Persönlichkeitsbildung im Mathematikunterricht

Franz Pauer

Institut für Fachdidaktik

Universität Innsbruck

9. April 2021

Lehrplan AHS und Mittelschule

- Aus dem ersten Teil (Allgemeines Bildungsziel):
  Der Unterricht hat aktiv zu einer den Menschenrechten verpflichteten Demokratie beizutragen.

Lehrplan AHS und Mittelschule

- Aus dem ersten Teil (Allgemeines Bildungsziel):
  Der Unterricht hat aktiv zu einer den Menschenrechten verpflichteten Demokratie beizutragen.
- Wie kann der Mathematikunterricht zu diesem Bildungsziel beitragen?

Lehrplan AHS und Mittelschule

- Aus dem ersten Teil (Allgemeines Bildungsziel):
  Der Unterricht hat aktiv zu einer den Menschenrechten verpflichteten Demokratie beizutragen.
- Wie kann der Mathematikunterricht zu diesem Bildungsziel beitragen?
- Antworten von Lehramtsstudierenden auf diese Frage:
  Interpretation von Wahlergebnissen durch Prozentrechnung, wertschätzender Umgang mit Schülerinnen und Schülern, Statistik für Wahlprognosen, ...

Lehrplan AHS und Mittelschule

- Aus dem ersten Teil (Allgemeines Bildungsziel):
  Der Unterricht hat aktiv zu einer den Menschenrechten verpflichteten Demokratie beizutragen.
- Wie kann der Mathematikunterricht zu diesem Bildungsziel beitragen?
- Antworten von Lehramtsstudierenden auf diese Frage: Interpretation von Wahlergebnissen durch Prozentrechnung, wertschätzender Umgang mit Schülerinnen und Schülern, Statistik für Wahlprognosen, ...
- Aber: Sind das ausreichende Beiträge des Mathematikunterrichts zu „einer den Menschenrechten verpflichteten Demokratie“?

Lehrpläne AHS, Mittelschule und HAK

- Lehrplan AHS und Mittelschule, allgemeines Bildungsziel:
  Urteils- und Kritikfähigkeit sowie Entscheidungs- und Handlungskompetenzen sind zu fördern, sie sind für die Stabilität pluralistischer und demokratischer Gesellschaften entscheidend.

Lehrpläne AHS, Mittelschule und HAK

- Lehrplan AHS und Mittelschule, allgemeines Bildungsziel:
  Urteils- und Kritikfähigkeit sowie Entscheidungs- und Handlungskompetenzen sind zu fördern, sie sind für die Stabilität pluralistischer und demokratischer Gesellschaften entscheidend.
- Lehrplan AHS und Mittelschule, Bildungs- und Lehraufgaben Mathematik:
  Die Schülerinnen und Schüler sollen . . . produktives geistiges Arbeiten, Argumentieren und exaktes Arbeiten, kritisches Denken, Darstellen und Interpretieren als mathematische Grundtätigkeiten durchführen.

Lehrpläne AHS, Mittelschule und HAK

- Lehrplan AHS und Mittelschule, allgemeines Bildungsziel:
  Urteils- und Kritikfähigkeit sowie Entscheidungs- und Handlungskompetenzen sind zu fördern, sie sind für die Stabilität pluralistischer und demokratischer Gesellschaften entscheidend.

- Lehrplan AHS und Mittelschule, Bildungs- und Lehraufgaben Mathematik:
  Die Schülerinnen und Schüler sollen ... produktives geistiges Arbeiten, Argumentieren und exaktes Arbeiten, kritisches Denken, Darstellen und Interpretieren als mathematische Grundtätigkeiten durchführen.

- Lehrplan HAK, allgemeines Bildungsziel:
  ... die Kompetenz, eine aktive und verantwortungsbewusste Rolle als Unternehmer/in, als Arbeitnehmer/in oder als Konsument/in einzunehmen, ... aufgabenorientiert selbstständig und im Team zu arbeiten,

Bildungsziele einst und jetzt

- Einführung der Schulpflicht in Österreich (18. Jhd.) für den Bedarf eines autoritären Systems

Bildungsziele einst und jetzt

- Einführung der Schulpflicht in Österreich (18. Jhd.) für den Bedarf eines autoritären Systems
- Die Autorinnen und Autoren der heutigen Lehrpläne wären im 18. oder 19. Jahrhundert wahrscheinlich im Gefängnis gelandet.

Bildungsziele einst und jetzt

- Einführung der Schulpflicht in Österreich (18. Jhd.) für den Bedarf eines autoritären Systems
- Die Autorinnen und Autoren der heutigen Lehrpläne wären im 18. oder 19. Jahrhundert wahrscheinlich im Gefängnis gelandet.
- Heute (21. Jhd.): Schule für eine demokratische Gesellschaft

Bildungsziele einst und jetzt

- Einführung der Schulpflicht in Österreich (18. Jhd.) für den Bedarf eines autoritären Systems
- Die Autorinnen und Autoren der heutigen Lehrpläne wären im 18. oder 19. Jahrhundert wahrscheinlich im Gefängnis gelandet.
- Heute (21. Jhd.): Schule für eine demokratische Gesellschaft
- Daher muss sich auch der Mathematikunterricht im 21. Jhd. deutlich von dem im 18./19. Jhd. unterscheiden.

Inhalt

- **Mündige Bürger/innen statt Untertanen**
  Beispiele: quadratische Gleichungen, Systeme linearer Gleichungen

Inhalt

- **Mündige Bürger/innen statt Untertanen**
  Beispiele: quadratische Gleichungen, Systeme linearer Gleichungen
- **Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln („vorurteilsfrei denken")**
  Beispiel: Schlussrechnungen, Zahlenfolgen fortsetzen

Inhalt

- **Mündige Bürger/innen statt Untertanen**
  Beispiele: quadratische Gleichungen, Systeme linearer Gleichungen
- **Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln („vorurteilsfrei denken“)**
  Beispiel: Schlussrechnungen, Zahlenfolgen fortsetzen
- **Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen**
  Beispiel: Rechnen mit Wurzeln, Komplexe Zahlen

Mündige Bürger/innen oder Untertanen?

Beispiel: Quadratische Gleichungen

- Finde alle reellen Zahlen x so, dass $x^2 + 6x - 1 = 0$ ist!

Mündige Bürger/innen oder Untertanen?

Beispiel: Quadratische Gleichungen

- Finde alle reellen Zahlen x so, dass $x^2 + 6x - 1 = 0$ ist!
- Wir nehmen an, dass schon bekannt ist, wie man für $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Aufgabe „Finde alle reellen Zahlen x so, dass $x^2 = a$ ist“ löst.

Mündige Bürger/innen oder Untertanen?

Beispiel: Quadratische Gleichungen

- Finde alle reellen Zahlen x so, dass $x^2 + 6x - 1 = 0$ ist!
- Wir nehmen an, dass schon bekannt ist, wie man für $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Aufgabe „Finde alle reellen Zahlen x so, dass $x^2 = a$ ist“ löst.
- Lösung durch äquivalentes Umformen (dh. man ersetzt die Aufgabe durch eine andere, einfachere Aufgabe, welche dieselbe Lösungsmenge hat):

$$x^2 + 6x - 1 = (x+3)^2 - 9 - 1 = (x+3)^2 - 10,$$

Mündige Bürger/innen oder Untertanen?

Beispiel: Quadratische Gleichungen

- Finde alle reellen Zahlen x so, dass $x^2 + 6x - 1 = 0$ ist!
- Wir nehmen an, dass schon bekannt ist, wie man für $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Aufgabe „Finde alle reellen Zahlen x so, dass $x^2 = a$ ist“ löst.
- Lösung durch äquivalentes Umformen (dh. man ersetzt die Aufgabe durch eine andere, einfachere Aufgabe, welche dieselbe Lösungsmenge hat):

$$x^2 + 6x - 1 = (x+3)^2 - 9 - 1 = (x+3)^2 - 10,$$

- also

$$(x+3)^2 - 10 = 0$$
$$(x+3)^2 = 10$$
$$x + 3 = \pm\sqrt{10}$$

Mündige Bürger/innen oder Untertanen?

Beispiel: Quadratische Gleichungen

- Finde alle reellen Zahlen x so, dass $x^2 + 6x - 1 = 0$ ist!
- Wir nehmen an, dass schon bekannt ist, wie man für $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Aufgabe „Finde alle reellen Zahlen x so, dass $x^2 = a$ ist“ löst.
- Lösung durch äquivalentes Umformen (dh. man ersetzt die Aufgabe durch eine andere, einfachere Aufgabe, welche dieselbe Lösungsmenge hat):

$$x^2 + 6x - 1 = (x+3)^2 - 9 - 1 = (x+3)^2 - 10,$$

- also

$$\begin{aligned} (x+3)^2 - 10 &= 0 \\ (x+3)^2 &= 10 \\ x + 3 &= \pm\sqrt{10} \end{aligned}$$

- und schließlich

$$x = -3 + \sqrt{10} \text{ oder } x = -3 - \sqrt{10}$$

Mündige Bürger/innen statt Untertanen

- ODER (?)

Mündige Bürger/innen statt Untertanen

- ODER (?)
- Merke Dir die Lösungsformel $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$!

Mündige Bürger/innen statt Untertanen

- ODER (?)
- Merke Dir die Lösungsformel $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$!
- Setze in der Lösungsformel 6 für p und -1 für q ein!

Mündige Bürger/innen statt Untertanen

- ODER (?)
- Merke Dir die Lösungsformel $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$!
- Setze in der Lösungsformel 6 für p und -1 für q ein!
- $x_{1,2} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\frac{6^2}{4} - (-1)} = -3 \pm \sqrt{10}$

Mündige Bürger/innen statt Untertanen

- ODER (?)
- Merke Dir die Lösungsformel $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$!
- Setze in der Lösungsformel 6 für p und -1 für q ein!
- $x_{1,2} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\frac{6^2}{4} - (-1)} = -3 \pm \sqrt{10}$
- „auf Zuruf Befehle ausführen“ (18. und 19. Jhd.!)

Mündige Bürger/innen statt Untertanen

Beispiel: Systeme linearer Gleichungen

- Ein System linearer Gleichungen (hier mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten) ist die folgende Aufgabe: Gegeben sind Zahlen a,b,c,d,e,f und gesucht sind alle Zahlenpaare (x,y) so, dass

$$I.\ ax + by = c$$

$$II.\ dx + ey = f$$

ist.

Mündige Bürger/innen statt Untertanen

Beispiel: Systeme linearer Gleichungen

- Ein System linearer Gleichungen (hier mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten) ist die folgende Aufgabe: Gegeben sind Zahlen a,b,c,d,e,f und gesucht sind alle Zahlenpaare (x,y) so, dass

  $$I.\ ax + by = c$$

  $$II.\ dx + ey = f$$

  ist.

- Lösungsstrategie: äquivalentes Umformen, dh. zu einem anderen System linearer Gleichungen (mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten) übergehen, das dieselbe Lösungsmenge hat.

Mündige Bürger/innen statt Untertanen

Beispiel: Systeme linearer Gleichungen

Welche Umformungen sind jedenfalls äquivalent ?

- auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens einer Gleichung mit derselben Zahl ungleich 0 multiplizieren

Mündige Bürger/innen statt Untertanen

Beispiel: Systeme linearer Gleichungen

Welche Umformungen sind jedenfalls äquivalent ?

- auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens einer Gleichung mit derselben Zahl ungleich 0 multiplizieren
- die Reihenfolge der zwei Gleichungen vertauschen.

Mündige Bürger/innen statt Untertanen

Beispiel: Systeme linearer Gleichungen

Welche Umformungen sind jedenfalls äquivalent ?

- auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens einer Gleichung mit derselben Zahl ungleich 0 multiplizieren
- die Reihenfolge der zwei Gleichungen vertauschen.
- eine der zwei Gleichungen durch deren Differenz ersetzen

Mündige Bürger/innen statt Untertanen

Beispiel: Systeme linearer Gleichungen

- Diese drei Umformungen führt man zielgerichtet solange durch, bis man bei einem Gleichungssystem angelangt ist, dessen Lösungsmenge man ohne weitere Rechnungen anschreiben kann.
  Zum Beispiel beim Gleichungssystem
  $$I'.\ x = c', \quad II'.\ y = d',$$
  dessen Lösungsmenge ist $\{(c', d')\}$.

Mündige Bürger/innen statt Untertanen

Beispiel: Systeme linearer Gleichungen

- Diese drei Umformungen führt man zielgerichtet solange durch, bis man bei einem Gleichungssystem angelangt ist, dessen Lösungsmenge man ohne weitere Rechnungen anschreiben kann.
  Zum Beispiel beim Gleichungssystem

  $$I'.\ x = c', \quad II'.\ y = d',$$

  dessen Lösungsmenge ist $\{(c', d')\}$.
- Die Umformungen wählt man so, dass man diesem Gleichungssystem I' und II' immer näher kommt („Gauß-Elimination").
  Wahl und Reihenfolge der Umformungsschritte **sollte man der Kreativität und den Vorlieben der Schülerinnen und Schüler überlassen.**

Mündige Bürger/innen statt Untertanen

Beispiel: Systeme linearer Gleichungen

- Es kann aber auch sein, dass man nicht dieses einfache Gleichungssystem erreicht, sondern bei

$$I''.\ a'x + b'y = c', \quad II''.\ 0 = 1$$

oder

$$I''.\ a'x + b'y = c', \quad II''.\ 0 = 0$$

landet . Die Lösungsmenge im ersten Fall ist leer, im zweiten Fall ist sie die unendliche Menge

$$\{(p, q) + t.(-b', a') \mid t \in \mathbb{R}\},$$

wobei (p, q) irgendeine Lösung von I'' ist (wenn $a' \neq 0$ ist zum Beispiel $(c'/a', 0)$).

Mündige Bürger/innen statt Untertanen

- ODER (?)

Mündige Bürger/innen statt Untertanen

- ODER (?)
- Für das Lösen eines linearen Gleichungssystems gibt es folgende rechnerische Verfahren: Gleichsetzungverfahren, Einsetzungsverfahren, Additionsverfahren, Cramer'sche Regel.

Mündige Bürger/innen statt Untertanen

- ODER (?)
- Für das Lösen eines linearen Gleichungssystems gibt es folgende rechnerische Verfahren: Gleichsetzungverfahren, Einsetzungsverfahren, Additionsverfahren, Cramer'sche Regel.
- Einsetzungsverfahren:
  Man formt eine der Gleichungen nach einer Variablen um.
  Dann ersetzt man in der anderen Gleichung diese Variable durch den erhaltenen Term.
  Man erhält eine lineare Gleichung mit der anderen Variablen, die man wie gewohnt löst.
  Setze dieses Ergebnis in die zuerst umgeformte Gleichung ein und erhalte die zweite Unbekannte.

Mündige Bürger/innen statt Untertanen

- ODER (?)

- Für das Lösen eines linearen Gleichungssystems gibt es folgende rechnerische Verfahren: Gleichsetzungverfahren, Einsetzungsverfahren, Additionsverfahren, Cramer'sche Regel.

- Einsetzungsverfahren:
  Man formt eine der Gleichungen nach einer Variablen um.
  Dann ersetzt man in der anderen Gleichung diese Variable durch den erhaltenen Term.
  Man erhält eine lineare Gleichung mit der anderen Variablen, die man wie gewohnt löst.
  Setze dieses Ergebnis in die zuerst umgeformte Gleichung ein und erhalte die zweite Unbekannte.

- Aufgaben dazu: Löse das Gleichungssystem mit dem Gleichsetzungsverfahren! Löse das Gleichungssystem mit dem Einsetzungsverfahren! ...

Mündige Bürger/innen statt Untertanen

- ODER (?)
- Für das Lösen eines linearen Gleichungssystems gibt es folgende rechnerische Verfahren: Gleichsetzungverfahren, Einsetzungsverfahren, Additionsverfahren, Cramer'sche Regel.
- Einsetzungsverfahren:
  Man formt eine der Gleichungen nach einer Variablen um.
  Dann ersetzt man in der anderen Gleichung diese Variable durch den erhaltenen Term.
  Man erhält eine lineare Gleichung mit der anderen Variablen, die man wie gewohnt löst.
  Setze dieses Ergebnis in die zuerst umgeformte Gleichung ein und erhalte die zweite Unbekannte.
- Aufgaben dazu: Löse das Gleichungssystem mit dem Gleichsetzungsverfahren! Löse das Gleichungssystem mit dem Einsetzungsverfahren! . . .
- Der Befehl soll genau nach Vorschrift ausgeführt werden! (18. und 19. Jhd.!)

Mündige Bürger/innen statt Untertanen

- Für eine demokratische Gesellschaft ist es wichtig, dass möglichst viele Bürgerinnen und Bürger Behauptungen, Nachrichten oder Versprechungen nicht einfach für wahr halten, ohne Begründungen zu fordern.

Mündige Bürger/innen statt Untertanen

- Für eine demokratische Gesellschaft ist es wichtig, dass möglichst viele Bürgerinnen und Bürger Behauptungen, Nachrichten oder Versprechungen nicht einfach für wahr halten, ohne Begründungen zu fordern.
- Im Mathematikunterricht kann man gut lernen, kritisch zu denken und nach Begründungen zu fragen. Insbesondere: lernen, **vor jedem „So ist das!“ zumindestens einmal „Ist das so?“ zu fragen.**

Mündige Bürger/innen statt Untertanen

- Für eine demokratische Gesellschaft ist es wichtig, dass möglichst viele Bürgerinnen und Bürger Behauptungen, Nachrichten oder Versprechungen nicht einfach für wahr halten, ohne Begründungen zu fordern.
- Im Mathematikunterricht kann man gut lernen, kritisch zu denken und nach Begründungen zu fragen. Insbesondere: lernen, **vor jedem „So ist das!" zumindestens einmal „Ist das so?" zu fragen.**
- Dazu müssen aber alle Inhalte so dargestellt werden, dass sie für die Schüler/innen (in der jeweiligen Altersstufe und mit ihrem jeweiligen Wissensstand) gut verständlich sind.

Mündige Bürger/innen statt Untertanen

- Für eine demokratische Gesellschaft ist es wichtig, dass möglichst viele Bürgerinnen und Bürger Behauptungen, Nachrichten oder Versprechungen nicht einfach für wahr halten, ohne Begründungen zu fordern.
- Im Mathematikunterricht kann man gut lernen, kritisch zu denken und nach Begründungen zu fragen. Insbesondere: lernen, **vor jedem „So ist das!“ zumindestens einmal „Ist das so?“ zu fragen.**
- Dazu müssen aber alle Inhalte so dargestellt werden, dass sie für die Schüler/innen (in der jeweiligen Altersstufe und mit ihrem jeweiligen Wissensstand) gut verständlich sind.
- Möglichst viele Inhalte sollen nachvollziehbar hergeleitet oder von den Schüler/inne/n unter Anleitung selbst entdeckt werden (schon in der Sekundarstufe 1 !).

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln

- Aufgabe 1: In einem Supermarkt kosten zwei Kilogramm Äpfel 4 Euro. Wieviel kosten 3 Kilogramm Äpfel?

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln

- Aufgabe 1: In einem Supermarkt kosten zwei Kilogramm Äpfel 4 Euro. Wieviel kosten 3 Kilogramm Äpfel?
- Aufgabe 2: Herr Meier kauft bei einem Obstbauern ein Kilogramm Äpfel um 2 Euro. Zwei Tage kommt er mit einem Lastwagen und kauft eine Tonne derselben Sorte Äpfel. Wieviel muss er dafür bezahlen?

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln

- Aufgabe 1: In einem Supermarkt kosten zwei Kilogramm Äpfel 4 Euro. Wieviel kosten 3 Kilogramm Äpfel?
- Aufgabe 2: Herr Meier kauft bei einem Obstbauern ein Kilogramm Äpfel um 2 Euro. Zwei Tage kommt er mit einem Lastwagen und kauft eine Tonne derselben Sorte Äpfel. Wieviel muss er dafür bezahlen?
- **Keine Antwort möglich, wenn der (funktionale) Zusammenhang zwischen Masse und Preis der Äpfel nicht bekannt ist.**

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln

- Aufgabe 1: In einem Supermarkt kosten zwei Kilogramm Äpfel 4 Euro. Wieviel kosten 3 Kilogramm Äpfel?
- Aufgabe 2: Herr Meier kauft bei einem Obstbauern ein Kilogramm Äpfel um 2 Euro. Zwei Tage kommt er mit einem Lastwagen und kauft eine Tonne derselben Sorte Äpfel. Wieviel muss er dafür bezahlen?
- **Keine Antwort möglich, wenn der (funktionale) Zusammenhang zwischen Masse und Preis der Äpfel nicht bekannt ist.**
- Wenn im Supermarkt die Aktion „Nimm drei, zahl zwei“ läuft, kosten 3 Kilogramm Äpfel 4 Euro.

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln

- Aufgabe 1: In einem Supermarkt kosten zwei Kilogramm Äpfel 4 Euro. Wieviel kosten 3 Kilogramm Äpfel?
- Aufgabe 2: Herr Meier kauft bei einem Obstbauern ein Kilogramm Äpfel um 2 Euro. Zwei Tage kommt er mit einem Lastwagen und kauft eine Tonne derselben Sorte Äpfel. Wieviel muss er dafür bezahlen?
- **Keine Antwort möglich, wenn der (funktionale) Zusammenhang zwischen Masse und Preis der Äpfel nicht bekannt ist.**
- Wenn im Supermarkt die Aktion „Nimm drei, zahl zwei“ läuft, kosten 3 Kilogramm Äpfel 4 Euro.
- Jeder Händler weiß, dass Herr Meier sicherlich viel weniger als 2000 Euro zahlen wird.

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

- Für ein steuerpflichtiges Einkommen von 25 000 Euro im Jahr 2020 zahlt man 3850 Euro Steuer. Wie hoch ist die Steuer für ein steuerpflichtiges Einkommen von 50 000 Euro im Jahr 2020?

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

- Für ein steuerpflichtiges Einkommen von 25 000 Euro im Jahr 2020 zahlt man 3850 Euro Steuer. Wie hoch ist die Steuer für ein steuerpflichtiges Einkommen von 50 000 Euro im Jahr 2020?
- 13 930 Euro (mehr als dreimal so viel wie für die Hälfte)

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

- Für ein steuerpflichtiges Einkommen von 25 000 Euro im Jahr 2020 zahlt man 3850 Euro Steuer. Wie hoch ist die Steuer für ein steuerpflichtiges Einkommen von 50 000 Euro im Jahr 2020?
- 13 930 Euro (mehr als dreimal so viel wie für die Hälfte)
- Zur Beantwortung der Frage ist „Expert/inn/enwissen“ nötig: **Welcher (funktionale) Zusammenhang besteht zwischen Einkommen und Steuer?**

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

- Für ein steuerpflichtiges Einkommen von 25 000 Euro im Jahr 2020 zahlt man 3850 Euro Steuer. Wie hoch ist die Steuer für ein steuerpflichtiges Einkommen von 50 000 Euro im Jahr 2020?
- 13 930 Euro (mehr als dreimal so viel wie für die Hälfte)
- Zur Beantwortung der Frage ist „Expert/inn/enwissen“ nötig: **Welcher (funktionale) Zusammenhang besteht zwischen Einkommen und Steuer?**
- Die Funktion, die jedem Einkommen die entsprechende Steuer zuordnet, ist stückweise linear, monoton wachsend und stetig.

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

- Für ein steuerpflichtiges Einkommen von 25 000 Euro im Jahr 2020 zahlt man 3850 Euro Steuer. Wie hoch ist die Steuer für ein steuerpflichtiges Einkommen von 50 000 Euro im Jahr 2020?
- 13 930 Euro (mehr als dreimal so viel wie für die Hälfte)
- Zur Beantwortung der Frage ist „Expert/inn/enwissen" nötig: **Welcher (funktionale) Zusammenhang besteht zwischen Einkommen und Steuer?**
- Die Funktion, die jedem Einkommen die entsprechende Steuer zuordnet, ist stückweise linear, monoton wachsend und stetig.
- Beschreibung dieser Funktion: keine Steuer für 0 bis 11 000, 11 000 bis 18 000: 20 Prozent, 18 000 bis 31 000: 35 Prozent, 31 000 bis 60 000: 42 Prozent, 60 000 bis 90 000: 48 Prozent, 90 000 bis 1 000 000: 50 Prozent, darüber 55 Prozent.

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

Beispiel:

- $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist durch eine einfache (uns aber noch unbekannte) Vorschrift definiert.

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

Beispiel:

- $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist durch eine einfache (uns aber noch unbekannte) Vorschrift definiert.
- Es ist $f(28) = 14$, $f(16) = 8$, $f(8) = 4$.

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

Beispiel:

- $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist durch eine einfache (uns aber noch unbekannte) Vorschrift definiert.
- Es ist $f(28) = 14$, $f(16) = 8$, $f(8) = 4$.
- $f(20) =?$

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

Beispiel:

- $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist durch eine einfache (uns aber noch unbekannte) Vorschrift definiert.
- Es ist $f(28) = 14$, $f(16) = 8$, $f(8) = 4$.
- $f(20) =?$
- Richtige Antwort: $f(20) = 7$

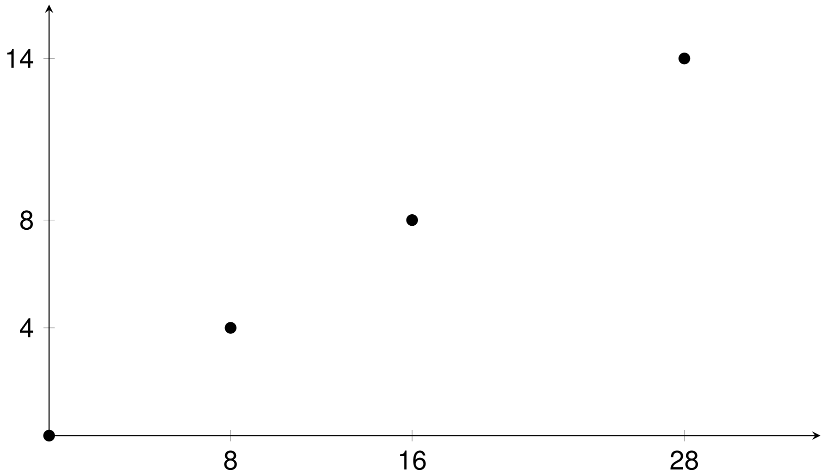
Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

Beispiel:

- $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist durch eine einfache (uns aber noch unbekannte) Vorschrift definiert.
- Es ist $f(28) = 14$, $f(16) = 8$, $f(8) = 4$.
- $f(20) =?$
- Richtige Antwort: $f(20) = 7$
- $f(n)$ ist die Anzahl der Buchstaben des deutschen Wortes für die Zahl n.

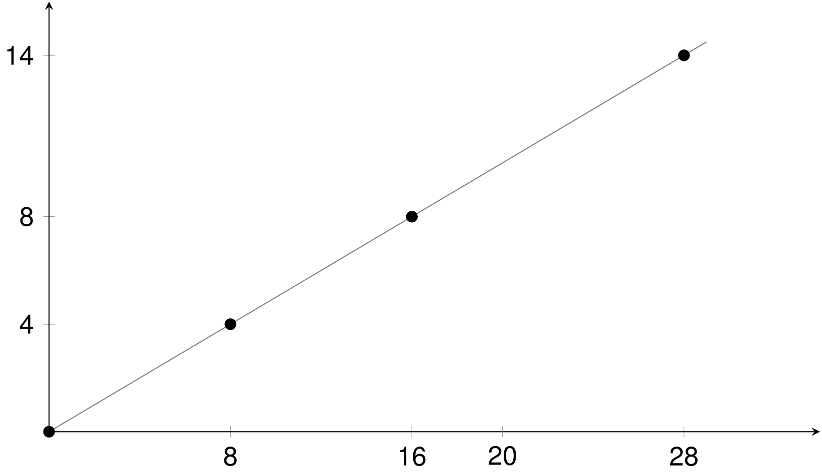
Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

$f(28) = 14$, $f(16) = 8$, $f(8) = 4$, $f(20) = ?$



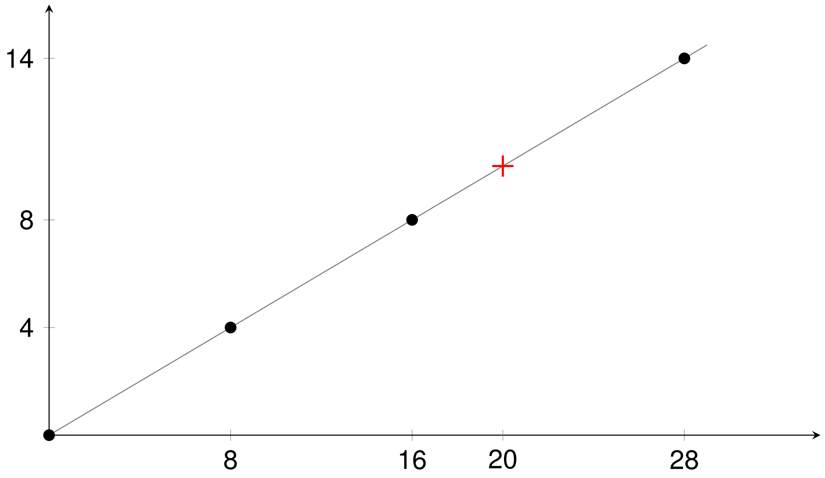
Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

$f(28) = 14$, $f(16) = 8$, $f(8) = 4$, $f(20) = ?$



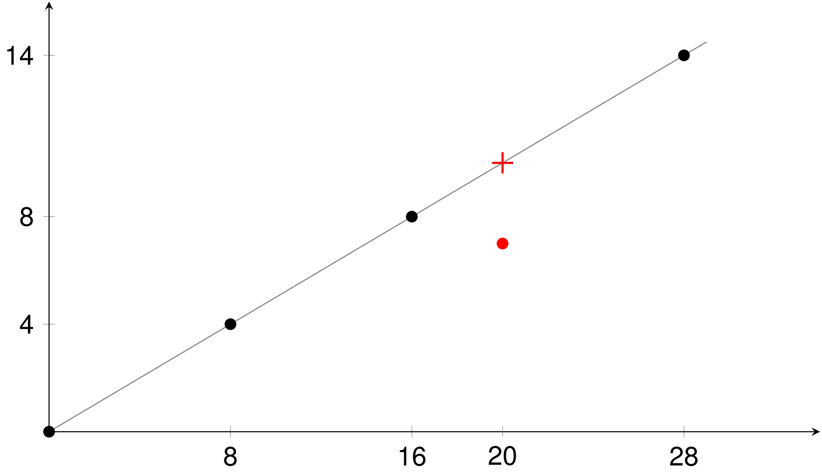
Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

$f(28) = 14$, $f(16) = 8$, $f(8) = 4$, $f(20) = ?$



Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

$f(28) = 14$, $f(16) = 8$, $f(8) = 4$, $f(20) = ?$



Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

Beispiel: Folgen fortsetzen

- Setze die Buchstabenfolge fort: c,d,e,f,g,...

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

Beispiel: Folgen fortsetzen

- Setze die Buchstabenfolge fort: c,d,e,f,g,...
- Antwort der Klavierschülerin: c,d,e,f,g,a,...

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

Beispiel: Folgen fortsetzen

- Setze die Buchstabenfolge fort: c,d,e,f,g,...
- Antwort der Klavierschülerin: c,d,e,f,g,a,...
- Antwort im Deutschunterricht: c,d,e,f,g,h, ...

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

Beispiel: Folgen fortsetzen

- Setze die Buchstabenfolge fort: c,d,e,f,g,...
- Antwort der Klavierschülerin: c,d,e,f,g,a,...
- Antwort im Deutschunterricht: c,d,e,f,g,h, ...
- Setze die Zahlenreihe fort: 1,2,3,...

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

Beispiel: Folgen fortsetzen

- Setze die Buchstabenfolge fort: c,d,e,f,g,...
- Antwort der Klavierschülerin: c,d,e,f,g,a,...
- Antwort im Deutschunterricht: c,d,e,f,g,h, ...
- Setze die Zahlenreihe fort: 1,2,3,...
- Antwort des Walzertänzers: 1,2,3,1,2,3,...

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

Ist die „Fortsetzung von Zahlenfolgen“ in diversen Tests sinnvoll?

Beispiel:

- „Bilde für alle positiven natürlichen Zahlen n das Produkt ihrer fünf Vorgänger $(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot(n-5)$ und addiere dann n“ ergibt

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

Ist die „Fortsetzung von Zahlenfolgen“ in diversen Tests sinnvoll?

Beispiel:

- „Bilde für alle positiven natürlichen Zahlen n das Produkt ihrer fünf Vorgänger $(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot(n-5)$ und addiere dann n“ ergibt
- die Folge $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

Ist die „Fortsetzung von Zahlenfolgen“ in diversen Tests sinnvoll?

Beispiel:

- „Bilde für alle positiven natürlichen Zahlen n das Produkt ihrer fünf Vorgänger $(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot(n-5)$ und addiere dann n“ ergibt
- die Folge $1, 2, 3, 4, 5, ...$
- oder, ausführlicher geschrieben, $1, 2, 3, 4, 5, 126, 727, \ldots,$ $\ldots, (n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot(n-5)+n, \ldots$

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

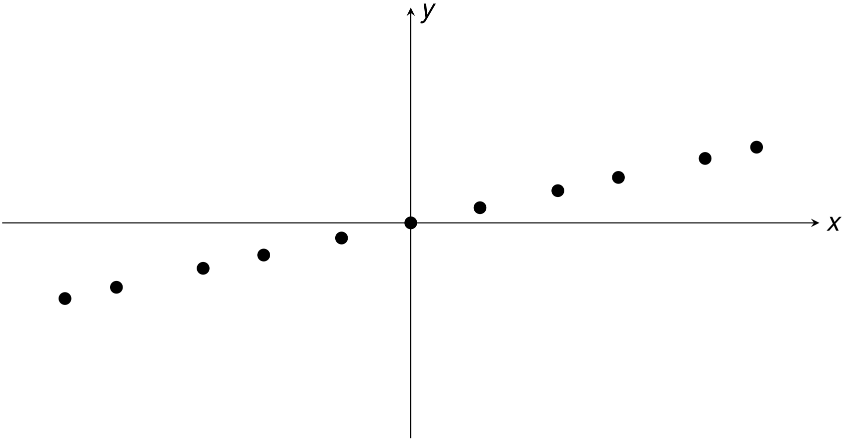
Ist die „Fortsetzung von Zahlenfolgen“ in diversen Tests sinnvoll?

Beispiel:

- „Bilde für alle positiven natürlichen Zahlen n das Produkt ihrer fünf Vorgänger $(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot(n-5)$ und addiere dann n“ ergibt
- die Folge $1, 2, 3, 4, 5, ...$
- oder, ausführlicher geschrieben, $1, 2, 3, 4, 5, 126, 727, \ldots,$ $\ldots, (n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot(n-5)+n, \ldots$
- Bei solchen Tests wird nicht Intelligenz überprüft, sondern ob jemand so wie die meisten denkt.

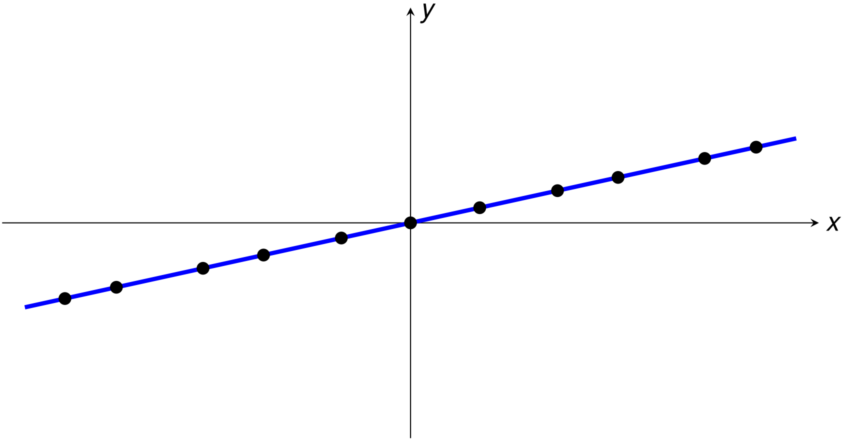
Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

Lineare Regression?



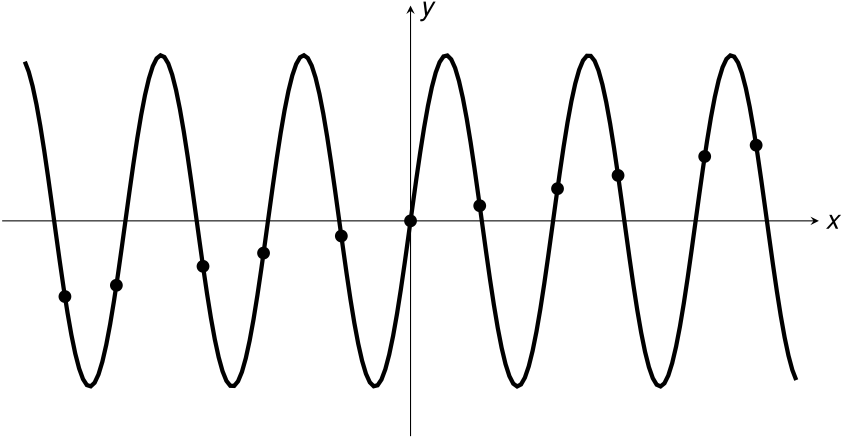
Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

Lineare Regression?



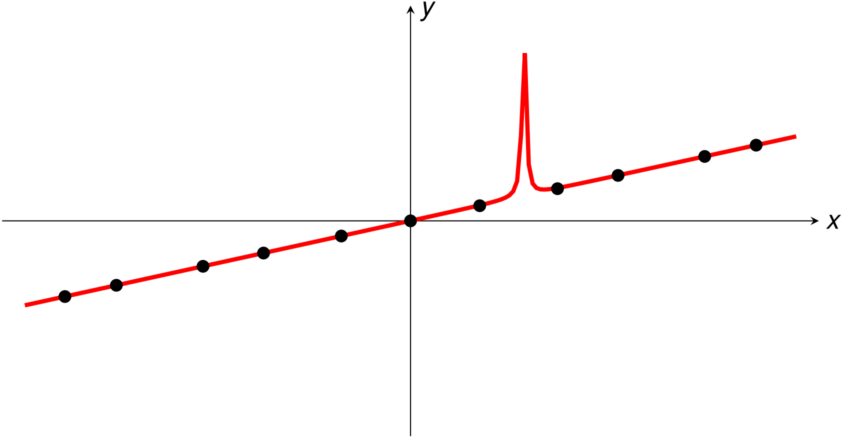
Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

Lineare Regression?



Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

Lineare Regression?



Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln

- Wolfgang Ambros, 1972: „Der Hofer war's, vom Zwanzgerhaus, der schaut mir so verdächtig aus“

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln

- Wolfgang Ambros, 1972: „Der Hofer war's, vom Zwanzgerhaus, der schaut mir so verdächtig aus“
- Verschwörungstheorien in der Pandemie

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln

- Wolfgang Ambros, 1972: „Der Hofer war's, vom Zwanzgerhaus, der schaut mir so verdächtig aus“
- Verschwörungstheorien in der Pandemie
- „Populistische“ Parteien in vielen Ländern

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln

- Wolfgang Ambros, 1972: „Der Hofer war's, vom Zwanzgerhaus, der schaut mir so verdächtig aus“
- Verschwörungstheorien in der Pandemie
- „Populistische“ Parteien in vielen Ländern
- Urteile nie über einen anderen, bevor Du nicht einen Mond lang in seinen Mokassins gelaufen bist (indianische Weisheit).

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln

- Wolfgang Ambros, 1972: „Der Hofer war's, vom Zwanzgerhaus, der schaut mir so verdächtig aus“
- Verschwörungstheorien in der Pandemie
- „Populistische“ Parteien in vielen Ländern
- Urteile nie über einen anderen, bevor Du nicht einen Mond lang in seinen Mokassins gelaufen bist (indianische Weisheit).
- Sei bereitwilliger, die Aussage des Nächsten zu retten, als sie zu verurteilen (Ignatius v. Loyola, 16. Jhd.).

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Was heißt *„Mache den Nenner wurzelfrei!“* (aus einem Schulbuch der 9. Schulstufe) ?

$$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2}$$

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Was heißt *„Mache den Nenner wurzelfrei!“* (aus einem Schulbuch der 9. Schulstufe) ?

$$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2}$$

- Einfachste Lösung:

$$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2} = \frac{\left(\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2}\right)}{1}$$

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Was heißt *„Mache den Nenner wurzelfrei!“* (aus einem Schulbuch der 9. Schulstufe) ?

$$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2}$$

- Einfachste Lösung:

$$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2} = \frac{\left(\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2}\right)}{1}$$

- Oder:

$$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2} \approx 2,436626815 \; (= \frac{2436626815}{10^9})$$

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Klare Formulierung der Aufgabe:
  Berechne rationale Zahlen a und b so, dass

$$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2} = a\sqrt{5}+b \text{ ist.}$$

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Klare Formulierung der Aufgabe:
  Berechne rationale Zahlen a und b so, dass

  $$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2} = a\sqrt{5}+b \text{ ist.}$$

- Die klare Formulierung legt auch schon nahe, wie man die Aufgabe lösen kann:

  Aus $\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2} = a\sqrt{5}+b$ folgt

  $$2\sqrt{5}+7 = (3\sqrt{5}-2)\cdot(a\sqrt{5}+b) \quad \text{und}$$

  $$2\sqrt{5}+7 = (3b-2a)\sqrt{5}+(-2b+15a)\ .$$

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Klare Formulierung der Aufgabe:
  Berechne rationale Zahlen a und b so, dass
  $$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2} = a\sqrt{5}+b \text{ ist.}$$
- Die klare Formulierung legt auch schon nahe, wie man die Aufgabe lösen kann:

  Aus $\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2} = a\sqrt{5}+b$ folgt
  $$2\sqrt{5}+7 = (3\sqrt{5}-2)\cdot(a\sqrt{5}+b) \quad \text{und}$$
  $$2\sqrt{5}+7 = (3b-2a)\sqrt{5}+(-2b+15a)\ .$$
- Eine Lösung (a, b) des Gleichungssystems
  $$3b-2a = 2 \text{ und } -2b+15a = 7$$
  ist auch eine Lösung unserer Aufgabe.

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Die Sprache im Mathematikunterricht muss einfach und verständlich sein und sollte möglichst wenige Fachbegriffe verwenden.

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Die Sprache im Mathematikunterricht muss einfach und verständlich sein und sollte möglichst wenige Fachbegriffe verwenden.
- Die notwendigen Fachbegriffe müssen aber sorgfältig und präzise eingeführt werden.

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Die Sprache im Mathematikunterricht muss einfach und verständlich sein und sollte möglichst wenige Fachbegriffe verwenden.
- Die notwendigen Fachbegriffe müssen aber sorgfältig und präzise eingeführt werden.
- Übungsaufgaben müssen zugleich einfach und präzise formuliert werden. Sie sollen das kritische und vorurteilsfreie Denken, Modellieren und Problemlösen trainieren.

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

Beispiel: Komplexe Zahlen

- Was ist eine komplexe Zahl? Gibt es eine Zahl, deren Quadrat -1 ist?

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

Beispiel: Komplexe Zahlen

- Was ist eine komplexe Zahl? Gibt es eine Zahl, deren Quadrat -1 ist?
- Die Zahlbereichserweiterung von den reellen zu den komplexen Zahlen ist einfacher zu erklären als die von den natürlichen zu den nicht-negativen rationalen Zahlen.

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

Beispiel: Komplexe Zahlen

- Was ist eine komplexe Zahl? Gibt es eine Zahl, deren Quadrat -1 ist?
- Die Zahlbereichserweiterung von den reellen zu den komplexen Zahlen ist einfacher zu erklären als die von den natürlichen zu den nicht-negativen rationalen Zahlen.
- Eine komplexe Zahl ist ein Paar von reellen Zahlen.

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

Beispiel: Komplexe Zahlen

- Was ist eine komplexe Zahl? Gibt es eine Zahl, deren Quadrat -1 ist?
- Die Zahlbereichserweiterung von den reellen zu den komplexen Zahlen ist einfacher zu erklären als die von den natürlichen zu den nicht-negativen rationalen Zahlen.
- Eine komplexe Zahl ist ein Paar von reellen Zahlen.
- Die Summe von zwei komplexen Zahlen ist die komponentenweise Summe :

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

Beispiel: Komplexe Zahlen

- Was ist eine komplexe Zahl? Gibt es eine Zahl, deren Quadrat -1 ist?
- Die Zahlbereichserweiterung von den reellen zu den komplexen Zahlen ist einfacher zu erklären als die von den natürlichen zu den nicht-negativen rationalen Zahlen.
- Eine komplexe Zahl ist ein Paar von reellen Zahlen.
- Die Summe von zwei komplexen Zahlen ist die komponentenweise Summe :

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

- Das Produkt von zwei komplexen Zahlen ist nicht das komponentenweise Produkt, sondern:

$$(a, b) \cdot (c, d) := (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$$

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

Beispiel: Komplexe Zahlen

- Wir haben dieses Produkt so definiert, damit $(0,1) \cdot (0,1) = (-1,0)$ ist, $(a,0) \cdot (c,d) = (a \cdot c, a \cdot d)$ ist und dass alle Rechenregeln der reellen Zahlen gelten.

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

Beispiel: Komplexe Zahlen

- Wir haben dieses Produkt so definiert, damit $(0,1) \cdot (0,1) = (-1,0)$ ist, $(a,0) \cdot (c,d) = (a \cdot c, a \cdot d)$ ist und dass alle Rechenregeln der reellen Zahlen gelten.

- Wir schreiben r für $(r,0)$ (und fassen so reelle Zahlen als komplexe auf) und i (oder j) für $(0,1)$.
Dann ist $(a,b) = a \cdot (1,0) + b \cdot (0,1) = a \cdot 1 + b \cdot i =: a + bi$.

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

Beispiel: Komplexe Zahlen

- Wir haben dieses Produkt so definiert, damit $(0,1)\cdot(0,1) = (-1,0)$ ist, $(a,0)\cdot(c,d) = (a\cdot c, a\cdot d)$ ist und dass alle Rechenregeln der reellen Zahlen gelten.

- Wir schreiben r für $(r,0)$ (und fassen so reelle Zahlen als komplexe auf) und i (oder j) für $(0,1)$.
  Dann ist $(a,b) = a\cdot(1,0) + b\cdot(0,1) = a\cdot 1 + b\cdot i =: a+bi$.

- $i^2 = -1$
  $(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$
  $(a+bi)\cdot(c+di) = (a\cdot c - b\cdot d) + (a\cdot d + b\cdot c)i$

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

Beispiel: Komplexe Zahlen

- Wir haben dieses Produkt so definiert, damit $(0,1) \cdot (0,1) = (-1,0)$ ist, $(a,0) \cdot (c,d) = (a \cdot c, a \cdot d)$ ist und dass alle Rechenregeln der reellen Zahlen gelten.

- Wir schreiben r für $(r,0)$ (und fassen so reelle Zahlen als komplexe auf) und i (oder j) für $(0,1)$.
  Dann ist $(a,b) = a \cdot (1,0) + b \cdot (0,1) = a \cdot 1 + b \cdot i =: a + bi$.

- $i^2 = -1$
  $(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$
  $(a+bi) \cdot (c+di) = (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)i$

- Man prüft leicht nach, dass alle Rechenregeln für reelle Zahlen auch für komplexe Zahlen gelten.

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- ODER (?)

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- ODER (?)
- *Die imaginäre Einheit i ist jene Zahl, für die gilt:* $i^2 = -1$.
  Alle Vielfachen der imaginären Einheit $b.i$ *mit* $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *heißen imaginäre Zahlen.*
  Mathematische Ausdrücke der Form $a + b.i$ *mit* $a, b \in \mathbb{R}$ *heißen komplexe Zahlen.* (aus einem Schulbuch für die 11. Schulstufe)

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- ODER (?)
- *Die imaginäre Einheit i ist jene Zahl, für die gilt: $i^2 = -1$.*
  Alle Vielfachen der imaginären Einheit $b.i$ mit $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ heißen imaginäre Zahlen.
  Mathematische Ausdrücke der Form $a + b.i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ heißen komplexe Zahlen. (aus einem Schulbuch für die 11. Schulstufe)
- Schülerinnen und Schüler der 11. Schulstufe verstehen unter „Zahl“ eine reelle Zahl und kennen nur Addition und Multiplikation von reellen Zahlen.

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- ODER (?)
- *Die imaginäre Einheit i ist jene Zahl, für die gilt:* $i^2 = -1$.
  Alle Vielfachen der imaginären Einheit $b.i$ *mit* $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *heißen imaginäre Zahlen.*
  Mathematische Ausdrücke der Form $a + b.i$ *mit* $a, b \in \mathbb{R}$ *heißen komplexe Zahlen.* (aus einem Schulbuch für die 11. Schulstufe)
- Schülerinnen und Schüler der 11. Schulstufe verstehen unter „Zahl" eine reelle Zahl und kennen nur Addition und Multiplikation von reellen Zahlen.
- Können sie dem Text entnehmen, was „i" ist? Was mit i^2 gemeint ist? Was sind „Vielfache" von i? Wie addiert man eine reelle Zahl zur „imaginären Einheit"?

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- ODER (?)
- *Die imaginäre Einheit i ist jene Zahl, für die gilt:* $i^2 = -1$.
  Alle Vielfachen der imaginären Einheit b.i mit $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *heißen imaginäre Zahlen.*
  Mathematische Ausdrücke der Form $a + b.i$ *mit* $a, b \in \mathbb{R}$ *heißen komplexe Zahlen.* (aus einem Schulbuch für die 11. Schulstufe)
- Schülerinnen und Schüler der 11. Schulstufe verstehen unter „Zahl" eine reelle Zahl und kennen nur Addition und Multiplikation von reellen Zahlen.
- Können sie dem Text entnehmen, was „i" ist? Was mit i^2 gemeint ist? Was sind „Vielfache" von i? Wie addiert man eine reelle Zahl zur „imaginären Einheit"?
- Es gibt nicht nur eine komplexe Zahl, deren Quadrat -1 ist, sondern zwei. „*i* ist jene Zahl, ..." ist daher irreführend.

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- ODER (?)
- *Die imaginäre Einheit i ist jene Zahl, für die gilt:* $i^2 = -1$.
  Alle Vielfachen der imaginären Einheit $b.i$ *mit* $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *heißen imaginäre Zahlen.*
  Mathematische Ausdrücke der Form $a + b.i$ *mit* $a, b \in \mathbb{R}$ *heißen komplexe Zahlen.* (aus einem Schulbuch für die 11. Schulstufe)

- Schülerinnen und Schüler der 11. Schulstufe verstehen unter „Zahl" eine reelle Zahl und kennen nur Addition und Multiplikation von reellen Zahlen.

- Können sie dem Text entnehmen, was „i" ist? Was mit i^2 gemeint ist? Was sind „Vielfache" von i? Wie addiert man eine reelle Zahl zur „imaginären Einheit"?

- Es gibt nicht nur eine komplexe Zahl, deren Quadrat -1 ist, sondern zwei. „*i* ist jene Zahl, ..." ist daher irreführend.

- Die Bezeichnung „imaginäre Einheit" legt nahe, dass *i* nicht wirklich existiert.

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Wenn im Mathematikunterricht erlernt wird, klar und genau zu denken, verständlich und präzise zu sprechen, Aufgaben systematisch abzuarbeiten, dann wird damit auch das Selbstbewusstsein der Kinder und Jugendlichen gestärkt.

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Wenn im Mathematikunterricht erlernt wird, klar und genau zu denken, verständlich und präzise zu sprechen, Aufgaben systematisch abzuarbeiten, dann wird damit auch das Selbstbewusstsein der Kinder und Jugendlichen gestärkt.
- Wer gelernt hat, mathematische Aufgaben durch Nachdenken und Diskussion zu lösen, überträgt das vielleicht auch auf andere Bereiche und kann dann zum Beispiel Konflikte mit anderen Jugendlichen intelligenter lösen als durch Zuschlagen.

Danke für die Aufmerksamkeit!

http://www.uibk.ac.at/mathematik/personal/pauer/
franz.pauer@uibk.ac.at