Was ist und was soll Wahrscheinlichkeit?

Michael Oberguggenberger

Arbeitsbereich für Technische Mathematik, Fakultät für Technische Wissenschaften

Universität Innsbruck

www.uibk.ac.at/techmath/michael/

ÖMG-Fortbildungstagung für Lehrkräfte

9. April 2021

Vorschau

- Wissenschaft und Wirklichkeit
- Wahrscheinlichkeit und Wirklichkeit
- Semantiken des Wahrscheinlichkeitsbegriffs
- De Finetti's Konstruktion
- Wahrscheinlichkeit – gibt es sie oder gibt es sie nicht?
- Quantenwahrscheinlichkeit
- Schlussbemerkungen

(Bildernachweise am Ende des Vortrags)

Theorie ⟷ **Übersetzung Semantik** ⟷ **Intendierter Anwendungsbereich**

Zustandsgrößen

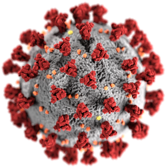
Modell $\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow$ / $\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow$ **Wirklichkeit**

Modellparameter

Epidemologie
Populationsdynamik

$$\dot S(t) = -\beta S(t) I(t)/N$$
$$\dot I(t) = \beta S(t) I(t)/N - \gamma I(t)$$
$$\dot R(t) = \gamma I(t)$$

$$\xrightarrow{S(t), I(t), R(t)}$$
$$\xleftarrow[\beta, \gamma, N;\, S(0), I(0), R(0)]{}$$



Relativitätstheorie

Raum-Zeit-Krümmung

Schwarzschildmetrik

$$\mathrm{d}s^2 = -h(r)c^2\mathrm{d}t^2 + \frac{1}{h(r)}\mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2$$

$$h(r) = 1 - r_s/r$$

Klassische Mechanik

Elastostatik

Euler-Bernoulli-Balken

$$EI\,\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4}w(x) = q(x)$$

Forderung: Überprüfbarkeit der Modellprognose

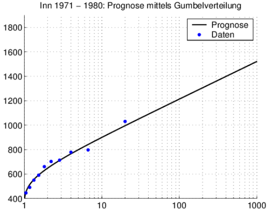
(Ω, Σ, P), $\Sigma \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $P : \Sigma \to [0, 1]$
$P(\Omega) = 1$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

?

?

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

1000-jähriges Hochwasser?



Erdverlegte Rohre

$$EI\,\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4}w(x) + bc\,w(x) = q(x)$$

EI = Biegesteifigkeit
b = effektive Dicke
c = Bettungskoeffizient

E, I, b: Zufallsgrößen, statistische Verteilung nach Rohrhersteller

c: Zufallsgröße, abhängig von Einbauqualität, de facto unmessbar

$q(x)$: Zufallsfeld, zu erwartende Belastung – kann nur vermutet werden

Planungsphase: Wie sind Rohre und Bettung zu bemessen?

Antwort: nach europäischer Norm EN 1990:2002.

Probabilistisches Sicherheitskonzept – **Versagenswahrscheinlichkeit**

$$\mathbf{p_f = P(Last > Belastbarkeit) \;\leq\; 10^{-6} = \frac{1}{1000000}}$$

Im Rohrbeispiel: $p_f = P\big(w'' \geq M\big)$, M maximal zulässiger Wert.

Noch ein Beispiel gefällig?

AKW-Experte Helmut Hirsch am 4. 5. 2001 in der ZIB3:

„Temelin ist 100 mal unsicherer als ein westliches AKW“.

Robert Hochner (erstaunt): „Wieso?“
Antwort Hirsch: „Eine Studie der Temelin-Betreiber ergab P(GAU) = 1:10000. Der westliche Standard verlangt 1:1000000.“

Hä? Was soll das alles?

WAHRSCHEINLICHKEIT GIBT ES NICHT

Bruno de Finetti, erster Satz in seinem Buch über Wahrscheinlichkeit 1970

Interpretation oder **Semantik**: Was bedeuten die probabilistischen Konzepte in der Realität?

Kombinatorische – „klassische“ – Interpretation:

Die **Wahrscheinlichkeit** eines Ereignisses A ist

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\textbf{Anzahl der günstigen Fälle}}{\textbf{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

Beispiel: Lotterie „6 aus 45“. Den Jackpot gewinnt man bei sechs Richtigen. Die Anzahl der günstigen Fälle ist 1, die Anzahl der möglichen Fälle ist

$$\binom{45}{6} = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 8145060.$$

Die Wahrscheinlichkeit, einen Sechser zu ziehen, ist

$$P(A) = \frac{1}{8145060} = 0.00000012\ldots$$

Kombinatorische Wahrscheinlichkeit

Unzählige Anwendungen der kombinatorischen Wahrscheinlichkeit, etwa in der Qualitätskontrolle oder in der Physik.

Beispiel: Es folgt aus dem radioaktiven Zerfallsgesetz, dass die Lebensdauer eines radioaktiven Teilchens exponentialverteilt ist.

Zerfallsgesetz:

$$M(t) = M(0)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

mit $\lambda = \frac{\ln 2}{\tau}$, Halbwertszeit τ. Für die Lebenszeit T eines radioaktiven Partikels gilt

$$P(T > t) = \frac{M(t)}{M(0)} = \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

da T größer t ist, falls das Partikel zum Zeitpunkt t nicht zerfallen ist.

Verteilungsfunktion und Verteilungsdichte der Zufallsgröße T:

$$F_T(t) = 1 - P(T > t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad f_T(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t} \quad \text{für } t \geq 0.$$

Frequentistische Interpretation:

Die **Wahrscheinlichkeit** $P(A)$ eines Ereignisses A wird approximiert durch die relative Häufigkeit seines Eintretens in einer Stichprobe von hinreichend großem Umfang:

Wahrscheinlichkeit ≈ relative Häufigkeit.

Idealerweise ist eine große Zahl von unter identischen Bedingungen gewonnenen Beobachtungen zur Verfügung.

Der Zusatz „unter identischen Bedingungen" wurde von K. Popper in seiner **Propensitäts-Interpretation** (Verwirklichungstendenz) präzisiert: Der Versuchsaufbau wird Teil der Theorie.

Zahlreiche abgeleitete Entsprechungen:

Erwartungswert ≈ Stichprobenmittel

Varianz ≈ Stichprobenvarianz

Subjektivistische Interpretation:

Die **Wahrscheinlichkeit** eines Ereignisses A bedeutet den **Vertrauensgrad** in sein Eintreten.

Der Vertrauensgrad beruht auf subjektiver Beurteilung. Verschiedene Expert*innen können zu unterschiedlichen Werten gelangen.

Die Beurteilung ist nicht willkürlich, sie muss rational und unter Beachtung aller verfügbaren Informationen erfolgen.

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff kann aus entscheidungstheoretischen Prinzipien abgeleitet werden.

Stichworte:

Kohärenz – Vermeidung sicheren Verlusts – Indifferenzpreis

Praktische Umsetzung:

Brainstorming – Mediation – Elizitierung (Delphi-Methode)

Weitere Zugänge

- Rationale Entscheidungstheorie: L.J. Savage 1954
- Logik: E.T. Jaynes 2003
- Spieltheorie: G. Shafer, V. Vlok 2001
- Komplexitätstheorie: R. von Mises 1919 bis C.P. Schnorr 1971
  Eine Zufallsfolge $x_1, x_2, x_3, \ldots$, etwa $x_i \in \{0, 1\}$, definiert $p = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Siehe auch T. Fine: **Theories** of Probability 1973
- Operative Wahrscheinlichkeit: EN 1990:2002
- Unscharfe Wahrscheinlichkeiten: P. Walley 1991
- Anwendungen der Wahrscheinlichkeit ohne Semantik:
  Probabilistische Numerik – Integration – Gleichungslöser – Optimierung – Monte-Carlo-basierte Sensitivitätsanalyse

Grundobjekte: $S \in \mathcal{S}$ ... eine Menge von Spielen („gambles“) (mit Struktur eines halbgeordneten Vektorraums)

Prävision: eine Abbildung $\mathrm{E} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$

Axiome:
- Linearität: $\mathrm{E}(\lambda S + \mu T) = \lambda \mathrm{E}(S) + \mu \mathrm{E}(T)$
- Positivität: $S \geq 0 \Rightarrow \mathrm{E}(S) \geq 0$
- Beschränktheit: $|\mathrm{E}(S)| \leq \sup |S|$

Interpretation: $\mathrm{E}(S) =$ maximaler Preis, den Du für S zu zahlen bereit bist $=$ minimaler Preis, zu dem Du S verkaufen würdest.

Beispiel: Wetten mit Würfeln, Auszahlungswert 6,- Euro
$S =$ einmaliges Würfeln, wenn Sechser auftritt, Gewinn von 6,- Euro
$T =$ einmaliges Würfeln, wenn ungerade Zahl – Gewinn von 6,- Euro

Das Prinzip der Vermeidung sicheren Verlusts führt zu Deinen Indifferenzpreisen

$$\mathrm{E}(S) = 1,\text{- Euro}, \quad \mathrm{E}(T) = 3,\text{- Euro}.$$

Plausibel: $\mathrm{E}(2S) = 2$,- Euro, $\mathrm{E}(S + T) = 4$,- Euro.

Spiele mit Werten in $\{0, 1\}$ definieren Wahrscheinlichkeiten.

$S' =$ einmaliges Würfeln, wenn Sechser – Gewinn von 1,- Euro.
Es folgt aus den Axiomen, dass $\mathrm{E}(S') = \frac{1}{6}\mathrm{E}(S) = \frac{1}{6}$ ist.
Dies entspricht der Wahrscheinlichkeit eines Sechsers.

Natürliche Fortsetzung auf noch unbewertete Spiele T:

$$\mathrm{E}(T) = \sup\{\mathrm{E}(S) : S \leq T\} = \inf\{\mathrm{E}(S) : S \geq T\}$$

Anliegen de Finetti's: Axiome folgen der intendierten Interpretation.

Kolmogoroff: Wahrscheinlichkeit beruht auf messbaren Mengen ($\in \Sigma$) und Wahrscheinlichkeitsmaßen. Messbare Funktionen und Erwartungswerte sind abgeleitete Größen.

De Finetti: Grundlage Spiele = beschränkte Funktionen ($\in \mathcal{S}$) und ihr Erwartungswert. Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen sind abgeleitete Größen. Messbare Mengen sind jene, deren Indikatorfunktion zu $\mathcal{S}$ gehört.

Atempause

- So weit – Blick auf Wahrscheinlichkeit aus Sicht der Wirtschafts-, Human-, Ingenieurwissenschaften, Risikoanalyse, Quantifizierung von Unsicherheit ...
- Ingenieurwissenschaftliche Modelle sind Input-Output-Modelle. Bei gegebenem Modell und gegebenen Parameterwerten ist der Modell-Output deterministisch.
- Wahrscheinlichkeit dient zur Beschreibung der Unsicherheit in den Parameterwerten (evtl. auch der Modellwahl) und damit auch der Unsicherheit der Prognose.
- Statistik und Wahrscheinlichkeit gehören zur Entscheidungstheorie, nicht zur Naturwissenschaft.
- In den genannten Wissenschaften werden in der Regel frequentistische und subjektivistische Ansätze gleichzeitig und vermischt verwendet.

- Wahrscheinlichkeit als materielle Eigenschaft von realen Objekten/Vorgängen gibt es nicht.

Oder doch?

Es gibt zwei Teilgebiete der Physik, in denen die Grundgrößen Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind:

- Statistische Mechanik
- Quantenmechanik

Eine Semantik wird auch hier benötigt. Eine frequentistische Propensitätsinterpretation herrscht vor. Zum Erstaunen der Entscheidungstheoretiker scheint sie zu funktionieren.

Also jetzt . . .

Von der Quantenmechanik zur Quantenwahrscheinlichkeit

Das Schrödinger-Bild der Quantenmechanik

Der *Zustand* eines quantenmechanischen Systems ist ein Einheitsvektor ψ in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, $\|\psi\| = 1$.

Eine experimentelle Beobachtung wird durch eine *Observable* beschrieben, einen selbstadjungierten Operator $A : \mathcal{D} \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Der Erwartungswert für die Beobachtung im Zustand ψ ist $\langle A\psi|\psi\rangle$.

Es gibt Projektionen $E_c : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $c \in \mathbb{R}$ (Spektralmaße), sodass die Wahrscheinlichkeit, dass die Beobachtung im Intervall $[a, b)$ liegt, wenn das System im Zustand ψ ist, gleich $\|E_b\psi - E_a\psi\|^2$ ist.

Beispiel: das freie Teilchen auf der eindimensionalen Achse

$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$. Die Ortsobservable ist $A\psi(x) = x\psi(x)$. Die Projektion E_c ist die Multiplikation mit der charakteristischen Funktionen des Intervalls $(-\infty, c)$. Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Intervall $[a, b)$ anzutreffen, ist $\int_a^b |\psi(x)|^2 \mathrm{d}x$.

Grundobjekte eines *Quantenwahrscheinlichkeitsraums:*

- Eine C^*-Algebra $\mathcal{A}$ (man denke an $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, die Observablen).
- Eine positive Linearform auf $\mathcal{A}$ mit $\rho(1) = 1$ (man denke an den Erwartungswert $\rho(A) = \langle A\psi|\psi\rangle$).
- Eine Familie $\mathcal{F}$ von idempotenten Elementen von $\mathcal{A}$ (man denke an die Projektionen $F = E_c$; $F^2 = F$).

Die Elemente von $A \in \mathcal{A}$ sind die Zufallsvariablen, $\rho(A)$ deren Erwartungswerte. Die Elemente F von $\mathcal{F}$ sind die Ereignisse, $\rho(F)$ deren Wahrscheinlichkeiten.

Klassische Wahrscheinlichkeit ist ein Spezialfall, nach de Finetti: Man nehme $\mathcal{A} = \mathcal{S}$, $\rho(A) = \mathrm{E}(A)$, F Indikatorfunktionen von Ereignissen.

Aber: Quantenwahrscheinlichkeit ist wesentlich allgemeiner – „Nichtkommuntative Zufallsvariable“sind zugelassen.

Enge Beziehungen zur Theorie der Zufallsmatrizen.

Risikoanalyst*innen, Entscheidungstheoretiker*innen und Quantenphysiker*innen leben in verschiedenen Welten.

In der einen Welt ist Wahrscheinlichkeit eine Eigenschaft der Realität.
In der anderen ist sie ein mentales Konstrukt.
(Übergang von einer Welt zur anderen ist möglich.)

Mathematiker*innen, die sich nicht um die *Semantik der Wahrscheinlichkeit* kümmern, leben in noch einer anderen Welt.
(Und sie versäumen einen faszinierenden historischen Diskurs.)

Vieles wurde nicht gesagt. Der Standpunkt hat schon Konsequenzen.

Zum Beispiel: Konfidenzintervalle und p-Wert-Hypothesentests sind frequentistische Konstrukte. Subjektivistisches Pendant: Glaubwürdigkeitsintervalle, Bayes'sche Hypothesentests.

Literaturhinweise

Einschlägige Fachdidaktikliteratur, die sich mit den drei großen Interpretationen der Wahrscheinlichkeit auseinandersetzt:

Ramesh Kapadia, Manfred Borovcnik: Chance Encounters – Probability in Education. Springer-Science+Business Media 1991

Carmen Batanero, Manfred Borovcnik: Statistics and Probability in High School. Sense Publishers 2016

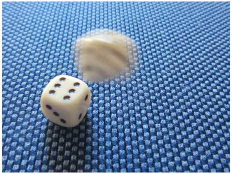
Katja Krüger, Hans-Dieter Sill, Christine Sikora: Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I. Springer Spektrum 2015

Hans-Dieter Sill, Grit Kurtzmann: Didaktik der Stochastik in der Primarstufe. Springer Spektrum 2019

Siehe auch:
Hans Humenberger: Der „empirische Wahrscheinlichkeitsbegriff“– gut gemeint, aber auch wirklich gut? Stochastik in der Schule 30(2010), 1–3

Für den Heimweg

Der offene und der verdeckte Würfel:



Kein Experiment kann uns helfen, wenn uns der Zugang zum verdeckten Würfel entzogen ist. Diese Situation ist aber genau die typische in der Risikoanalyse, der Entscheidungstheorie und den Ingenieurwissenschaften.

Bildernachweise

S. 3: Alissa Eckert, MSMI, Dan Higgins, MAMS https://phil.cdc.gov/Details.aspx?pid=23312

S. 4 oben: Event Horizon Telescope https://www.eso.org/public/images/eso1907a/

S. 4 unten: Paznaunbrücke, Jahresbericht Landesstraßen 2013, Amt der Tiroler Landesregierung
https://www.tirol.gv.at/fileadmin/themen/verkehr/service/downloads/Jahresbericht_Landesstrassen_2013.pdf

S. 5 oben: Würfel
Foto: M. Oberguggenberger

S. 5 unten: Inn am Campus der Universität Innsbruck, Hochwasser August 2005 (Quelle: alpS)
https://www.uibk.ac.at/iup/buch_pdfs/alpine_space_vol.14.pdf

S. 6: Erdverlegte Rohre
Gammel Engineering, https://www.gammel.de/de/lexikon/Fernwarme-Nahwarme/4760?

S. 8: Gedenktafel Bruno de Finetti, Innsbruck, Conradstraße 8
Foto: M. Oberguggenberger

S. 22 oben: Würfel
Foto: M. Oberguggenberger

S. 22 unten: Gemeinschafts-Kraftwerk Inn, Prutz 2016
Foto: M. Oberguggenberger