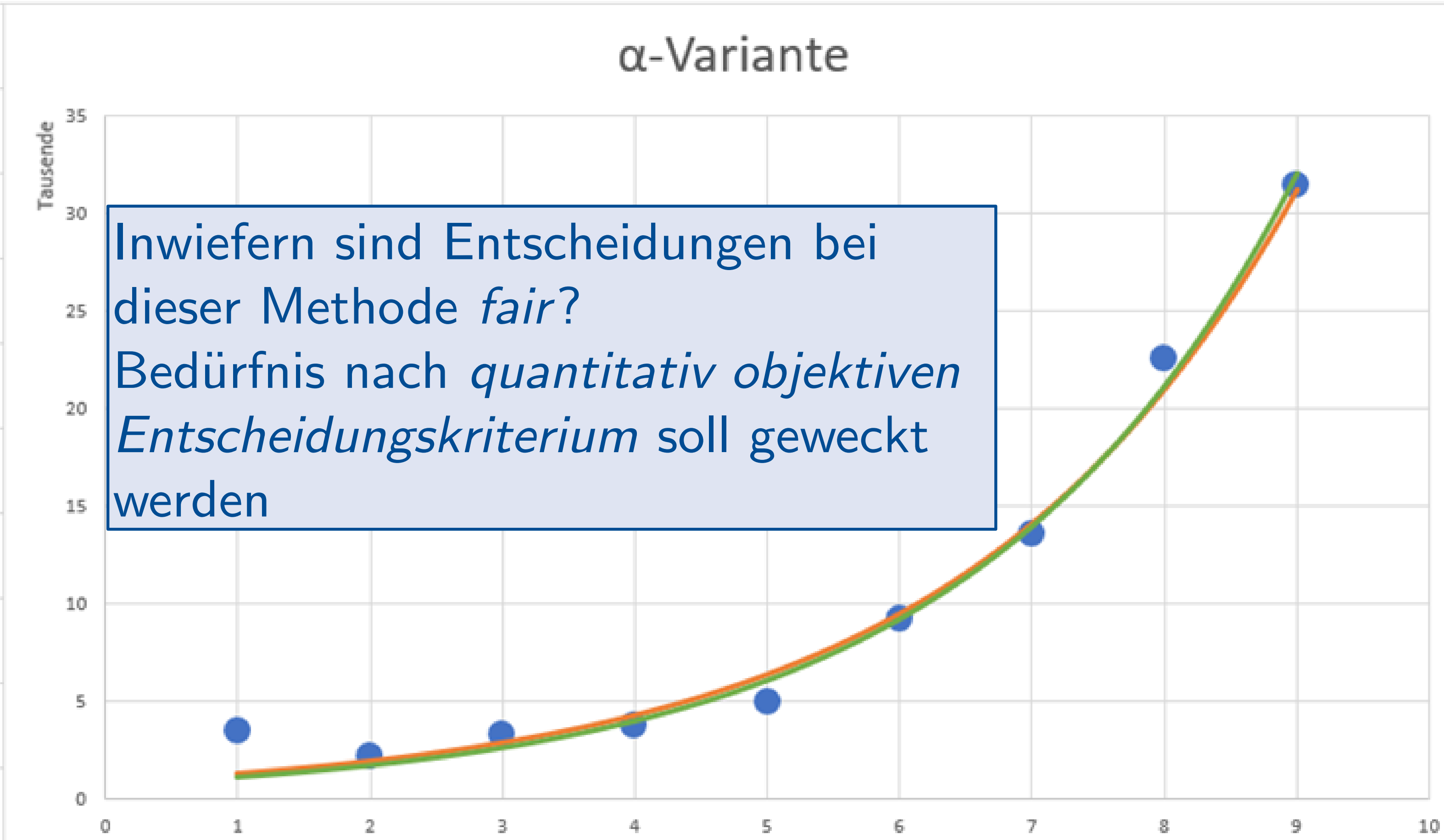


Modell A: Gruppe von Schüler*innen Modell B: Modell des kl. Quadrats

Unterrichtsvorhaben: Phase 2

Auftrag: Suche nach Passung möglichst aller Datenpunkte
Methode: Schüler*innen bestimmen die optimalen Parameter nach *Augenmaß*

Modell A	eintragen
c_w	134000
k_w	-0,21
c_α	1300
k_α	0,397
Modell B	**eintragen**
c_w	136700
k_w	-0,2184
c_α	1163
k_α	0,4143



Inwiefern sind Entscheidungen bei dieser Methode *fair*?
Bedürfnis nach *quantitativ objektiven Entscheidungskriterium* soll geweckt werden

Modell A: Gruppe von Schüler*innen Modell B: Modell des kl. Quadrats

Unterrichtsvorhaben: Phase 2 (Problematisierung)

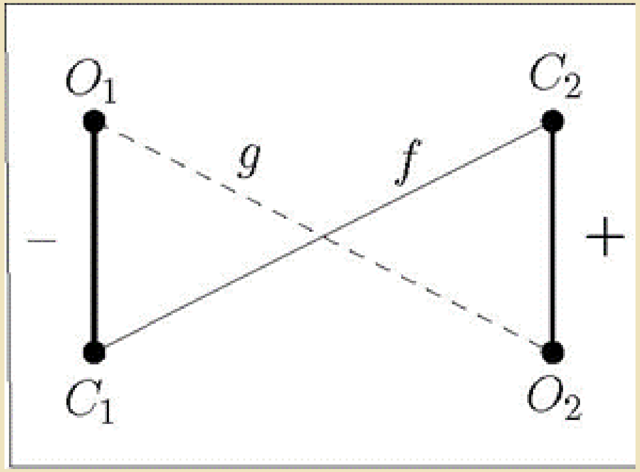
Können wir die Güte der Anpassung **messbar** machen, so dass wir Zahlen vergleichen können?

Unterrichtsvorhaben: Phase 2 (Problematisierung)

Können wir die Güte der Anpassung **messbar** machen, so dass wir Zahlen vergleichen können?

Vorschläge für Fehlerfunktionalen von Schüler*innen in Erprobungen:

- Summe der Differenzen

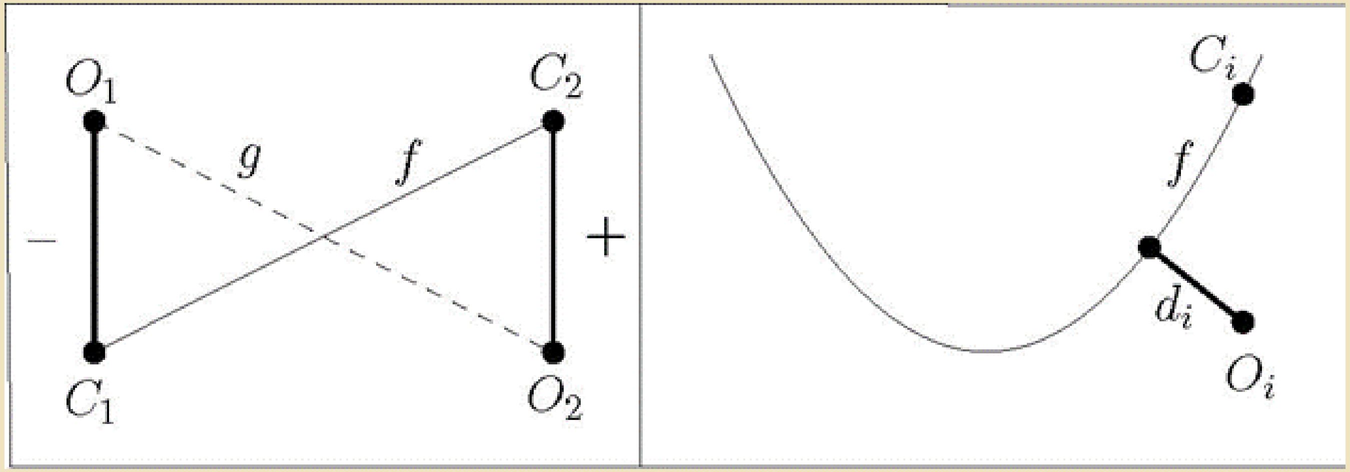


Unterrichtsvorhaben: Phase 2 (Problematisierung)

Können wir die Güte der Anpassung **messbar** machen, so dass wir Zahlen vergleichen können?

Vorschläge für Fehlerfunktionalen von Schüler*innen in Erprobungen:

- Summe der Differenzen
- Summe der kürzesten Abstände zum Graphen

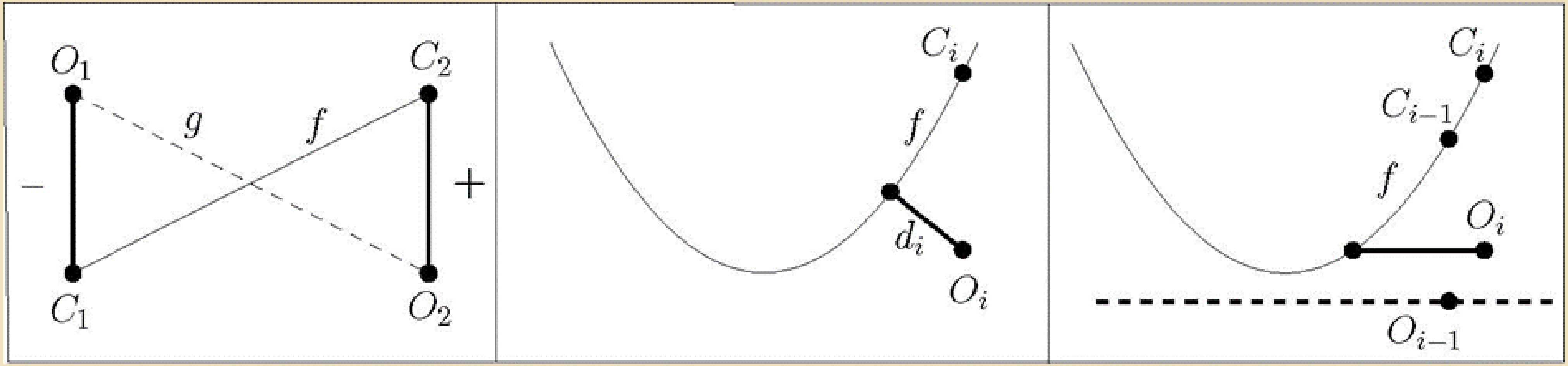


Unterrichtsvorhaben: Phase 2 (Problematisierung)

Können wir die Güte der Anpassung **messbar** machen, so dass wir Zahlen vergleichen können?

Vorschläge für Fehlerfunktionalen von Schüler*innen in Erprobungen:

- Summe der Differenzen
- Summe der kürzesten Abstände zum Graphen
- Summe der horizontalen Abstände
- Produkt der vertikalen Abstände

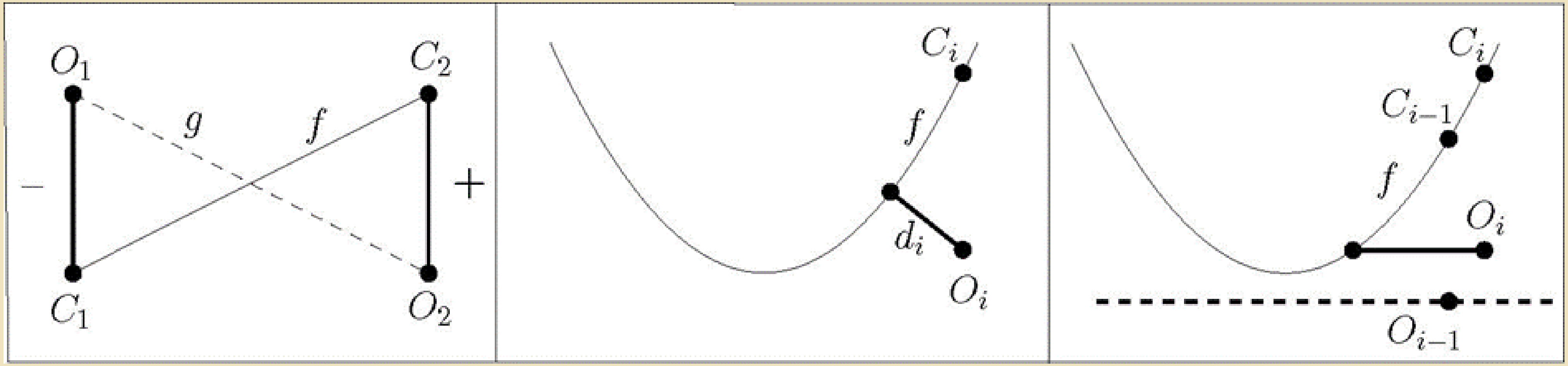


Unterrichtsvorhaben: Phase 2 (Problematisierung)

Können wir die Güte der Anpassung **messbar** machen, so dass wir Zahlen vergleichen können?

Vorschläge für Fehlerfunktionalen von Schüler*innen in Erprobungen:

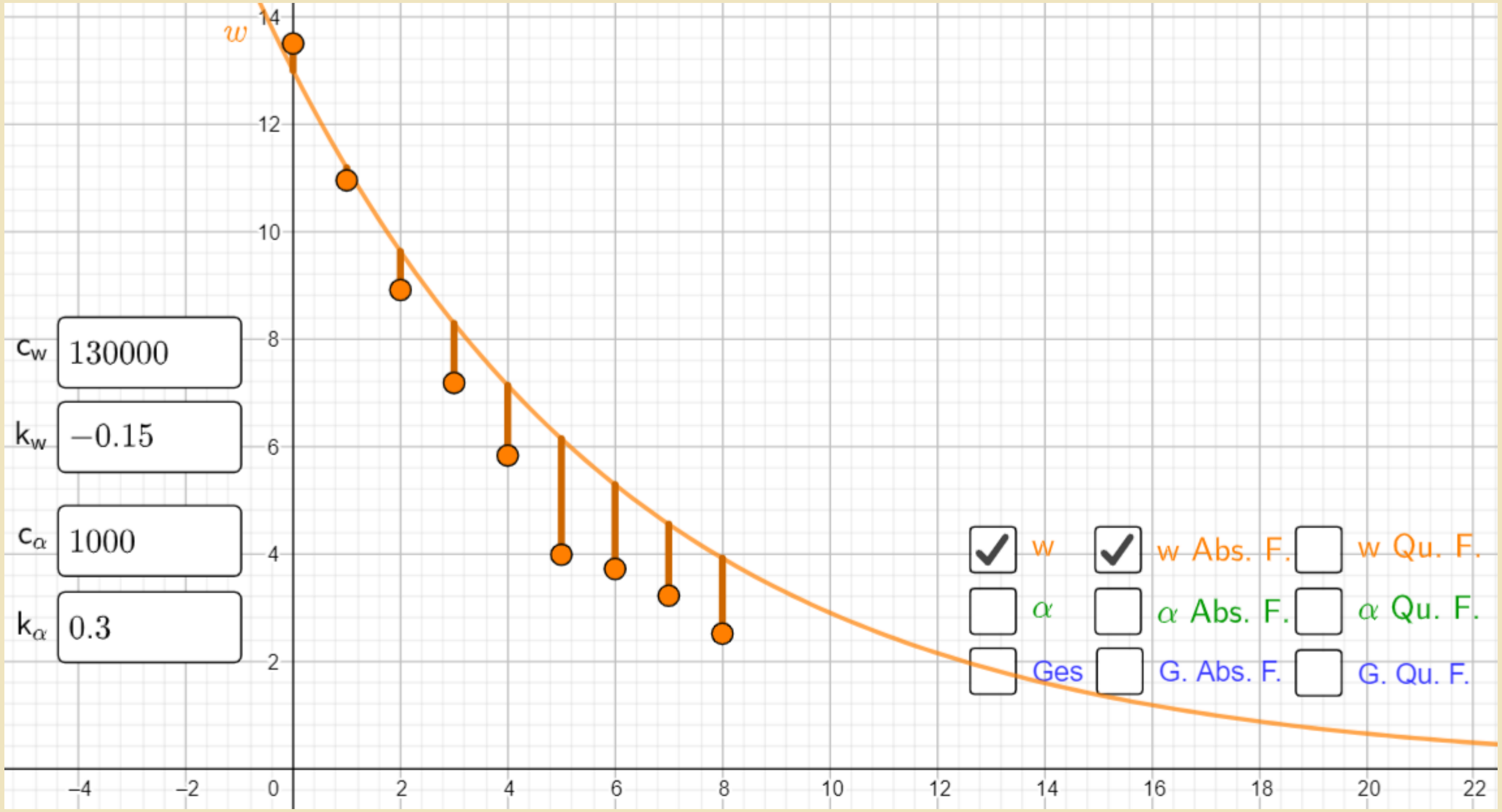
- Summe der Differenzen
- Summe der kürzesten Abstände zum Graphen
- Summe der horizontalen Abstände
- Produkt der vertikalen Abstände
- Maximale Abweichung: $\max_i |O_i - C_i|$
- Summe der v. Abstände: $\sum_{i=1}^{n} |O_i - C_i|$



Unterrichtsvorhaben: Phase 2 (Problematisierung)

Können wir die Güte der Anpassung **messbar** machen, so dass wir Zahlen vergleichen können?

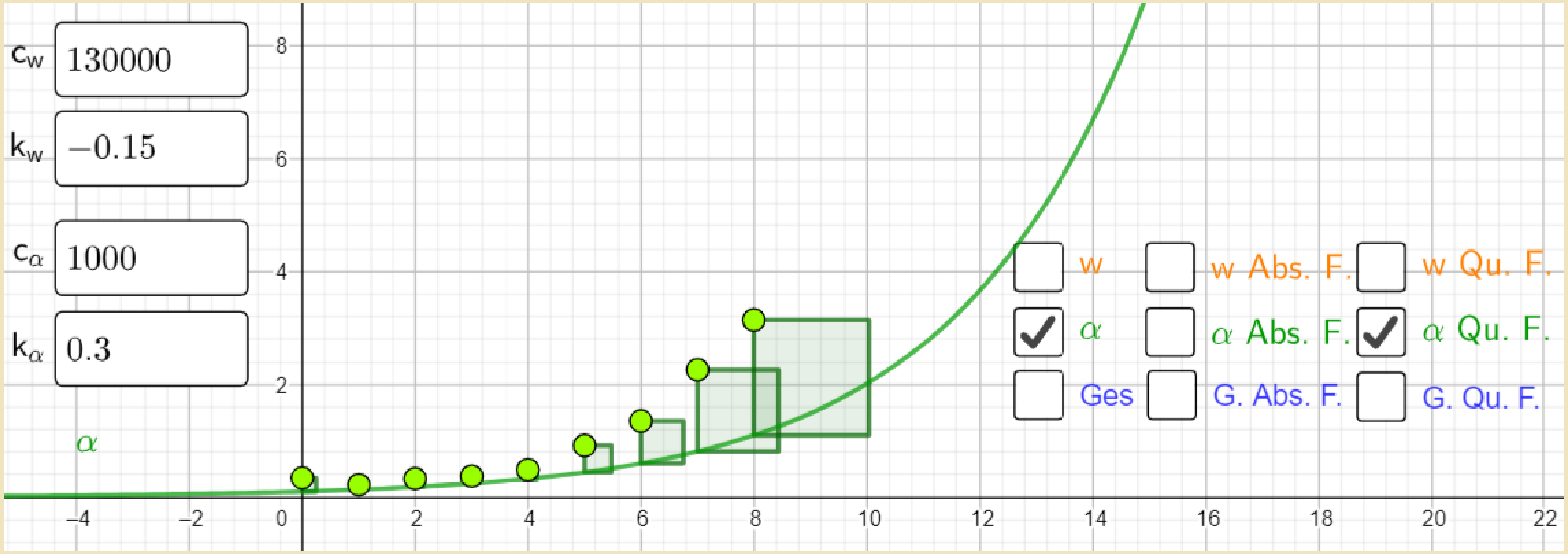
- Summe der Abstände: $\sum_{i=1}^{n} |O_i - C_i|$: Ausreißer werden kaum bestraft



Unterrichtsvorhaben: Phase 2 (Problematisierung)

Können wir die Güte der Anpassung **messbar** machen, so dass wir Zahlen vergleichen können?

- Summe der Abstände: $\sum_{i=1}^{n} |O_i - C_i|$: Ausreißer werden kaum bestraft
- Summe der Abstandsquadrate: $QF := \sum_{i=1}^{n} (O_i - C_i)^2$

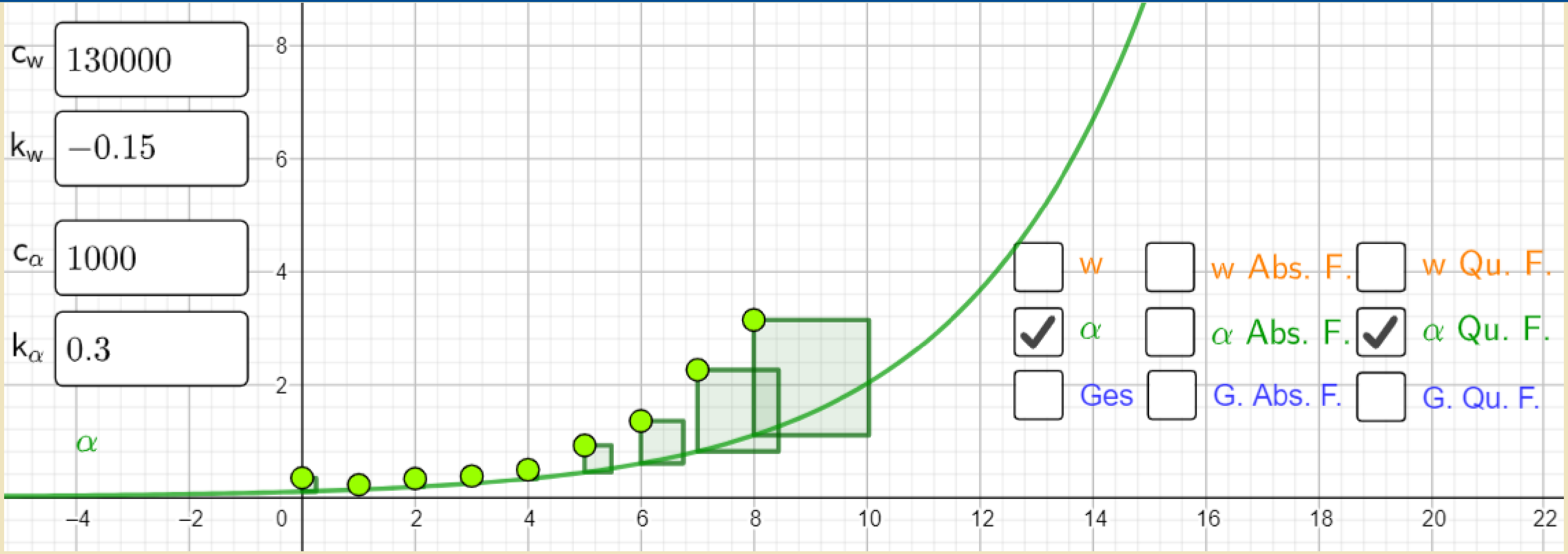


Unterrichtsvorhaben: Phase 2 (Problematisierung)

Können wir die Güte der Anpassung **messbar** machen, so dass wir Zahlen vergleichen können?

- Summe der Abstände: $\sum_{i=1}^{n} |O_i - C_i|$: Ausreißer werden kaum bestraft
- Summe der Abstandsquadrate: $QF := \sum_{i=1}^{n} (O_i - C_i)^2$

Minimierung verschiedener Fehlerfunktionale führt auf unterschiedliche optimale Parameter
Betrachtung von w und α einzeln oder von "Gesamt" nimmt ebenfalls Einfluss



Exkurs III: Ein alternatives Fehlerfunktional

Idee: Nutzung des **exponentiellen Modells** $f(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$ & **Ausgleichsgerade**

Algorithmus:

exponentielle Regression

1. Logarithmieren der Fallzahlen
   - $\ln(f) = \ln(a) + b \cdot x$
   - Linearer Zusammenhang für $\ln(f)$, also $\ln(f) = k \cdot x + d$ mit $a = e^d$ und $b = k$
2. Berechnen der Ausgleichsgerade (d.h. k und d) mittels *kleinstem Fehlerquadrat* (sog. *lineare Regression*)
3. Rückeinsetzen ergibt optimale Parameterwerte a und b und damit $f(x)$

Exkurs III: Ein alternatives Fehlerfunktional

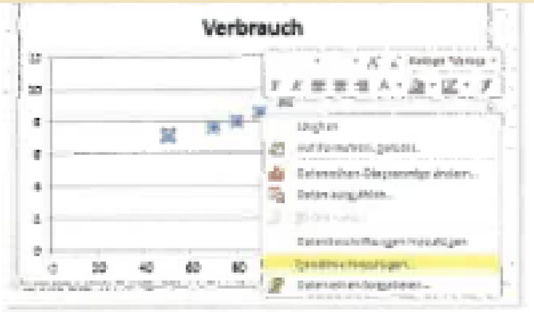
Idee: Nutzung des **exponentiellen Modells** $f(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$ & **Ausgleichsgerade**

Algorithmus:

exponentielle Regression

1. Logarithmieren der Fallzahlen
   - $\ln(f) = \ln(a) + b \cdot x$
   - Linearer Zusammenhang für $\ln(f)$, also $\ln(f) = k \cdot x + d$ mit $a = e^d$ und $b = k$
2. Berechnen der Ausgleichsgerade (d.h. k und d) mittels *kleinstem Fehlerquadrat* (sog. *lineare Regression*)
3. Rückeinsetzen ergibt optimale Parameterwerte a und b und damit $f(x)$

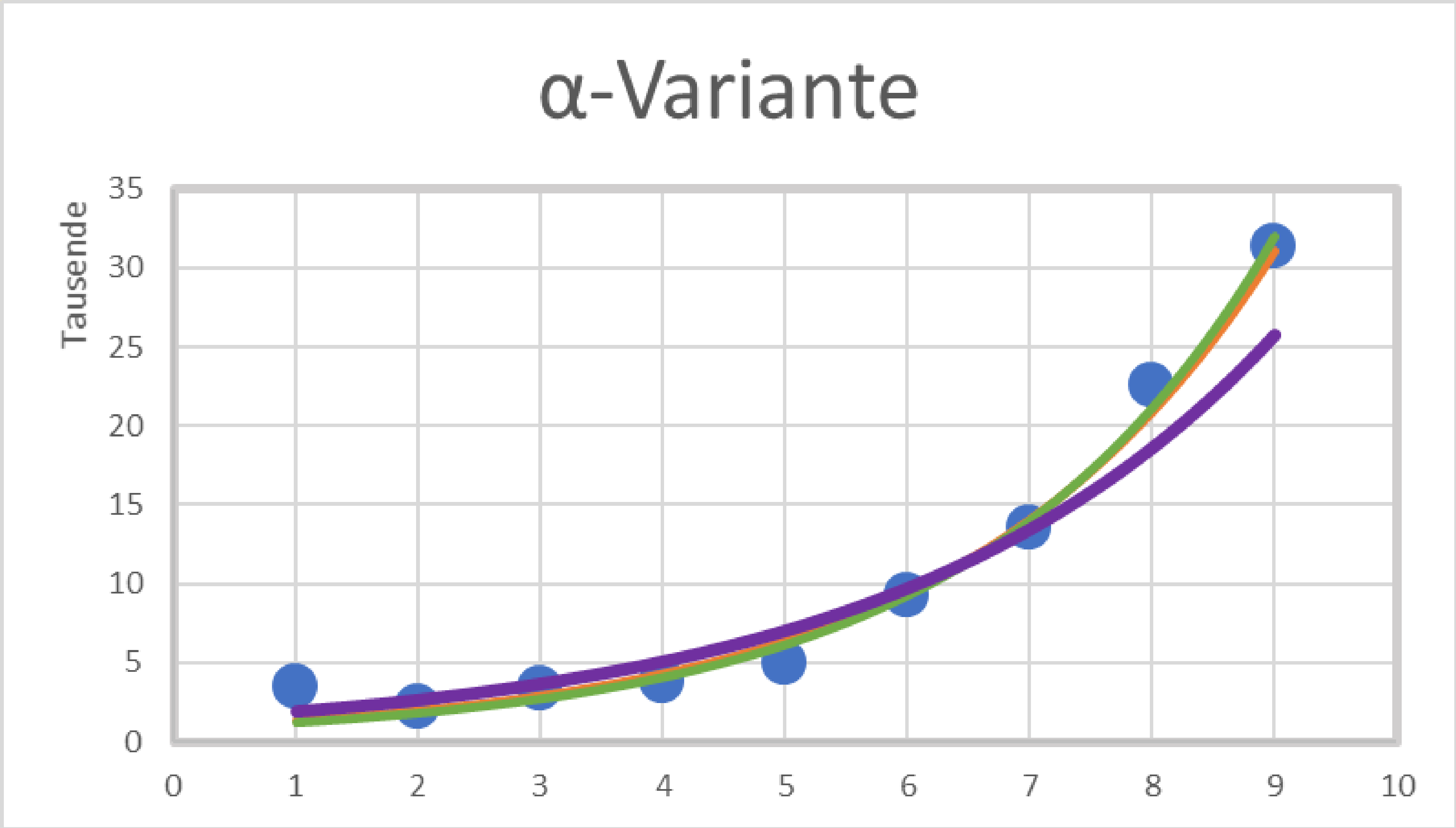
Bei **Excel** gibt man zunächst die Daten ein und erstellt mithilfe des Diagrammassistenten einen Graphen. Nun markiert man auf dem Diagramm per Mausklick die Datenreihe und öffnet mit der rechten Maustaste die Registerkarte, in der man die „Trendlinie hinzufügen" kann.



Excel "Trendlinie" berechnet exponentielle Regression

Exkurs III: Ein alternatives Fehlerfunktional

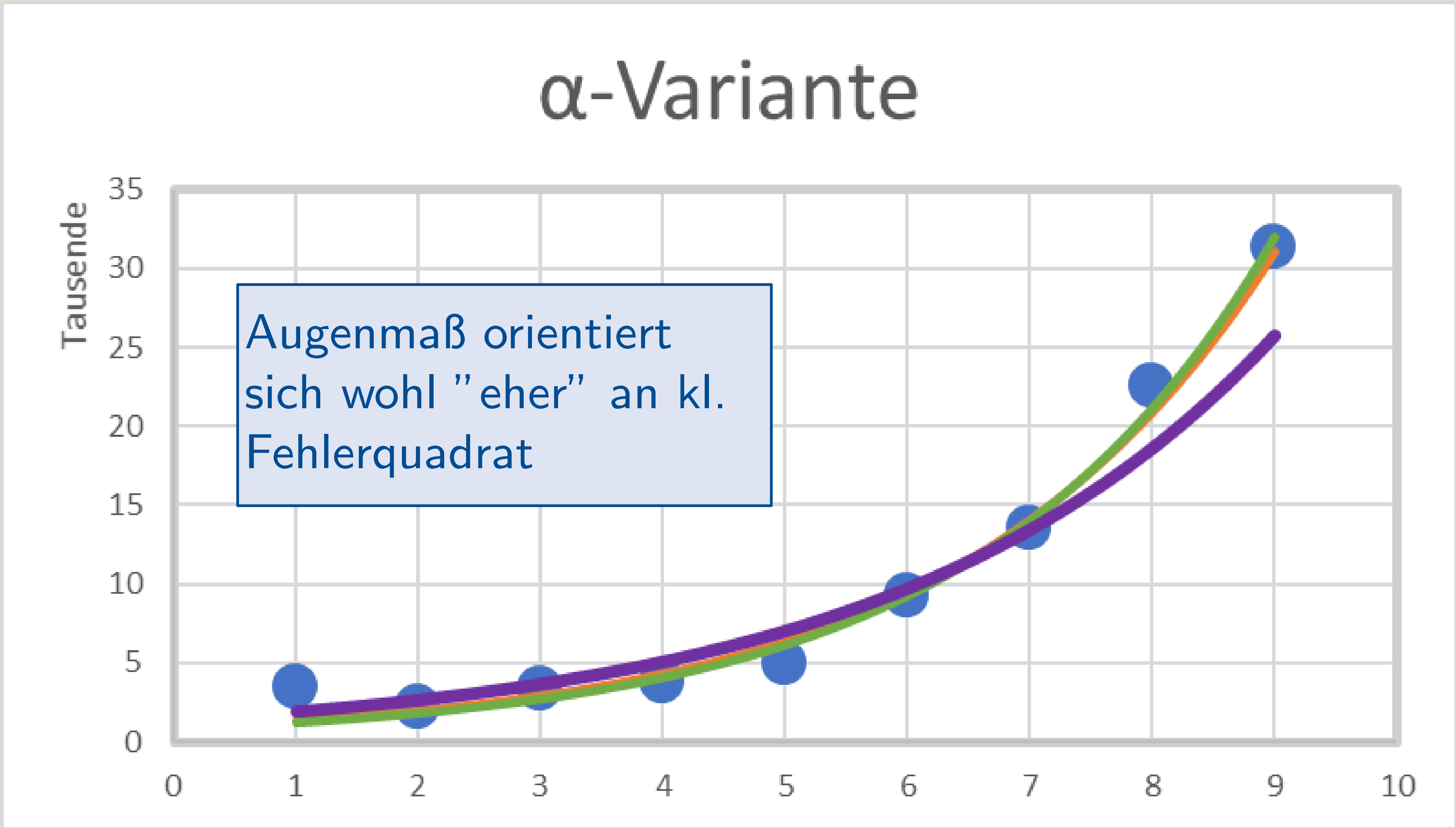
Exponentielle Regression bei unserer Aufgabe:



Lösung von SuS nach Augenmaß **Methode der kleinsten Quadrate**
exponentielle Regression

Exkurs III: Ein alternatives Fehlerfunktional

Exponentielle Regression bei unserer Aufgabe:



Lösung von SuS nach Augenmaß **Methode der kleinsten Quadrate**
exponentielle Regression

Unterrichtsvorhaben: Phase 3

Ausgangspunkt:

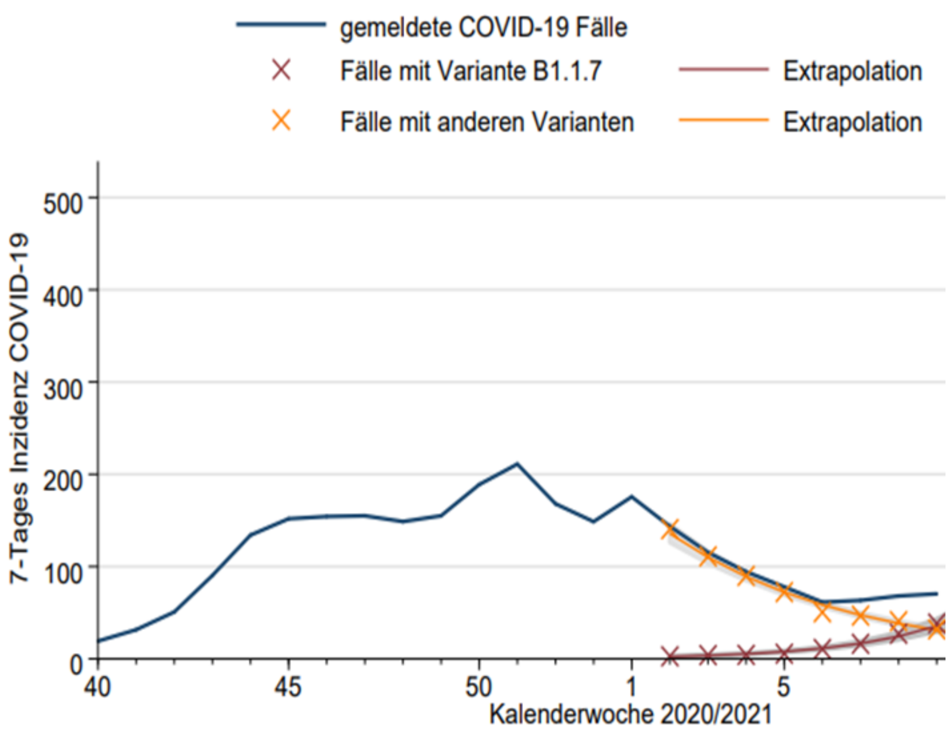


Abbildung 6: Analyse der 7-Tages Inzidenz als Summe der 7-Tages Inzidenz der Variante B.1.1.7 und aller übrigen Varianten (Datenstand 12.03.2021, n= 14.912). Es zeigt sich ein exponentiell ansteigender Trend der 7-Tages Inzidenz der Variante B.1.1.7 seit Kalenderwoche 2. Diese steigt in jeder Woche um etwa 46% an und hat sich also etwa alle 12 Tage verdoppelt. Demgegenüber zeigt der Verlauf der 7-Tage Inzidenz aller übrigen Varianten einen Rückgang um etwa 19% pro Woche. Diese beiden Trends überlagern sich zurzeit, was insgesamt zu der nur langsam ansteigenden 7-Tage-Inzidenz der letzten 4 Wochen (Kalenderwoche 06 bis 09) führte. Die Extrapolation der Trends zeigt, dass mit Fallzahlen über dem Niveau von Weihnachten ab KW 14 zu rechnen ist.

KW	Wildtyp	α-Variante
01	135053	3463
02	109549	2236
03	89129	3328
04	71806	3779
05	58279	4930
06	39803	9215
07	37157	13534
08	32173	22543
09	25094	31424

Daten: Robert Koch-Institut (RKI)

Unterrichtsvorhaben: Phase 3

Ausgangspunkt:

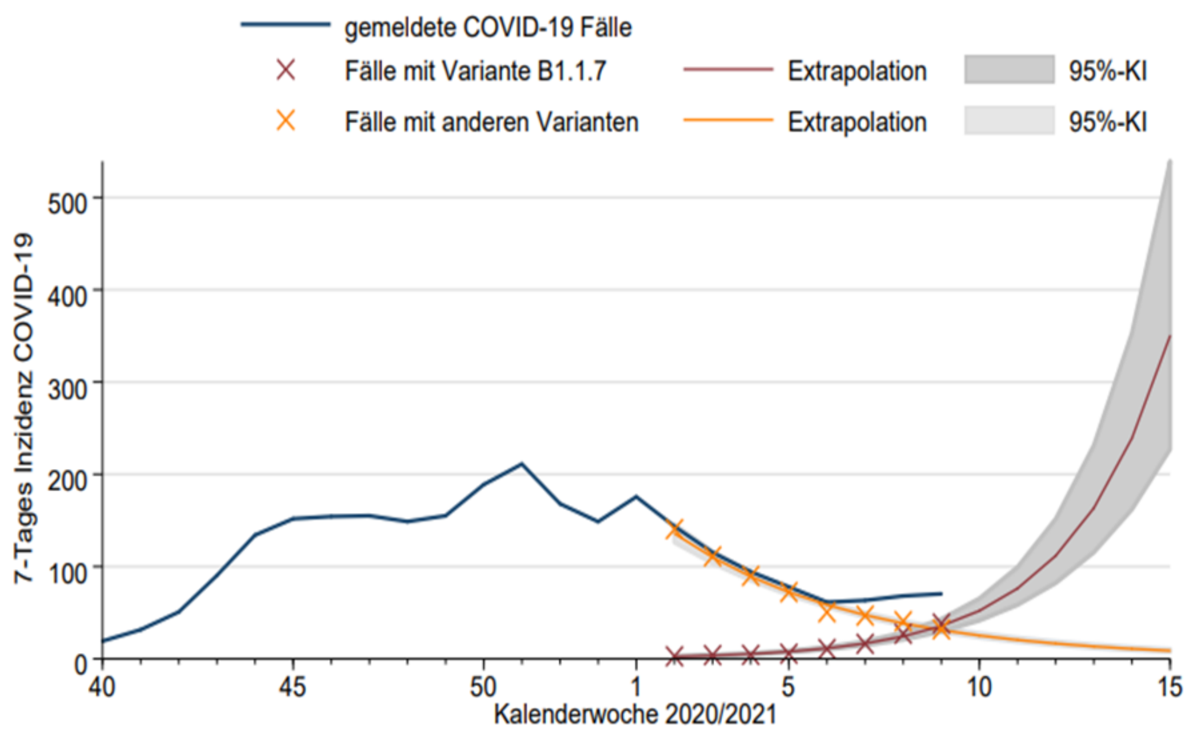
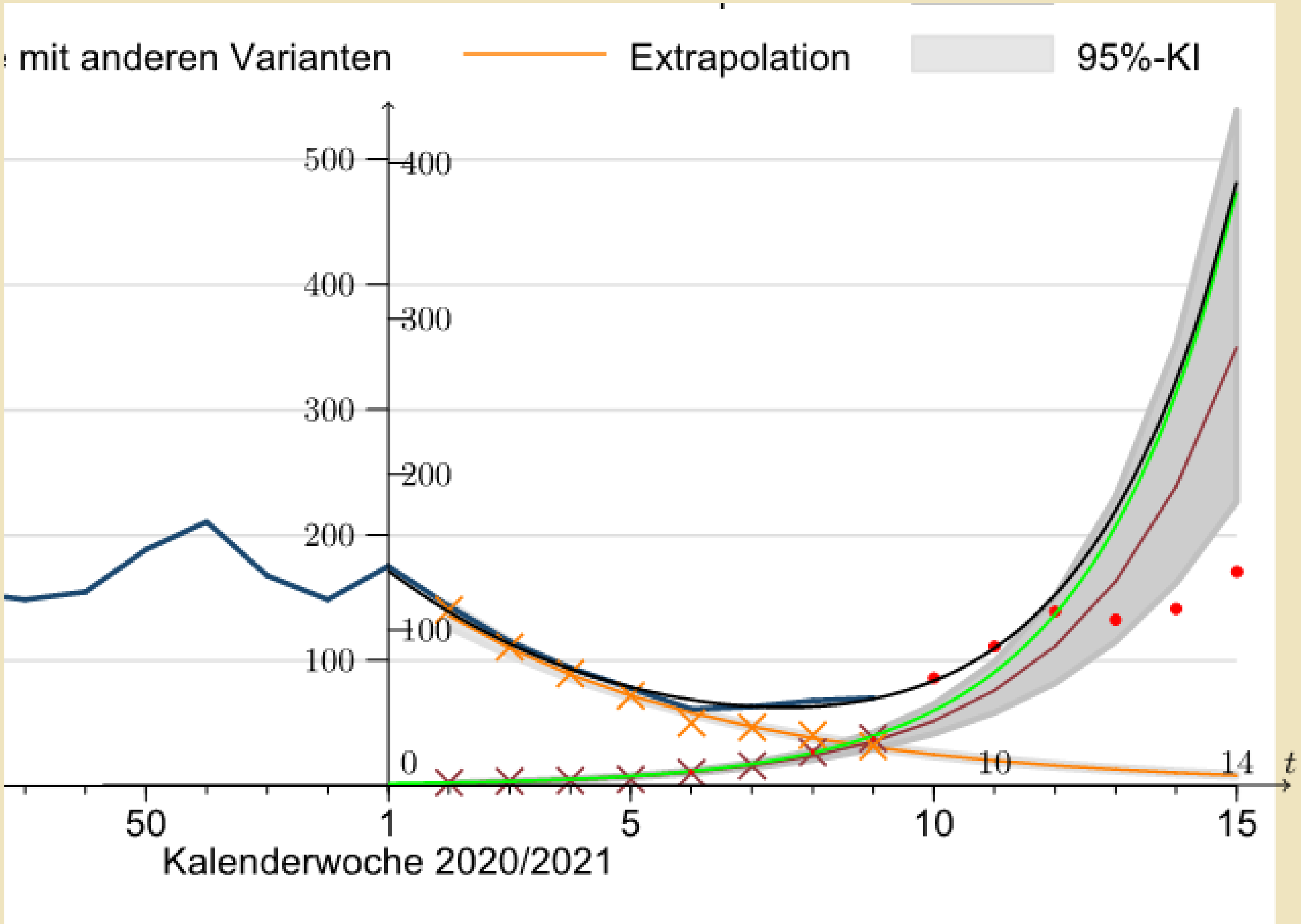


Abbildung 6: Analyse der 7-Tages Inzidenz als Summe der 7-Tages Inzidenz der Variante B.1.1.7 und aller übrigen Varianten (Datenstand 12.03.2021, n= 14.912). Es zeigt sich ein exponentiell ansteigender Trend der 7-Tages Inzidenz der Variante B.1.1.7 seit Kalenderwoche 2. Diese steigt in jeder Woche um etwa 46% an und hat sich also etwa alle 12 Tage verdoppelt. Demgegenüber zeigt der Verlauf der 7-Tage Inzidenz aller übrigen Varianten einen Rückgang um etwa 19% pro Woche. Diese beiden Trends überlagern sich zurzeit, was insgesamt zu der nur langsam ansteigenden 7-Tage-Inzidenz der letzten 4 Wochen (Kalenderwoche 06 bis 09) führte. Die Extrapolation der Trends zeigt,

- Prognose von RKI

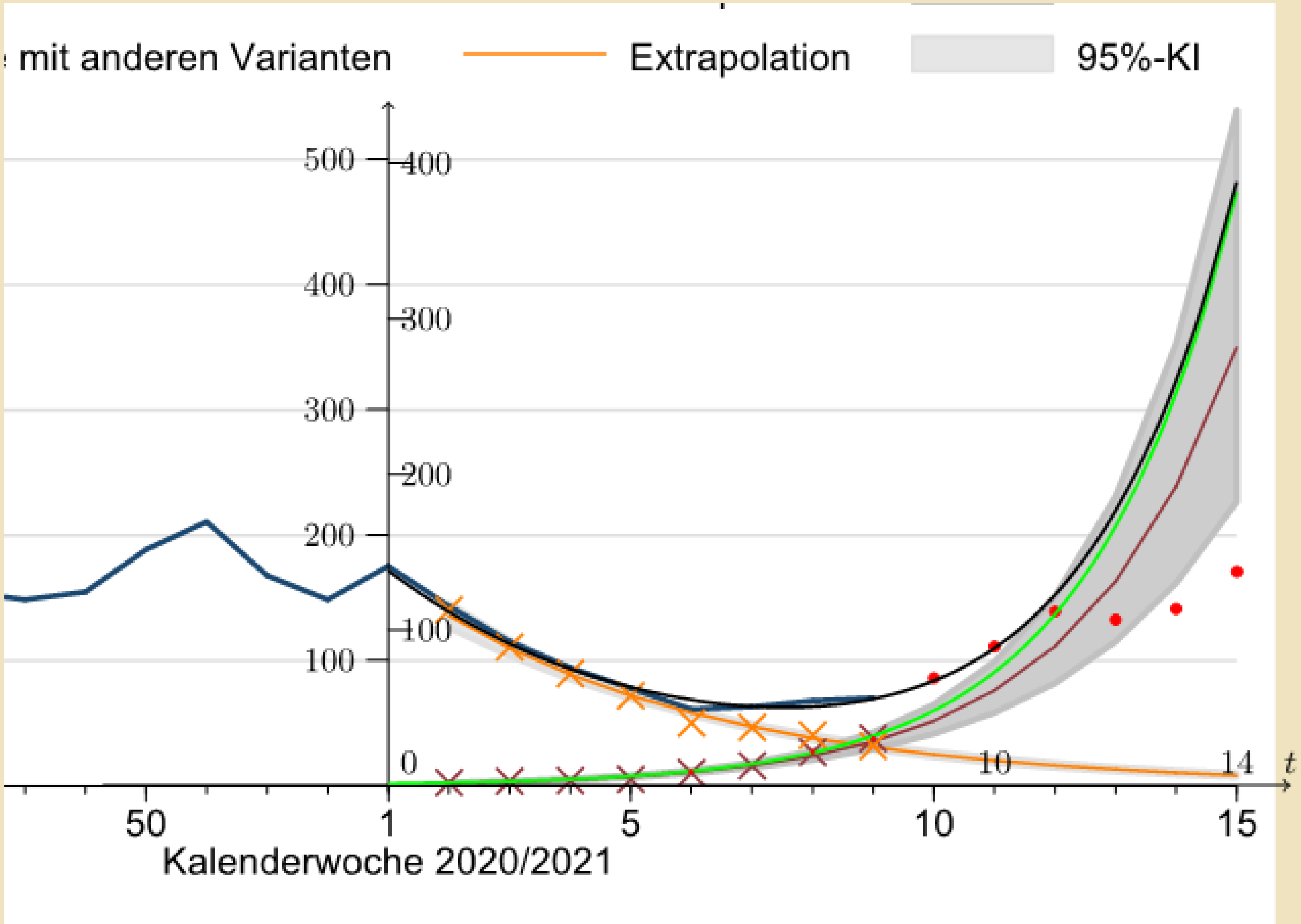
Unterrichtsvorhaben: Phase 3



- Prognose von RKI
- **Wie sieht "unsere" Prognose aus?**

- α-Prognose
- w-Prognose
- Gesamt-Prognose

Unterrichtsvorhaben: Phase 3



- Prognose von RKI
- **Wie sieht "unsere" Prognose aus?**

- α-Prognose
- w-Prognose
- Gesamt-Prognose
- • : Fallzahlen

Diskussionsanlass: Warum ist die Prognose nicht eingetreten?

Unterrichtsvorhaben: Phase 3

Diskussionsanlass: Warum ist die Prognose nicht eingetreten?

- Zahlreiche gute Argumente, fruchtbare Diskussionen und Reflexionen
- Darüber hinaus: ZEIT-Artikel über eben jene Prognose aus April 2021:
  Corona - Inzidenzen – Rechnung mit vielen Unbekannten.
  (Text bietet sich als Hausübungslektüre an!)

Fazit und Ausblick

Anbindung an den Lehrplan

AHS

- 6. Klasse: *Exponentialfunktion in außermathematischen Situationen anwenden können; Funktionen als Modelle auffassen, Modelle vergleichen und Grenzen von Modellbildung reflektieren können*
- Wahlpflichtfach: Regression; Programmierung mathematischer Verfahren, Anwendungsprobleme aus Naturwissenschaften
- Physik: E (Experimente und Erkenntnisgewinnung): *Daten durch mathematische und physikalische Modelle abbilden und interpretieren*

BHS (HTL):

- 4./5. Jahr: "*die Methode der kleinsten Quadrate verstehen und aus vorgegebenen Punkten eine passende Ausgleichsfunktion mittels Technologieeinsatz ermitteln und das Ergebnis interpretieren;*
- 4./5.Jahr: *die Methode der linearen Regression anwenden.*

Fazit

- In der skizzierten Doppelstunde befassen wir uns mit dem Zusammenspiel von Daten und Modellen unter Berücksichtigung der Leitidee des *Messens* (von Fehlern).

Fazit und Ausblick

Fazit

- In der skizzierten Doppelstunde befassen wir uns mit dem Zusammenspiel von Daten und Modellen unter Berücksichtigung der Leitidee des *Messens* (von Fehlern).
- Entscheidende Idee: Loslösen von exakter Passung einzelner Datenpunkte
- Arten der Fehlerrechnung werden anhand eines realen Problemkontexts motiviert und diskutiert

Fazit und Ausblick

Fazit

- In der skizzierten Doppelstunde befassen wir uns mit dem Zusammenspiel von Daten und Modellen unter Berücksichtigung der Leitidee des *Messens* (von Fehlern).
- Entscheidende Idee: Loslösen von exakter Passung einzelner Datenpunkte
- Arten der Fehlerrechnung werden anhand eines realen Problemkontexts motiviert und diskutiert
- Auseinandersetzung mit Prognosen mathematischer Modelle . . .
- . . . bietet Raum für Reflexionen und . . .
- . . . zeigt exemplarisch die Rolle der Mathematik in der Gesellschaft

Fazit und Ausblick

Fazit

- In der skizzierten Doppelstunde befassen wir uns mit dem Zusammenspiel von Daten und Modellen unter Berücksichtigung der Leitidee des *Messens* (von Fehlern).
- Entscheidende Idee: Loslösen von exakter Passung einzelner Datenpunkte
- Arten der Fehlerrechnung werden anhand eines realen Problemkontexts motiviert und diskutiert
- Auseinandersetzung mit Prognosen mathematischer Modelle ...
- ... bietet Raum für Reflexionen und ...
- ... zeigt exemplarisch die Rolle der Mathematik in der Gesellschaft
- Ermöglicht uns, seriöse Aussagen über Bierschaumqualität zu tätigen
  - mittels Methode der kleinsten Quadrate ist die optimale Funktionsvorschrift $f(x) = 29,97 \cdot e^{-0,00705 \cdot x}$
  - Die HWZ beträgt in etwa 98 sec. Fazit: Es handelt sich demnach sehr wahrscheinlich um einen nicht sehr guten Bierschaum

Ausblick

- Einschränkung: Modell der Exponentialfunktion wurde als Grundlage herangezogen; ist jedoch nur eingeschränkt nutzbar in Epidemiologie

Fazit und Ausblick

Ausblick

- Einschränkung: Modell der Exponentialfunktion wurde als Grundlage herangezogen; ist jedoch nur eingeschränkt nutzbar in Epidemiologie
- Mathematisch begründbares Modell zum Verlauf von Epidemien: **SIR-Modell.**
  - Unterrichtsentwurf einer Doppelstunde zur Etablierung dieses Modells ab Schulstufe 9 (Donner & Bauer, 2022)
  - SIR-Modell ist Ausgangspunkt für (Differentialglgs-)Modelle von SuS, die weitere Aspekte wie Impfung oder Kontaktbeschränkungen miteinbeziehen (Bauer & Donner, 2022)

Fazit und Ausblick

Ausblick

- Einschränkung: Modell der Exponentialfunktion wurde als Grundlage herangezogen; ist jedoch nur eingeschränkt nutzbar in Epidemiologie
- Mathematisch begründbares Modell zum Verlauf von Epidemien: **SIR-Modell.**
  - Unterrichtsentwurf einer Doppelstunde zur Etablierung dieses Modells ab Schulstufe 9 (Donner & Bauer, 2022)
  - SIR-Modell ist Ausgangspunkt für (Differentialglgs-)Modelle von SuS, die weitere Aspekte wie Impfung oder Kontaktbeschränkungen miteinbeziehen (Bauer & Donner, 2022)
- Zum Abschluss ein Denkanstoß zum Thema Reflexionen für den Unterricht: Viele Kennwerte bestimmen die Debatte um Sars-CoV-2: Verdoppelungszahl, R-Wert, 7-Tages-Inzidenz, Hospitalisierungszahl.

  Warum wurden zu verschiedenen Zeitpunkten unterschiedliche Kennwerte zur Legitimation von Maßnahmen herangezogen?

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!

Bauer, S., Doktor, J., & D., L. (2022). Daten, Modelle und Prognosen – das verborgene Vordringen der α-Variante. In Besser, M. et al. ISTRON-Schriftenreihe: Mathematisches Modellieren in der Praxis: Lernumgebungen für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht in den Sekundarstufen. Aufgabenbeispiele, fachliche und fachdidaktische Fundierungen, methodische Überlegungen, Beschreibung von Schülerlösungsprozessen. (accepted with minor revision)

Bauer, S., & D., L. (2022). Modellieren von Epidemien — exponentiell und darüber hinaus. mathematik lehren (accepted)

D., L., & Bauer, S (2022). A topic-specific design research approach for modelling Covid-19 in grade 9 and 10. In Proceedings of the Congress of the european society for research in mathematics education (CERME). (to appear)

Kermack, W. O., & McKendrick, A. G. (1927). A contribution to the mathematical theory of epidemics. Proceedings of the royal society of london. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character, 115(772), 700-721.

Malle, G., Koth, M., Woschitz, H., Malle, S., Salzger, B. & Ulovec, A. (2010). Mathematik verstehen 6: Schülerband. Wien: öbv & hpt

Robert Koch Institut. (2021a). Täglicher Lagebericht des RKI zur Corona-Virus-Krankheit-2019 (COVID-19), 13.03.21– aktualisierte Fassung. https://www.rki.de/DE/Content/InfAZ/N/Neuartiges_Coronavirus/Situationsberichte/Maerz_2021/2021-03-13-de.pdf?__blob=publicationFile (abgerufen am 19.04.2022)

Robert Koch Institut. (2021b). Bericht zu Virusvarianten von SARS-CoV-2 in Deutschland, insbesondere zur Variant of Concern (VOC) B.1.1.7. https://www.rki.de/DE/Content/InfAZ/N/Neuartiges_Coronavirus/DESH/Bericht_VOC_2021-03-31.pdf?__blob=publicationFile (abgerufen am 19.04.2022)

Schieritz, M. (2021). Corona Inzidenzen - Rechnung mit vielen Unbekannten. DIE ZEIT. https://www.zeit.de/2021/20/corona-inzidenzen-rki-fallzahlen-rechnung-neuinfektionen-trend (abgerufen am 19.04.2022)