Die Entzauberung des Unendlichen

Roland Steinbauer

Fakultät für Mathematik, Universität Wien

ÖMG-Fortbildungstagung für Lehrkräfte, 9. April 2021

Die Entzauberung des Unendlichen

Das Unendliche ist weit, vor allem gegen Ende.

ALPHONSE ALLAIS, Franz. Literat & Humorist (1854–1905)

Inhalt

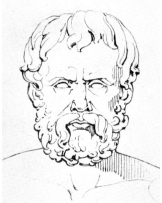
Inhalt

Einleitung

- Die Idee des „Unendlichen“ bewegt!
  von Philosophie, Kunst, Literatur über Theologie, Werbung
  zu Naturwissenschaften, Mathematik & Technik

Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt des Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff so der Aufklärung bedürftig. David Hilbert (1862–1943)

- Ausgangspunkt: Bewegungsparadoxien des Zenon von Elea (490–430)
  - Achill und die Schildkröte
  - Pfeilparadoxon

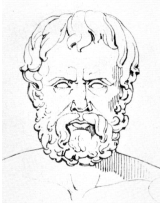


Einleitung

- Die Idee des „Unendlichen“ bewegt!
  von Philosophie, Kunst, Literatur über Theologie, Werbung
  zu Naturwissenschaften, Mathematik & Technik

Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt des Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff so der Aufklärung bedürftig. David Hilbert (1862–1943)

- Ausgangspunkt: Bewegungsparadoxien des Zenon von Elea (490–430)
  - Achill und die Schildkröte
  - Pfeilparadoxon



Einleitung

- Die Idee des „Unendlichen“ bewegt!
  von Philosophie, Kunst, Literatur über Theologie, Werbung
  zu Naturwissenschaften, Mathematik & Technik

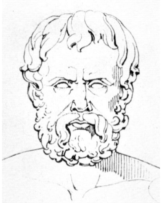
Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt des Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine and … uchtbar gewirkt; … Begriff so der A … 2–1943)

- Ausgangspunkt:
  Bewegungsparadox
  des Zenon von E
  - Achill und die
  - Pfeilparadoxon

Einleitung

- Die Idee des „Unendlichen“ bewegt!
  von Philosophie, Kunst, Literatur über Theologie, Werbung
  zu Naturwissenschaften, Mathematik & Technik

Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt des Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff so der Aufklärung bedürftig. DAVID HILBERT (1862–1943)



- Ausgangspunkt: Bewegungsparadoxien des ZENON VON ELEA (490–430)
  - Achill und die Schildkröte
  - Pfeilparadoxon

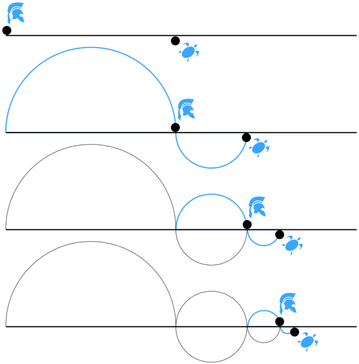
Achill und die Schildkröte

S hat Vorsprung von 100m.

Bevor A S einholen kann, muss er ihren Startpkt erreichen. In dieser Zeit legt S 50m zurück

Bevor A S einholen kann, muss er diesen Pkt erreichen. In dieser Zeit legt S 25m zurück

usw. usf...



Also kann Achill die Schildkröte nie einholen.

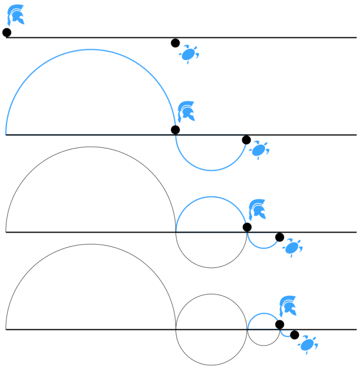
Achill und die Schildkröte

S hat Vorsprung von 100m.

Bevor A S einholen kann, muss er ihren Startpkt erreichen. In dieser Zeit legt S 50m zurück

Bevor A S einholen kann, muss er diesen Pkt erreichen. In dieser Zeit legt S 25m zurück

usw. usf. . .



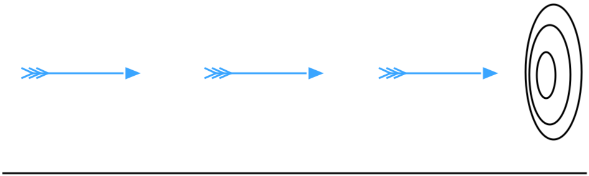
Also kann Achill die Schildkröte nie einholen.

Pfeilparadoxon

Fliegender Pfeil nimmt zu jedem Zeitpkt einen bestimmten Ort ein.

Dort befindet er sich in Ruhe.

Also befindet er sich in jedem Moment in Ruhe.



Also kann sich der Pfeil gar nicht bewegen.

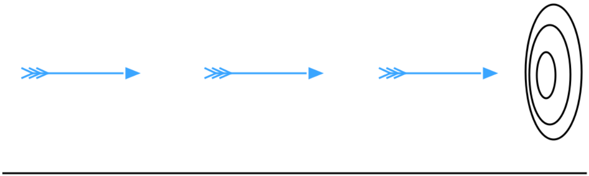
Moderne Version: Foto

Pfeilparadoxon

Fliegender Pfeil nimmt zu jedem Zeitpkt einen bestimmten Ort ein.

Dort befindet er sich in Ruhe.

Also befindet er sich in jedem Moment in Ruhe.



Also kann sich der Pfeil gar nicht bewegen.

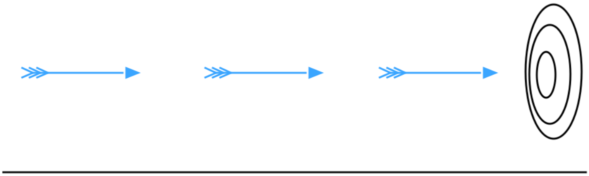
Moderne Version: Foto

Pfeilparadoxon

Fliegender Pfeil nimmt zu jedem Zeitpkt einen bestimmten Ort ein.

Dort befindet er sich in Ruhe.

Also befindet er sich in jedem Moment in Ruhe.



Also kann sich der Pfeil gar nicht bewegen.

Moderne Version: Foto

Bewegungsparadoxien im Kontext

- Zenon von Elea (490–430 v.u.Z.)
  - Bewegungsparadoxien

  Kontext: Verteidigung der Ideen des

- Parmenides von Elea (ca. 520–460 v.u.Z.)
  - radikaler Monismus
  - Veränderung/Bewegung gibt es nicht

  Kontext: Widerspruch zu Heraklit

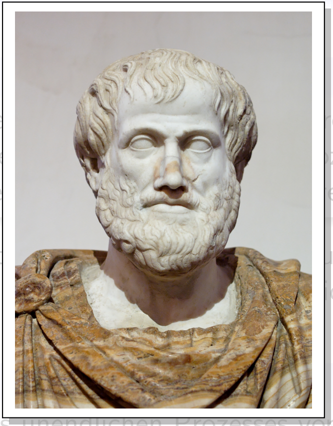
- Heraklit von Ephesos (ca. 520–460 v.u.Z.)
  - Veränderung/Wandel alles Seienden
  - „Alles fließt"

Hörtipp: BBC Radio 4, In our Time (Philosophy) Podcast

Inhalt

Zwei Sichtweisen auf das Unendliche

ARISTOTELES (384–322 v.u.Z.)



Das potentiell Unendliche

ist die in der Vorstellung vorhande... ...renden,
nicht endenden Wiederholung eine... ...ozesses.
(fortlaufendes Zählen, Verstreiche... ...ecke)

Da so eine unendliche Gesamtheit ... ...ufen"
werden kann, ist das Unendliche i... ...ich
vorhanden". Im Gegensatz dazu:

Das Aktual Unendliche

bei dem bereits das Ergebnis eines unendlichen Prozesses vorliegt.
(Fläche, durch Zusammenfügen unendl. vieler Stücke entstanden)

Zwei Sichtweisen auf das Unendliche

Aristoteles (384–322 v.u.Z.)

Das potentiell Unendliche

ist die in der Vorstellung vorhande Möglichkeit einer fortwährenden, nicht endenden Wiederholung einer Handlung oder eines Prozesses. (fortlaufendes Zählen, Verstreichen der Zeit, Teilen einer Strecke)

Da so eine unendliche Gesamtheit niemals „wirklich durchlaufen“ werden kann, ist das Unendliche in diesem Sinn nicht „wirklich vorhanden“. Im Gegensatz dazu:

Das Aktual Unendliche

bei dem bereits das Ergebnis eines unendlichen Prozesses vorliegt. (Fläche, durch Zusammenfügen unendl. vieler Stücke entstanden)

Zwei Sichtweisen auf das Unendliche

ARISTOTELES (384–322 v.u.Z.)

Das potentiell Unendliche

ist die in der Vorstellung vorhande Möglichkeit einer fortwährenden, nicht endenden Wiederholung einer Handlung oder eines Prozesses. (fortlaufendes Zählen, Verstreichen der Zeit, Teilen einer Strecke)

Da so eine unendliche Gesamtheit niemals „wirklich durchlaufen“ werden kann, ist das Unendliche in diesem Sinn nicht „wirklich vorhanden“. Im Gegensatz dazu:

Das Aktual Unendliche

bei dem bereits das Ergebnis eines unendlichen Prozesses vorliegt. (Fläche, durch Zusammenfügen unendl. vieler Stücke entstanden)

Zwei Sichtweisen auf das Unendliche

Aristoteles (384–322 v.u.Z.)

Das potentiell Unendliche

ist die in der Vorstellung vorhande Möglichkeit einer fortwährenden, nicht endenden Wiederholung einer Handlung oder eines Prozesses. (fortlaufendes Zählen, Verstreichen der Zeit, Teilen einer Strecke)

Da so eine unendliche Gesamtheit niemals „wirklich durchlaufen“ werden kann, ist das Unendliche in diesem Sinn nicht „wirklich vorhanden“. Im Gegensatz dazu:

Das Aktual Unendliche

bei dem bereits das Ergebnis eines unendlichen Prozesses vorliegt. (Fläche, durch Zusammenfügen unendl. vieler Stücke entstanden)

Potentiell Unendlich—Dynamsicher Aspekt

- ARISTOTELES lehnt die Idee vom aktual Unendlichen ab:
- Seit Aristoteles ist die Vorstellung der

  Möglichkeit des potenziell unendlichen Prozesses

  eine zentrale Vorstellung zum Unendlichkeitsbegriff.
- In moderner Sprache: Idee des sukzessiven Erzeugens einer Folge

$\leadsto$ **dynamischer Aspekt** von Folgen bzw. dem Unendlichen

Eine Folge bzw. das „Unendliche“, wird als im fortwährenden Aufbau begriffenes Objekt gesehen.

Potentiell Unendlich—Dynamsicher Aspekt

- ARISTOTELES lehnt die Idee vom aktual Unendlichen ab:

- Seit Aristoteles ist die Vorstellung der

  Möglichkeit des potenziell unendlichen Prozesses

  eine zentrale Vorstellung zum Unendlichkeitsbegriff.

- In moderner Sprache: Idee des sukzessiven Erzeugens einer Folge

$\rightsquigarrow$ **dynamischer Aspekt** von Folgen bzw. dem Unendlichen

Eine Folge bzw. das „Unendliche“, wird als im fortwährenden Aufbau begriffenes Objekt gesehen.

Potentiell Unendlich—Dynamsicher Aspekt

Definition. Eine Folge ist eine Auflistung von (abzählbar unendlich vielen) fortlaufend durchnummerierten Zahlen.

Beispiele:

- $\langle a_n \rangle = \langle 1, 3, 5, 7, 9, \dots \rangle$
- $\langle \frac{1}{n} \rangle = \langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \rangle$

eine zentrale Vorstellung zum Unendlichkeitsbegriff.

- In moderner Sprache: Idee des sukzessiven Erzeugens einer Folge

$\rightsquigarrow$ **dynamischer Aspekt** von Folgen bzw. dem Unendlichen

Eine Folge bzw. das „Unendliche“, wird als im fortwährenden Aufbau begriffenes Objekt gesehen.

Potentiell Unendlich—Dynamsicher Aspekt

- ARISTOTELES lehnt die Idee vom aktual Unendlichen ab:
- Seit Aristoteles ist die Vorstellung der

  Möglichkeit des potenziell unendlichen Prozesses

  eine zentrale Vorstellung zum Unendlichkeitsbegriff.
- In moderner Sprache: Idee des sukzessiven Erzeugens einer Folge

$\leadsto$ **dynamischer Aspekt** von Folgen bzw. dem Unendlichen

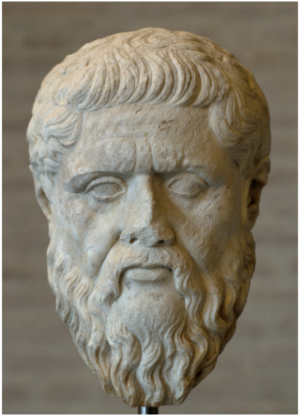
> *Eine Folge bzw. das „Unendliche“, wird als im fortwährenden Aufbau begriffenes Objekt gesehen.*

Aktual Unendlich—Statische Vorstellungen

- PLATON (428/7–348/7 v.u.Z.)
  lässt im Rahmen seiner Ideenlehr
- **Ideenlehre:** Ideen kommt eine ei ... der
  Existenz der sinnlich wahrnehmba
  übergeordnet ist. ⇝ **Platonische**
  - das Gerechte an sich, Platonis
- Vorstellung des aktual Unendlich

⇝ **statischen Aspekt** des Unendlic

Existenz des Ergebnisses ein ... akzep-
tiert; seine Eigenschaften kö



Lese/Hörtipp:
Rebecca Goldstein, Plato at the Google-
plex: Why Philosophy Won't Go Away
Vintage, 2015, ISBN 13: 9780307456724

Aktual Unendlich—Statische Vorstellungen

- PLATON (428/7–348/7 v.u.Z.) lässt im Rahmen seiner Ideenlenhre das aktual Unendliche zu.
- **Ideenlehre:** Ideen kommt eine eigenständige Existenz zu, die der Existenz der sinnlich wahrnehmbaren Objekte ontologisch übergeordnet ist. $\rightsquigarrow$ **Platonische Ideen**
  - das Gerechte an sich, Platonische Liebe, der Kreis an sich
- Vorstellung des aktual Unendlichen ermöglicht

$\rightsquigarrow$ **statischen Aspekt** des Unendlichen

Existenz des Ergebnisses eines unendlichen Prozesses wir akzeptiert; seine Eigenschaften können betrachtet werden.

Aktual Unendlich—Statische Vorstellungen

- PLATON (428/7–348/7 v.u.Z.) lässt im Rahmen seiner Ideenlenhre das aktual Unendliche zu.
- **Ideenlehre:** Ideen kommt eine eigenständige Existenz zu, die der Existenz der sinnlich wahrnehmbaren Objekte ontologisch übergeordnet ist. $\rightsquigarrow$ **Platonische Ideen**
    - das Gerechte an sich, Platonische Liebe, der Kreis an sich
- Vorstellung des aktual Unendlichen ermöglicht

$\rightsquigarrow$ **statischen Aspekt** des Unendlichen

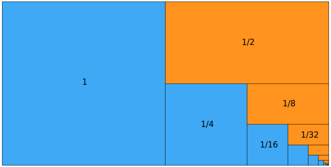
Existenz des Ergebnisses eines unendlichen Prozesses wir akzeptiert; seine Eigenschaften können betrachtet werden.

Inhalt

Historischer Schweinsgalopp

- Langes Nebeneinander von & Widerstreit zwischen
  1. dynamischem Aspekt des potentiell Unendlichen
  2. Akzeptanz des aktual Unendlichen & statischem Aspekt

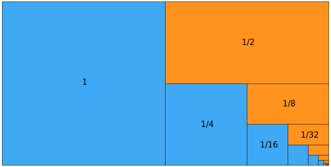
- **Beginn der Neuzeit**:
  - Entwicklung Grenzwertsbegriffs parallel mit Folgen und Reihen
  - konkrete Vorstellungen vom Aufzählen/Bewegungsvorstellungen
  - 16. und 17. Jh: (unendliche) Summation der geometrischen Reihe



Historischer Schweinsgalopp

- Langes Nebeneinander von & Widerstreit zwischen
  1. dynamischem Aspekt des potentiell Unendlichen
  2. Akzeptanz des aktual Unendlichen & statischem Aspekt

- **Beginn der Neuzeit**:
  - Entwicklung Grenzwertsbegriffs parallel mit Folgen und Reihen
  - konkrete Vorstellungen vom Aufzählen/Bewegungsvorstellungen
  - 16. und 17. Jh: (unendliche) Summation der geometrischen Reihe



Der Grenzwertbegriff

- Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) „Cours d'Analyse“

  Wenn die einer variablen Zahlengröße successive beigelegten Werthe sich einem bestimmten Werthe beständig nähern, so daß sie endlich von diesem Werthe so wenig verschieden sind, als man irgend will, so heißt die letztere die Grenze aller übrigen.

- Exaktifizierung, Karl Weierstraß (1815–1897)

  Wir haben früher gesehen, dass es stets möglich ist, aus der unendlichen Reihe eine endliche Anzahl Glieder so herauszunehmen, dass ihre Summe der ganzen Reihe beliebig nahe kommt, dass der Unterschied kleiner als eine beliebig kleine Größe gemacht werden kann.

- führt konsequent zur modernen ε-N-Def. des Folgen-Grenzwerts

  Eine Zahl a heißt Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$, falls für jede noch so kleine Fehlerschranke $\varepsilon > 0$ ein Folgenindex N angegeben werden kann, sodass alle späteren Folgenglieder ε-nahe bei a sind.

Der Grenzwertbegriff

- Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) „Cours d'Analyse"

  Wenn die einer variablen Zahlengröße successive beigelegten Werthe sich einem bestimmten Werthe beständig nähern, so daß sie endlich von diesem Werthe so wenig verschieden sind, als man irgend will, so heißt die letztere die Grenze aller übrigen.

- Exaktifizierung, Karl Weierstraß (1815–1897)

  Wir haben früher gesehen, dass es stets möglich ist, aus der unendlichen Reihe eine endliche Anzahl Glieder so herauszunehmen, dass ihre Summe der ganzen Reihe beliebig nahe kommt, dass der Unterschied kleiner als eine beliebig kleine Größe gemacht werden kann.

- führt konsequent zur modernen ε-N-Def. des Folgen-Grenzwerts

  Eine Zahl a heißt Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$, falls für jede noch so kleine Fehlerschranke $\varepsilon > 0$ ein Folgenindex N angegeben werden kann, sodass alle späteren Folgenglieder ε-nahe bei a sind.

Der Grenzwertbegriff

- Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) „Cours d'Analyse“

  Wenn die einer variablen Zahlengröße successive beigelegten Werthe sich einem bestimmten Werthe beständig nähern, so daß sie endlich von diesem Werthe so wenig verschieden sind, als man irgend will, so heißt die letztere die Grenze aller übrigen.

- Exaktifizierung, Karl Weierstraß (1815–1897)

  Wir haben früher gesehen, dass es stets möglich ist, aus der unendlichen Reihe eine endliche Anzahl Glieder so herauszunehmen, dass ihre Summe der ganzen Reihe beliebig nahe kommt, dass der Unterschied kleiner als eine beliebig kleine Größe gemacht werden kann.

- führt konsequent zur modernen ε-N-Def. des Folgen-Grenzwerts

  Eine Zahl a heißt Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$, falls für jede noch so kleine Fehlerschranke $\varepsilon > 0$ ein Folgenindex N angegeben werden kann, sodass alle späteren Folgenglieder ε-nahe bei a sind.

Der Grenzwertbegriff

Definition (Folgengrenzwert).
Eine Zahl a heißt Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad |a - a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

Wir schreiben dann $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ $(n \to \infty)$.

Beispiel: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \rangle = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \rangle = 0$$

- führt konsequent zur modernen ε-N-Def. des Folgen-Grenzwerts

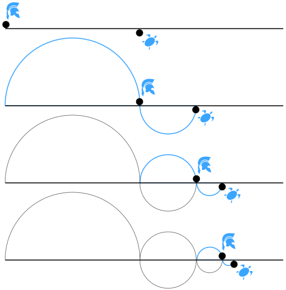
  Eine Zahl a heißt Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$, falls für jede noch so kleine Fehlerschranke $\varepsilon > 0$ ein Folgenindex N angegeben werden kann, sodass alle späteren Folgenglieder ε-nahe bei a sind.

Inhalt

Achill & Schildkröte: Mathematische Klärung

Strecke bis zum Einholen kann einfach mittels Summenformel für geometrischer Reihe berechnet werden.

$$
\begin{aligned}
& 100 + 50 + 25 + \dots \\
&= 100 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) \\
&= 100 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k \\
&= 100 \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2} \right)^k \\
&= 100 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 200
\end{aligned}
$$

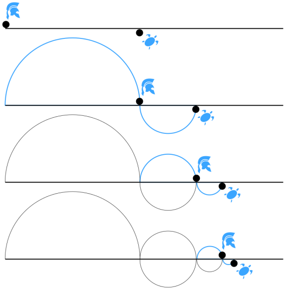


Die Strecke bis zum Einholen ist also endlich; Achill hot die Schildkröte ein!

Achill & Schildkröte: Mathematische Klärung

Strecke bis zum Einholen kann einfach mittels Summenformel für geometrischer Reihe berechnet werden.

$$\begin{aligned}
&100 + 50 + 25 + \dots \\
&\quad = 100\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) \\
&\quad = 100 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&\quad = 100 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&\quad = 100 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 200
\end{aligned}$$

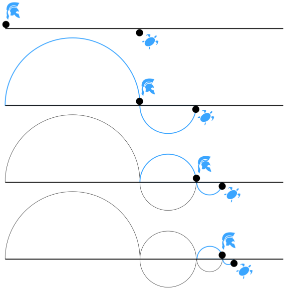


Die Strecke bis zum Einholen ist also endlich; Achill hot die Schildkröte ein!

Achill & Schildkröte: Mathematische Klärung

Strecke bis zum Einholen kann einfach mittels Summenformel für geometrischer Reihe berechnet werden.

$$\begin{aligned}
&100 + 50 + 25 + \dots \\
&\quad = 100 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) \\
&\quad = 100 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&\quad = 100 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&\quad = 100 \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \; = \; 200
\end{aligned}$$



Die Strecke bis zum Einholen ist also endlich; Achill hot die Schildkröte ein!

Berechnung des Grenzwerts explizit:

- Reihe definiert als Folge der Partialsummen

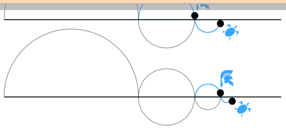
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} \qquad \text{(endl. geom. Reihe)}$$

- Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

$$= 100 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= 100 \, \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 200$$



Die Strecke bis zum Einholen ist also endlich; Achill hot die Schildkröte ein!

Pfeilparadoxon: Mathematische Klärung

Begriff der

Momentangeschwindigkeit als Grenzwert der Durchschnittgeschwindigkeiten

auf immer kleineren Zeitintervallen

Isaac Newton (1643–1727)
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Der Pfeil hat also zu jedem Zeitpunkt eine (Momentan-)Geschwindigkeit und bewegt sich doch!

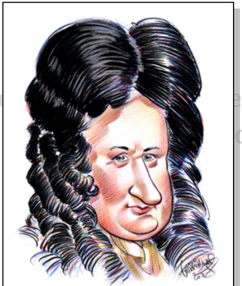
Pfeilparadoxon: Mathematische Klärung

Begriff der

Momentangeschwindigkeit als Grenzwert der Durchschnittgeschwindigkeiten

auf immer kleineren Zeitintervallen

Isaac Newton (1643–1727)
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)



Gottfried Leibniz (1646 - 1716)

Pfeilparadoxon: Mathematische Klärung

Begriff der

Momentangeschwindigkeit als Grenzwert der Durchschnittgeschwindigkeiten

- Die Wegfunktion $s : [0, T] \to \mathbb{R}$ beschreibt den Aufenthaltsort eines Gegenstandes zum jedem Zeitpunkt.
- Die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}_{[t_0,t]}$ im Intervall $[t_0, t]$ ist

$$\bar{v}_{[t_0,t]} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

also zurückgelegte Wegstrecke durch benötigte Zeit.

- Die Momentangeschwindigkeit v zum Zeitpunkt t_0 ist der Grenzwert der Durchschnittsgeschwindigkeiten für $t \to t_0$

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \bar{v}_{[t_0,t]} = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Pfeilparadoxon: Mathematische Klärung

Begriff der

Momentangeschwindigkeit als Grenzwert der Durchschnittgeschwindigkeiten

auf immer kleineren Zeitintervallen

Isaac Newton (1643–1727)
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Der Pfeil hat also zu jedem Zeitpunkt eine (Momentan-)Geschwindigkeit und bewegt sich doch!

Pfeilparadoxon: Mathematische Klärung

Begriff der

Momentangeschwindigkeit als Grenzwert der Durchschnittgeschwindigkeiten

auf immer kleineren Zeitintervallen

Definition (Funktionsgrenzwert).
Eine Zahl c heißt Grenzwert der Funktion f für t gegen t_0, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |f(t) - c| < \varepsilon \quad \forall\ |t - t_0| < \delta.$$

Wir schreiben dann $\lim_{t \to t_0} f(t') = c$ oder $f(t) \to c$ $(t \to t_0)$.

Der Pfeil hat also zu jedem Zeitpunkt eine (Momentan-)Geschwindigkeit und bewegt sich doch!

Pfeilparadoxon: Mathematische Klärung

Begriff der

Momentangeschwindigkeit als Grenzwert der Durchschnittgeschwindigkeiten

auf immer kleineren Zeitintervallen

Definition (Funktionsgrenzwert).
Eine Zahl c heißt Grenzwert der Funktion f für t gegen t_0, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |f(t) - c| < \varepsilon \quad \forall\, |t - t_0| < \delta.$$

Wir sch

Definition (Folgengrenzwert).
Eine Zahl a heißt Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad |a - a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

Wir schreiben dann $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ $(n \to \infty)$.

(N ... och!

Nochmal: Dynamischer vs. statischer Aspekt

- Rückblende: Folgen und ihre Darstellung

Nochmal: Dynamischer vs. statischer Aspekt

- Rückblende: Folgen und ihre Darstellung

Definition. Eine Folge ist eine Auflistung von fortlaufend durchnummerierten Zahlen.

Beispiele:

- $\langle a_n \rangle = \langle 1, 3, 5, 7, 9, \dots \rangle$
- $\langle \frac{1}{n} \rangle = \langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \rangle$

Nochmal: Dynamischer vs. statischer Aspekt

- Rückblende: Folgen und ihre Darstellung

Definition. Eine Folge ist eine Auflistung von fortlaufend durchnummerierten Zahlen.

Beispiele:

- $\langle a_n \rangle = \langle 1, 3, 5, 7, 9, \ldots \rangle$
- $\langle \frac{1}{n} \rangle = \langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \rangle$

Zwei Darstellungen für Folgen

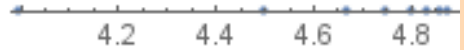
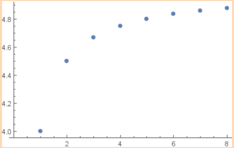


Bild der Folge am Zahlenstrahl

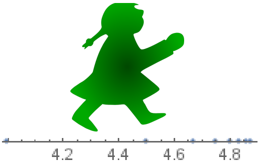


Graph der Folge

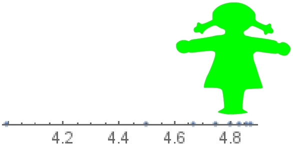
Nochmal: Dynamischer vs. statischer Aspekt

- Rückblende: Folgen und ihre Darstellung

- **Dynamische** Sichtweise auf Grenzwert
  1. **Mitgehen**
  2. schauen, ob Folge sich stabilisiert



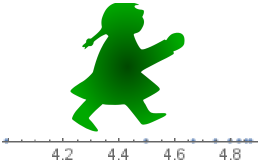
- **Statische** Sichtweise auf Grenzwert
  1. An möglichen Grenzwert **stellen**
  2. schauen ob Folge schließlich
     in jeder Umgebung bleibt



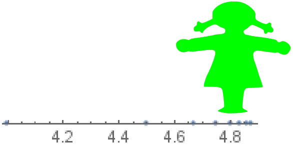
Nochmal: Dynamischer vs. statischer Aspekt

- Rückblende: Folgen und ihre Darstellung

- **Dynamische** Sichtweise auf Grenzwert
  1. **Mitgehen**
  2. schauen, ob Folge sich stabilisiert



- **Statische** Sichtweise auf Grenzwert
  1. An möglichen Grenzwert **stellen**
  2. schauen ob Folge schließlich in jeder Umgebung bleibt



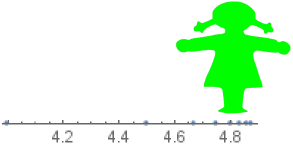
Nochmal: Dynamischer vs. statischer Aspekt

Definition (Folgengrenzwert).
Eine Zahl a heißt Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad |a - a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

- *Außerhalb* jeder ε-Umgebung des GW liegen nur *endlich* viele FG.
- *In* jeder ε-Umgebung des GW liegen *fast alle* FG.

- **Statische** Sichtweise auf Grenzwert
  1. An möglichen Grenzwert **stellen**
  2. schauen ob Folge schließlich in jeder Umgebung bleibt



Rückschau: Was haben wir getan?

- **Statische** Vorstellung & **Operieren im Endlichen** statt
  dynamische Vorstellung unendlicher Prozesse
- Grenzwert von Anfang an als „real existierendes“ Objekt
  definiert durch seine Eigenschaften.

$\rightsquigarrow$ **Verbannung/Abschaffung/Entzauberung des „Unendlichen“:**

Die Definition umgeht gerade alle Probleme beim Verstehen des „Unendlichen“ indem es eine Operationalisierung bereitstellt und den Grenzwertbegriff **handhabbar** *macht.*

$\rightsquigarrow$ **Eckstein & Stärke der modernen Analysis und Mathematik**

Rückschau: Was haben wir getan?

- **Statische** Vorstellung & **Operieren im Endlichen** statt
  dynamische Vorstellung unendlicher Prozesse
- Grenzwert von Anfang an als „real existierendes“ Objekt
  definiert durch seine Eigenschaften.

$\rightsquigarrow$ **Verbannung/Abschaffung/Entzauberung des „Unendlichen“:**

Die Definition umgeht gerade alle Probleme beim Verstehen des „Unendlichen“ indem es eine Operationalisierung bereitstellt und den Grenzwertbegriff **handhabbar** *macht.*

$\rightsquigarrow$ **Eckstein & Stärke der modernen Analysis und Mathematik**

Rückschau: Was haben wir getan?

- **Statische** Vorstellung & **Operieren im Endlichen** statt
  dynamische Vorstellung unendlicher Prozesse
- Grenzwert von Anfang an als „real existierendes" Objekt
  definiert durch seine Eigenschaften.

⇝ **Verbannung/Abschaffung/Entzauberung des „Unendlichen":**

Die Definition umgeht gerade alle Probleme beim Verstehen des „Unendlichen" indem es eine Operationalisierung bereitstellt und den Grenzwertbegriff **handhabbar** *macht.*

⇝ Eckstein & Stärke der modernen Analysis und Mathematik

Rückschau: Was haben wir getan?

- **Statische** Vorstellung & **Operieren im Endlichen** statt dynamische Vorstellung unendlicher Prozesse
- Grenzwert von Anfang an als „real existierendes“ Objekt definiert durch seine Eigenschaften.

$\rightsquigarrow$ **Verbannung/Abschaffung/Entzauberung des „Unendlichen“:**

Die Definition umgeht gerade alle Probleme beim Verstehen des „Unendlichen“ indem es eine Operationalisierung bereitstellt und den Grenzwertbegriff **handhabbar** *macht.*

$\rightsquigarrow$ **Eckstein & Stärke der modernen Analysis und Mathematik**

Die Entzauberung des Unendlichen

Nochmal das Fazit: Grenzwertdefinition

- entzaubert das Unendliche
- umgeht alle Probleme beim Verstehen des Unendlichen
- etwa die Frage nach dem Ergebnis eines unendlichen Prozesses
- stellt Operationalisierung bereit
- macht Grenzwertbegriff handhabbar

Die Tatsache, dass der Grenzwertbegriff formal klar und korrekt und ohne die Zuhilfenahme intuitiver Vorstellungen vom Unendlichen formuliert werden kann, ist Eckstein & Stärke der Analysis (und Mathematik).

Vorgehen **unverzichtbar, unumstritten, alternativlos**

ABER. . .

Die Entzauberung des Unendlichen

Nochmal das Fazit: Grenzwertdefinition

- entzaubert das Unendliche
- umgeht alle Probleme beim Verstehen des Unendlichen
- etwa die Frage nach dem Ergebnis eines unendlichen Prozesses
- stellt Operationalisierung bereit
- macht Grenzwertbegriff handhabbar

Die Tatsache, dass der Grenzwertbegriff formal klar und korrekt und ohne die Zuhilfenahme intuitiver Vorstellungen vom Unendlichen formuliert werden kann, ist Eckstein & Stärke der Analysis (und Mathematik).

Vorgehen **unverzichtbar, unumstritten, alternativlos**

ABER. . .

Die Entzauberung des Unendlichen

Nochmal das Fazit: Grenzwertdefinition

- entzaubert das Unendliche
- umgeht alle Probleme beim Verstehen des Unendlichen
- etwa die Frage nach dem Ergebnis eines unendlichen Prozesses
- stellt Operationalisierung bereit
- macht Grenzwertbegriff handhabbar

Die Tatsache, dass der Grenzwertbegriff formal klar und korrekt und ohne die Zuhilfenahme intuitiver Vorstellungen vom Unendlichen formuliert werden kann, ist Eckstein & Stärke der Analysis (und Mathematik).

Vorgehen **unverzichtbar, unumstritten, alternativlos**

ABER. . .

Die Entzauberung des Unendlichen

Nochmal das Fazit: Grenzwertdefinition

- entzaubert das Unendliche
- umgeht alle Probleme beim Verstehen des Unendlichen
- etwa die Frage nach dem Ergebnis eines unendlichen Prozesses
- stellt Operationalisierung bereit
- macht Grenzwertbegriff handhabbar

> *Die Tatsache, dass der Grenzwertbegriff formal klar und korrekt und ohne die Zuhilfenahme intuitiver Vorstellungen vom Unendlichen formuliert werden kann, ist Eckstein & Stärke der Analysis (und Mathematik).*

Vorgehen **unverzichtbar, unumstritten, alternativlos**

ABER...

ABER. . .

Vorgehen **unverzichtbar, unumstritten, alternativlos**

ABER

Herausforderung beim Lehren, Lernen & Verstehen des Grenzwertbegriffs

- Definition ist Endpunkt einer langen historischen Entwicklung
- blendet historisch-genetische Aspekte aus
- hochkomprimiert, enthält nur minimal notwendiges logische Skelett
- Für Lernprozesses entscheidende Frage:
  Wie kann hochformaler Begriff am besten verstanden werden?
- Zentrale Rolle (intuitiver) Vorstellungen . . . Grundvorstellungen

ABER. . .

Vorgehen **unverzichtbar, unumstritten, alternativlos**

ABER

Herausforderung beim Lehren, Lernen & Verstehen des Grenzwertbegriffs

- Definition ist Endpunkt einer langen historischen Entwicklung
- blendet historisch-genetische Aspekte aus
- hochkomprimiert, enthält nur minimal notwendiges logische Skelett
- Für Lernprozesses entscheidende Frage:
  Wie kann hochformaler Begriff am besten verstanden werden?
- Zentrale Rolle (intuitiver) Vorstellungen . . . Grundvorstellungen

ABER. . .

Vorgehen **unverzichtbar, unumstritten, alternativlos**

ABER

Herausforderung beim Lehren, Lernen & Verstehen des Grenzwertbegriffs

- Definition ist Endpunkt einer langen historischen Entwicklung
- blendet historisch-genetische Aspekte aus
- hochkomprimiert, enthält nur minimal notwendiges logische Skelett
- Für Lernprozesses entscheidende Frage:
  Wie kann hochformaler Begriff am besten verstanden werden?
- Zentrale Rolle (intuitiver) Vorstellungen . . . Grundvorstellungen

ABER. . .

Vorgehen **unverzichtbar, unumstritten, alternativlos**

ABER

Herausforderung beim Lehren, Lernen & Verstehen des Grenzwertbegriffs

- Definition ist Endpunkt einer langen historischen Entwicklung
- blendet historisch-genetische Aspekte aus
- hochkomprimiert, enthält nur minimal notwendiges logische Skelett
- Für Lernprozesses entscheidende Frage:
  Wie kann hochformaler Begriff am besten verstanden werden?
- Zentrale Rolle (intuitiver) Vorstellungen . . . Grundvorstellungen

Inhalt

Fachdidaktische Befunde

- Das Primat der Vorstellungen (Cornu, 2002)

- Nieder mit den dynamische Vorstellungen (Bender, 1991)

- Schüler*innenvorstellungen zu unendlichen Prozessen (Marx, 2013)
  1. Zusammenhang unendlicher Prozesse mit konkreten Erfahrungen
  2. Was ist das Ergebnis eines unendlichen Prozesses?

Fachdidaktische Befunde

- Das Primat der Vorstellungen (Cornu, 2002)

For most mathematical concepts, teaching does not begin on virgin territory. In the case of limits, before any teaching on this subject the student already has a certain number of ideas, intuitions, images, knowledge, which come from daily experience, such as the colloquial meaning of the terms being used.

When a student participates in a mathematics lesson, these ideas do not disappear – contrary to what may be imagined by most teachers. These spontaneous ideas mix with newly acquired knowledge, modified and adapted to form the students personal conceptions.

Fachdidaktische Befunde

- Das Primat der Vorstellungen (Cornu, 2002)
- Nieder mit den dynamische Vorstellungen (Bender, 1991)
- Schüler*innenvorstellungen zu unendlichen Prozessen (Marx, 2013)
  1. Zusammenhang unendlicher Prozesse mit konkreten Erfahrungen
  2. Was ist das Ergebnis eines unendlichen Prozesses?

Fachdidaktische Befunde

- Das Primat der Vorstellungen (Cornu, 2002)

- Nieder mit den dynamische Vorstellungen (Bender, 1991)

  - wesentliche Ursache von Fehlvorstellungen
  - Scheitern beim Bemühen, dynamische Vorstellungen in den entscheidenden Phasen der Begriffsbildung auszuschalten und sie dann wieder zuzulassen
  - Kritik aus fachlicher Perspektive: Permutationen konvergenter Folgen haben selben Grenzwert

Fachdidaktische Befunde

- Das Primat der Vorstellungen (Cornu, 2002)
- Nieder mit den dynamische Vorstellungen (Bender, 1991)
- Schüler*innenvorstellungen zu unendlichen Prozessen (Marx, 2013)
  1. Zusammenhang unendlicher Prozesse mit konkreten Erfahrungen
  2. Was ist das Ergebnis eines unendlichen Prozesses?

Fachdidaktische Befunde

Typologie

- Es gibt kein Ergebnis unendlicher Prozesse
- Ein unendlicher Prozess ist lang, aber letztlich endlich
- Die Unendlichkeit legt einen Schleier über den Prozessausgang
- Das Ergebnis eines unendlichen Prozesses passt sich veränderlich dem Prozessverlauf an
- Übertragung: Was im Endlichen gilt, das gilt auch im Unendlichen

- Schüler*innenvorstellungen zu unendlichen Prozessen (Marx, 2013)
  1. Zusammenhang unendlicher Prozesse mit konkreten Erfahrungen
  2. Was ist das Ergebnis eines unendlichen Prozesses?

Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff

Eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt.

Das Zustreben/Annähern der Folgenglieder an einen festen Wert

Das Grundvorstellungskonzept ist ein didaktisches Modell, das mathematisches Verständnis an inhaltlichen Vorstellungen festmacht.

[vom Hofe, 1995]

Zu jeder noch so kleinen Umgebung um den GW liegen ab einem bestimmten Index alle weiteren FG in dieser Umgebung.

Objektvorstellung (OV):

GW als mathematische Objekte, die durch Folgen (z.B. Zahlenfolge, Folge geometrischer Objekte) konstruiert/definiert werden.

nach [Greefrath, et al., Didaktik der Analyis, Springer 2016.]

Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff

Eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt.

Das Zustreben/Annähern der Folgenglieder an einen festen Wert

Das Grundvorstellungskonzept ist ein didaktisches Modell, das mathematisches Verständnis an inhaltlichen Vorstellungen festmacht.

[vom Hofe, 1995]

Zu jeder noch so kleinen Umgebung um den GW liegen ab einem bestimmten Index alle weiteren FG in dieser Umgebung.

Objektvorstellung (OV):

GW als mathematische Objekte, die durch Folgen (z.B. Zahlenfolge, Folge geometrischer Objekte) konstruiert/definiert werden.

nach [Greefrath, et al., Didaktik der Analyis, Springer 2016.]

Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff

Annäherungsvorstellung (AV):

Das Zustreben/Annähern der Folgenglieder an einen festen Wert als intuitive Vorstellung vom Grenzwert.

Umgebungsvorstellung (UV):

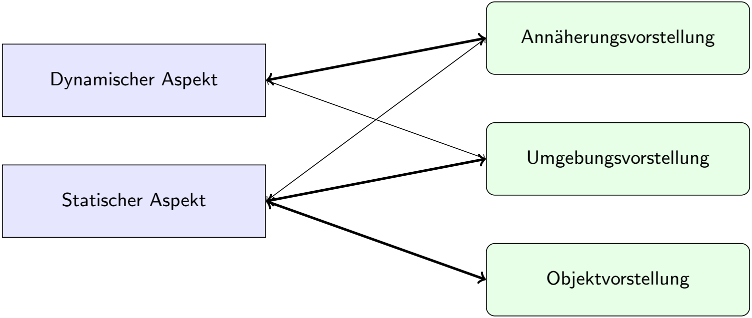
Zu jeder noch so kleinen Umgebung um den GW liegen ab einem bestimmten Index alle weiteren FG in dieser Umgebung.

Objektvorstellung (OV):

GW als mathematische Objekte, die durch Folgen (z.B. Zahlenfolge, Folge geometrischer Objekte) konstruiert/definiert werden.

nach [Greefrath, et al., Didaktik der Analyis, Springer 2016.]

Aspekte und Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff



nach [Greefrath, et al., Didaktik der Analyis, Springer 2016.]

Das Projekt Bella

BELLA (=Beliefs zum Lernen und Lehren von Analysis)

Hochschuldidaktisches Projekt zur empirischen Erforschung von

Beliefs und Vorstellungen

von B.Ed.-Studierenden im UF Mathematik zu

Kernbegriffen der Analysis.

- Wer: Didaktiker*innen, Mathematiker*innen Verbund Nord-Ost
  C. Ableitinger, A. Anger, S. Götz, R. Steinbauer, E. Süss-Stepancik
- Warum: Effizientes Erreichen des zentralen Ziels des LA-Ausbildung

Aufbau von belastbaren Grundvorstellungen zu zentralen Begriffen der (Schul-)Mathematik.

Das Projekt Bella

BELLA (=Beliefs zum Lernen und Lehren von Analysis)

Hochschuldidaktisches Projekt zur empirischen Erforschung von

Beliefs und Vorstellungen

von B.Ed.-Studierenden im UF Mathematik zu

Kernbegriffen der Analysis.

- Wer: Didaktiker*innen, Mathematiker*innen Verbund Nord-Ost
  C. Ableitinger, A. Anger, S. Götz, R. Steinbauer, E. Süss-Stepancik
- Warum: Effizientes Erreichen des zentralen Ziels des LA-Ausbildung

Aufbau von belastbaren Grundvorstellungen zu zentralen Begriffen der (Schul-)Mathematik.

Bella: Vorstellungen zum GW

Forschungsfragen

1. Welche (Grund-)Vorstellungen werden im Laufe der (fachlichen) Ausbildung aufgebaut?
2. In wie weit können diese durch den schulmathematischen Teil der Ausbildung verändert bzw. verbessert werden?

- Umfrage zu 2 Zeitpunkten
  1. Nach der Fach-Analysis = vor Schulmathematik
  2. nach Schulmathematik
- Schreibimpuls: Unter dem Grenzwert einer Folge stelle ich mir vor. . .
- Abgleich mit (normativen) Grundvorstellungen
- Kategoriensystem zur Ausprägungsqualität

Bella: Vorstellungen zum GW

Forschungsfragen

1. Welche (Grund-)Vorstellungen werden im Laufe der (fachlichen) Ausbildung aufgebaut?
2. In wie weit können diese durch den schulmathematischen Teil der Ausbildung verändert bzw. verbessert werden?

- Umfrage zu 2 Zeitpunkten
  1. Nach der Fach-Analysis = vor Schulmathematik
  2. nach Schulmathematik
- Schreibimpuls: Unter dem Grenzwert einer Folge stelle ich mir vor. . .
- Abgleich mit (normativen) Grundvorstellungen
- Kategoriensystem zur Ausprägungsqualität

Bella: Vorstellungen zum GW

Forschungsfragen

1. Welche (Grund-)Vorstellungen werden im Laufe der (fachlichen) Ausbildung aufgebaut?
2. In wie weit können diese durch den schulmathematischen Teil der Ausbildung verändert bzw. verbessert werden?

- Umfrage zu 2 Zeitpunkten
  1. Nach der Fach-Analysis = vor Schulmathematik
  2. nach Schulmathematik
- Schreibimpuls: Unter dem Grenzwert einer Folge stelle ich mir vor. . .
- Abgleich mit (normativen) Grundvorstellungen
- Kategoriensystem zur Ausprägungsqualität

Bella: Vorstellungen zum GW

Forschungsfragen

1. Welche (Grund-)Vorstellungen werden im Laufe der (fachlichen) Ausbildung aufgebaut?
2. In wie weit können diese durch den schulmathematischen Teil der Ausbildung verändert bzw. verbessert werden?

- Umfrage zu 2 Zeitpunkten
  1. Nach der Fach-Analysis = vor Schulmathematik
  2. nach Schulmathematik
- Schreibimpuls: Unter dem Grenzwert einer Folge stelle ich mir vor. . .

1. Unter dem *Grenzwert einer Folge* stelle ich mir vor . . .

das Ende einer Folge

Bella: Vorstellungen zum GW

Forschungsfragen

1. Welche (Grund-)Vorstellungen werden im Laufe der (fachlichen) Ausbildung aufgebaut?
2. In wie weit können diese durch den schulmathematischen Teil der Ausbildung verändert bzw. verbessert werden?

- Umfrage zu 2 Zeitpunkten
    1. Nach der Fach-Analysis = vor Schulmathematik
    2. nach Schulmathematik
- Schreibimpuls: Unter dem Grenzwert einer Folge stelle ich mir vor...
- Abgleich mit (normativen) Grundvorstellungen
- Kategoriensystem zur Ausprägungsqualität

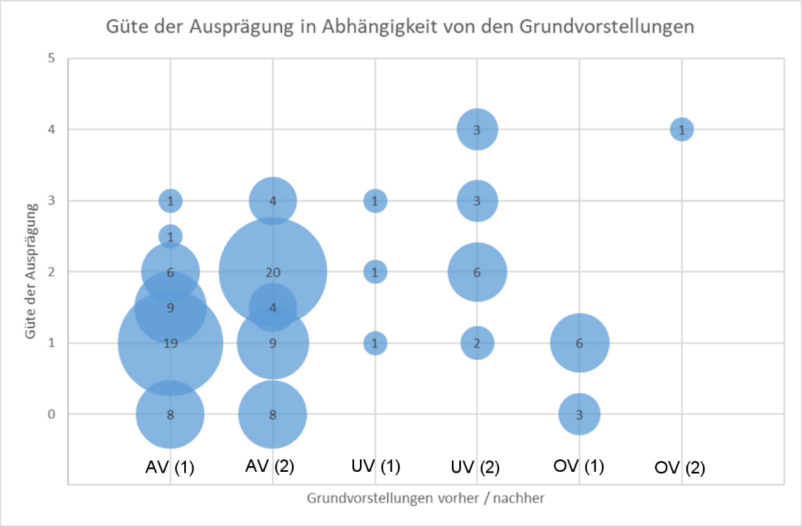
Bella: Vorstellungen zum GW

Forschungsfragen

	Qualität der Ausprägung	Beispielformulierungen (AV)
U	Unspezifisch; kein Zugriff auf Vorstellung möglich	Wert, der angestrebt wird
1	GV naiv ausgedrückt	nähert sich im Unendlichen an
2	GV schwach ausgeprägt/ungenau formuliert	kommt immer näher
3	GV vorhanden, nicht korrekt formuliert	kommt unendlich nahe
4	GV klar ausgeprägt und adäquat formuliert	kommt schließlich beliebig nahe
F	Fehlvorstellung erkennbar	letztes Folgenglied

- Abgleich mit (normativen) Grundvorstellungen
- Kategoriensystem zur Ausprägungsqualität

Gefundene GV & Qualität



Gefundene GV

- Haupstächlich AV (79%/75%) obwohl Standardefinition UV
- AV schwerer zu formulieren (1.34) als UV (3.27)
- ca. 1/3 hat Fehlvorstellungen ähnlich zu Schüler*innen

Gefundene GV

- Haupstächlich AV (79%/75%) obwohl Standardefinition UV
- AV schwerer zu formulieren (1.34) als UV (3.27)
- ca. 1/3 hat Fehlvorstellungen ähnlich zu Schüler*innen

Gefundene GV

- Haupstächlich AV (79%/75%) obwohl Standardefinition UV
- AV schwerer zu formulieren (1.34) als UV (3.27)
- ca. 1/3 hat Fehlvorstellungen ähnlich zu Schüler*innen

Gefundene GV

- Haupstächlich AV (79%/75%) obwohl Standardefinition UV
- AV schwerer zu formulieren (1.34) als UV (3.27)
- ca. 1/3 hat Fehlvorstellungen ähnlich zu Schüler*innen

	GW nicht erreicht	GW als Schranke	GW letztes FG
Prätest	13	13	1
Posttest	8	10	2

Auffällige Änderungen

- Steigerungen in der Qualität der AV
- Von niedriger AV zu hoher UV

Auffällige Änderungen

- Steigerungen in der Qualität der AV

1. Unter dem *Grenzwert einer Folge* stelle ich mir vor . . .

Der Wert dem sich die Folge an nähert aber den sie nie wirklich ereicht

Prätest: AV 1.5

1. Unter dem *Grenzwert einer Folge* stelle ich mir vor . . .

Wert dem sich die Folgeglieder beliebig nähern.
Di Folgeglieder liegen in ε-Umgebung v. diesem Wert

Posttest: AV 3 (und UV 2)

Auffällige Änderungen

- Steigerungen in der Qualität der AV

- Von niedriger AV zu hoher UV

Auffällige Änderungen

- Steigerungen in der Qualität der AV

- Von niedriger AV zu hoher UV

1. Unter dem *Grenzwert einer Folge* stelle ich mir vor ...

Zahl, die sich die Folgenglieder annähern

Prätest: AV 1

1. Unter dem *Grenzwert einer Folge* stelle ich mir vor ...

GW ist Zahl (Chorine)
in dessen beliebig kleiner Umgebung fast alle Folgenglieder liegen

Posttest: UV 4

Fazit für den MU

Zwei entscheidende Aspekte

(1) dynamischer Aspekt
(2) statischer Aspekt

Die beiden Aspekte sind, obwohl

- in ihrem Ansatz gegensätzlich
- eng miteinander verknüpft

Essentiell beim Lehren & Lernen: **Hin- & Herschalten!**

Vorstellung über das Unendliche/den Grenzwertbegriff

(1) aufbauen mithilfe des dynamischen Aspekts

(2) verstehbar machen durch Wechsel zum statischen Aspekt

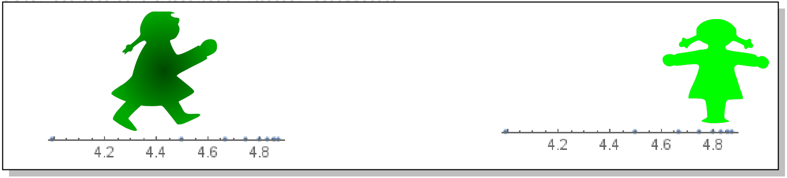
Verstehen des Grenzwertbegriffs durch Entzauberung des Unendlichen

Fazit für den MU

Zwei entscheidende Aspekte

(1) dynamischer Aspekt (2) statischer Aspekt

Die beiden Aspekte sind, obwohl



(1) aufbauen mithilfe des dynamischen Aspekts

(2) verstehbar machen durch Wechsel zum statischen Aspekt

Verstehen des Grenzwertbegriffs durch Entzauberung des Unendlichen

Fazit für den MU

Zwei entscheidende Aspekte

(1) dynamischer Aspekt

(2) statischer Aspekt

Die beiden Aspekte sind, obwohl

- in ihrem Ansatz gegensätzlich
- eng miteinander verknüpft

Essentiell beim Lehren & Lernen: **Hin- & Herschalten!**

Vorstellung über das Unendliche/den Grenzwertbegriff

(1) aufbauen mithilfe des dynamischen Aspekts

(2) verstehbar machen durch Wechsel zum statischen Aspekt

Verstehen des Grenzwertbegriffs durch Entzauberung des Unendlichen

Fazit für den MU

Zwei entscheidende Aspekte

(1) dynamischer Aspekt

(2) statischer Aspekt

Die beiden Aspekte sind, obwohl

- in ihrem Ansatz gegensätzlich
- eng miteinander verknüpft

Essentiell beim Lehren & Lernen: **Hin- & Herschalten!**

Vorstellung über das Unendliche/den Grenzwertbegriff

(1) aufbauen mithilfe des dynamischen Aspekts

(2) verstehbar machen durch Wechsel zum statischen Aspekt

Verstehen des Grenzwertbegriffs
durch Entzauberung des Unendlichen

Fazit für den MU

Zwei entscheidende Aspekte

(1) dynamischer Aspekt

(2) statischer Aspekt

Die beiden Aspekte sind, obwohl

- in ihrem Ansatz gegensätzlich
- eng miteinander verknüpft

Essentiell beim Lehren & Lernen: **Hin- & Herschalten!**

Vorstellung über das Unendliche/den Grenzwertbegriff

(1) aufbauen mithilfe des dynamischen Aspekts

(2) verstehbar machen durch Wechsel zum statischen Aspekt

Verstehen des Grenzwertbegriffs
durch Entzauberung des Unendlichen

Fazit für den MU

Zwei entscheidende Aspekte

(1) dynamischer Aspekt

(2) statischer Aspekt

Die beiden Aspekte sind, obwohl

- in ihrem Ansatz gegensätzlich
- eng miteinander verknüpft

Essentiell beim Lehren & Lernen: **Hin- & Herschalten!**

Vorstellung über das Unendliche/den Grenzwertbegriff

(1) aufbauen mithilfe des dynamischen Aspekts

(2) verstehbar machen durch Wechsel zum statischen Aspekt

Verstehen des Grenzwertbegriffs
durch Entzauberung des Unendlichen

Das Ende

Verstehen des Grenzwertbegriffs
durch Entzauberung des Unendlichen

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Kontakt:
Roland Steinbauer
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
mailto:roland.steinbauer@univie.ac.at
http://www.mat.univie.ac.at/~stein

Literatur

Ableitinger, C., Steinbauer, R. (2020). Vorstellungen von Lehramtsstudierenden zum Grenzwertbegriff. In Beiträge zum Mathematikunterricht 2020. Münster: WTM-Verlag.

Ableitinger, C., Götz, S., Steinbauer, R. (2021). Grundvorstellungen von Lehramtsstudierenden zum Grenzwertbegriff. Preprint.

BBC Radio 4 Philosophy Podcast (2016). Zeno's Paradoxes.
https://www.bbc.co.uk/programmes/b07vs3v1

Bender, P. (1991). Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen - ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht - erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen. In H. Postel, A. Kirsch und W. Blum (Hrsg.), Mathematik lehren und lernen, Festschrift für Heinz Griesel. Hannover: Schroedel Schulbuchverlag, S. 48–60.

Cornu, B. (2002). Limits. In D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking, Vol. 11, 153-166.
http://dx.doi.org/10.1007/0-306-47203-1_10

Danckwerts, R., Vogel, D. (2006). Analysis verständlich unterrichten. München: Elsevier.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., Weigand, H.-G. (2016). Didaktik der Analysis: Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe. Berlin: Springer-Spektrum.

Hilbert, D. (1926). Über das Unendliche. Math. Annal. 95, 161-190.

Marx, A. (2013). Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen. Journal für Mathematik-Didaktik 34, S. 73–97. https://doi.org/10.1007/s13138-012-0047-5

Russel, B. (1950). Philosophie des Abendlandes. Zürich: Europa Verlag AG.

Steinbauer, R., Süss-Stepancik, E. (2019). Schulmathematik Analysis. Universität Wien, Vorlesungsmanuskript, Rohversion
https://www.mat.univie.ac.at/~stein/teaching/WS1819/smana-gesamt-2019-02-14.pdf

vom Hofe, R. (1995). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg: Spektrum.

Bildnachweis

David Hilbert, Von Autor unbekannt - Possibly Reid, Constance (1970) Hilbert, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg Imprint Springer, S. 230 ISBN: 978-3-662-27132-2., Gemeinfrei, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=36302

Porta Marina Sud, Von Geofix - Eigenes Werk, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=15406421

Zenon von Elea, Public Domain, http://www.zeno.org/Philosophie/I/vs06_000

Heraklit, By engraving by J. W. Cook - Wellcome gallery, PD-US-expired, https://en.wikipedia.org/w/index.php?curid=62060491

Achill und die Schildkröte, Von Martin Grandjean — Eigenes Werk, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=39999636

Pfeilparadoxon, By Martin Grandjean - Own work, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=39999639

Aristoteles, Von Nach Lysipp - Jastrow (2006), Gemeinfrei, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1359807

Platon, Von Silanion - User:Bibi Saint-Pol, own work, 2007-02-08, Gemeinfrei, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1775137

Newton, http://madeupinbritain.uk/britimages/Apple_falling.gif

Leibniz, https://www.adivinario.com/philo_26_Leibniz.php

Ampelmädchen, https://schulzentrum-berne.de/index.php/akteure/schuelerlotsen-3-17