„Müssen wir das wirklich noch beweisen?“

Sinnstiftende Implementierung von Begründungen im Mathematikunterricht

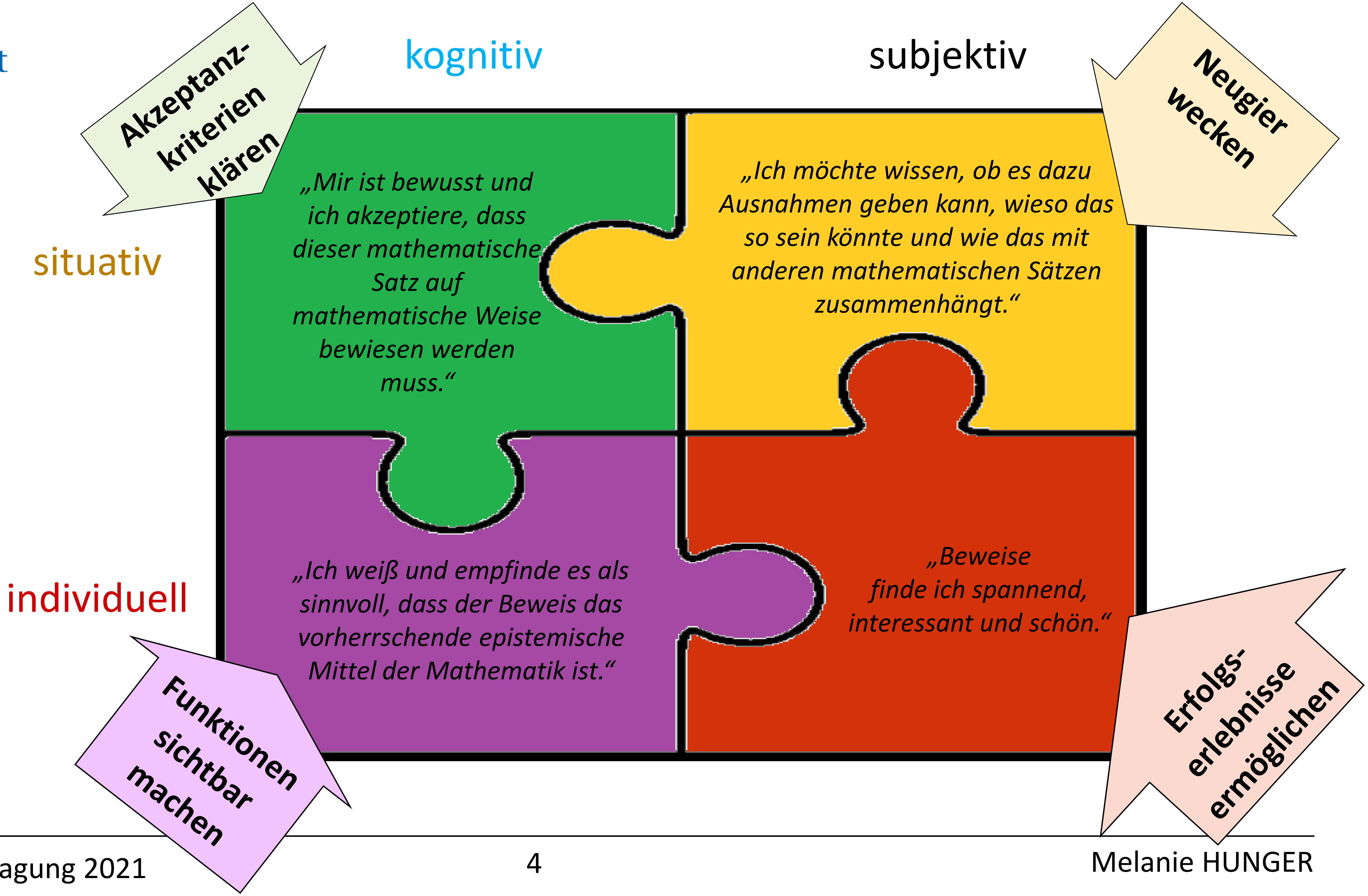
Beweisen – ein motivationales Problem?

- Schüler*innen erkennen oft keinen Sinn in deduktiven Argumentationen.
  (Andelfinger, 1988; Balacheff, 1991)
- Schüler*innen sind sich der Funktionen mathematischer Beweise nicht bewusst.
  (Williams, 1980; Fishbein & Kedem, 1982; Healy & Hoyles, 2000)
- Es gelingt kaum, dass Schüler*innen das Stadium der „naiven Empirist*innen“ hinter sich lassen.
  (Schoenfeld, 1986; Wittmann, 2014; Kunimune, Fujita, & Jones, 2009)
- Auch wenn Schüler*innen formulieren, dass ein mathematischer Beweis notwendig ist, um eine mathematische Aussage zu verifizieren, hat dieser noch keine überzeugende Wirkung auf sie.
  (Coe & Ruthven, 1994)

Beweisen – ein motivationales Problem?

It was important to see that our participants did not perceive proof as completely disconnected from substance. For some of them it clearly was a tool to understand and remember past knowledge, as well as an exercise in logic; it was also related to explaining. They did not think that doing proofs was useless, patronizing, or boring; they did not complain about abstractness; and many said that geometry gave them more of an opportunity to think than algebra (Herbst & Brach, 2006).

BEWEISBEDÜRFNIS



universität wien

Akzeptanz-
kriterien
klären

Was ist ein mathematischer Beweis?

Formalorientierte Normen vermitteln

- Vermittlung von beweisspezifischem Methodenwissen (Heinze & Reiss, 2003)
  - Beweisschema
  - Beweisstruktur
  - Beweiskette

Sozialorientierte Normen erleben

- die Klasse als mathematische Community
- Aushandlungsprozesse
- Erarbeitung von Akzeptanzkriterien
- Annäherung an die gültigen Akzeptanzkriterien der wissenschaftlichen Community (Yackel & Cobb, 1996)

Heinze, A., & Reiss, K. (2003, June). Reasoning and proof: Methodological knowledge as a component of proof competence. In *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Bellaria, Italy*.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Socio-mathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics,. Journal for Research in Mathematics Education, 27(4), S. 458-477.

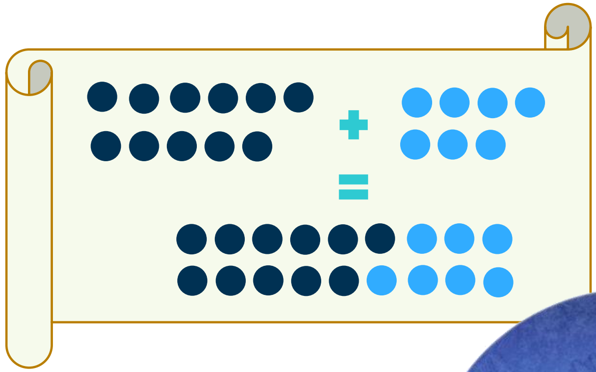
Beweisspezifisches Methodenwissen

Beweisschema (autoritär – empirisch – analytisch)

Wenn man zwei ungerade Zahlen zusammenzählt, kommt immer eine gerade Zahl heraus.

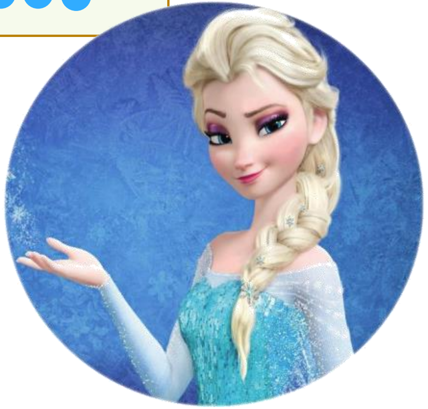
Akzeptanz-kriterien klären

Jede ungerade Zahl hat als Einerstelle 1, 3, 5, 7 oder 9. Wenn man zwei von diesen zusammenzählt, erhält man eine Zahl mit einer geraden Einerstelle.
Pocahontas hat also Recht!



Klar stimmt das.
5 + 9 = 14
13 + 7 =20
21 + 15 = 36
Pocahontas hat Recht!

Pocahontas hat Recht! Mein Vater hat mir das auch einmal erzählt.



Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students’ proof schemes: Results from exploratory studies. CBMS Issues in Mathematics Education, 7, 234–283. (Harel & Sowder, 1998)

Akzeptanz-
kriterien
klären

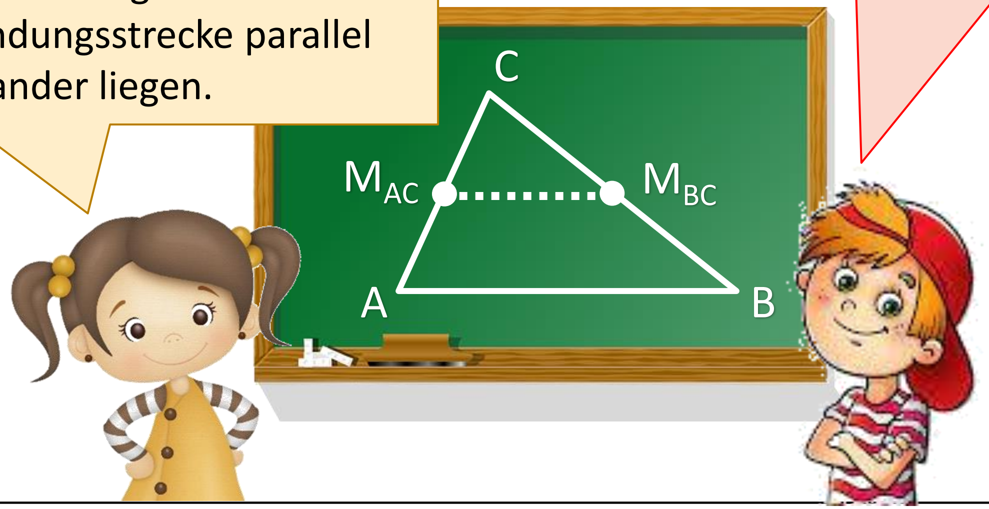
universität wien

Beweisspezifisches Methodenwissen (Beweisstruktur)

Analysiere das Gespräch zwischen Anna und Felix. Was läuft schief?

Bei einem Dreieck *ABC* wurden zwei Seitenmittelpunkte eingezeichnet und verbunden. Wir sollen begründen, dass die Strecken *AB* und diese gestrichelte Verbindungsstrecke parallel zueinander liegen.

Das ist einfach! Das kleine Dreieck mit den Mittelpunkten und *C* ist ähnlich zu dem großen Dreieck *ABC*. Daraus folgt, dass ihre Winkel gleich groß sind. Daher sind die Strecken parallel.



Aber woher können wir wissen, dass die beiden Dreiecke ähnlich sind?

Na wenn die Winkel gleich groß sind, sind die Dreiecke ähnlich.

universität wien

Akzeptanz-kriterien klären

Beweisspezifisches Methodenwissen (Beweiskette)

Wenn ich 17 bin, mache ich den Führerschein.

Wenn ich den Führerschein mache, fahre ich Auto.

Wenn ich Auto fahre, rostet mein Fahrrad.

Wenn ich 17 bin, → mache ich den Führerschein. → Dann fahre ich Auto. → Dann rostet mein Fahrrad.

weil das in Österreich dann erlaubt ist und ich genügend Geld zur Verfügung habe.

weil ich das dann darf und ich mir ein eigenes Auto kaufen kann.

weil ich es dann nicht sauber mache,

Krummheuer, G. (2003). Argumentationsanalyse in der mathematikdidaktischen Unterrichtsforschung. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *35*(6), 247-256.

Bruder R., Grave B., Krüger U.-H. & Meyer, D. (2017) LEMAMOP. Lerngelegenheiten für Mathematisches Argumentieren, Modellieren und Problemlösen

universität wien

Wenn ein Punkt P auf der Streckensymmetrale m einer Strecke AB liegt, dann hat P von A und B den gleichen Abstand.

Akzeptanz-kriterien klären

Wenn m die Streckensymmetrale von AB ist und F der Schnittpunkt von m und AB,

weil eine Streckensymmetrale die Strecke halbiert und normal auf die Strecke steht.

dann ist F gleichweit von A und B entfernt und AB steht normal auf FP

wegen des SWS-Satzes: $|AF|=|BF|$ $|FP|=|FP|$ und $\measuredangle AFP = \measuredangle PFB$

Dann sind die Dreiecke AFP und BFP kongruent.

weil in kongruenten Dreiecken alle Seiten gleich lang sind.

Also gilt $|AP|=|BP|$.

Dann sind die Dreiecke AFP und BFP kongruent.

weil eine Streckensymmetrale die Strecke halbiert und normal auf die Strecke steht.

Also gilt $|AP|=|BP|$.

Wenn m die Streckensymmetrale von AB ist und F der Schnittpunkt von m und AB,

wegen des SWS-Satzes: $|AF|=|BF|$ $|FP|=|FP|$ und $\measuredangle AFP = \measuredangle PFB$

dann ist F gleichweit von A und B entfernt und AB steht normal auf FP

weil in kongruenten Dreiecken alle Seiten gleich lang sind.

BEWEISBEDÜRFNIS

kognitiv

subjektiv

situativ

individuell

Akzeptanz-kriterien klären

„Mir ist bewusst und ich akzeptiere, dass dieser mathematische Satz auf mathematische Weise bewiesen werden muss."

Neugier wecken

„Ich möchte wissen, ob es dazu Ausnahmen geben kann, wieso das so sein könnte und wie das mit anderen mathematischen Sätzen zusammenhängt."

„Ich weiß und empfinde es als sinnvoll, dass der Beweis das vorherrschende epistemische Mittel der Mathematik ist."

Funktionen sichtbar machen

„Beweise finde ich spannend, interessant und schön."

Erfolgs-erlebnisse ermöglichen

Funktionen sichtbar machen

Funktionen von Beweisen

- Verifikation/Überzeugung
- Begründung/Erklärung
- Systematisierung/Entdeckung
- Kommunikation
- Intellektuelle Herausforderung

De Villiers, M. (1990). *The Role and Function of Proof in Mathematics. Pythagoras (24)*, 17-24.

Funktionen sichtbar machen

Verifikation
Beweissprechakte/erdachte Dialoge

Herr OBERSCHLAU und Frau SEKPTISCH diskutieren.

Jede ungerade Zahl lässt sich als Differenz von zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen schreiben!

Bei fünf geht das nicht!

Doch! $5 = 3^2 - 2^2$

Aber bei eins kann es nicht funktionieren!

Hm, da muss ich kurz überlegen! Ich hab‘s: $1 = 1^2 - 0^2$.

Vollrath, H. J. (1969). Dialogisches Lehren von Beweisen. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 33-39.

Wille, A. M. (2009). Selbst erdachte Dialoge. *mathematik lehren*, *156*, 22-26.

universität wien

Funktionen sichtbar machen

Die Basis der Zahlen müssen sich auf das Ergebnis ergänzen

Sicher geht 15 nicht!

Doch: 8^2-7^2

Was ist mit 21

11^2-10^2

Und 33? Geht das?

17^2-16^2

Was ist mit der Zahl 49

25^2-24^2

Kannst du es auch mit 121

61^2-60^2

321

161^2-160^2

6666667

$3333334^2-3333333^2$

469.135.781

$234567891^2-234567890^2$

Du hast Recht HERR OBERSCHLAU!

Natürlich habe ich recht...

...ich habe immer recht

$x^2-y^2=x+y$

$x+y=n$

$x=y+1$

$y+1+y=n$

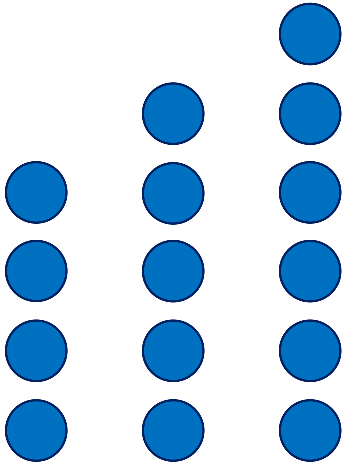
$n=(y+1)^2-y^2$

$2y+1=n$

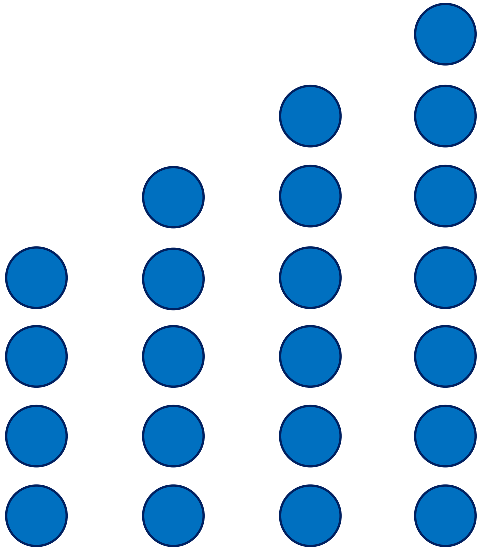
Funktionen sichtbar machen

Erklärung/Begründung
Beweise erklären, WARUM eine Aussage wahr ist.

- Wieso ist die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen immer durch drei teilbar?

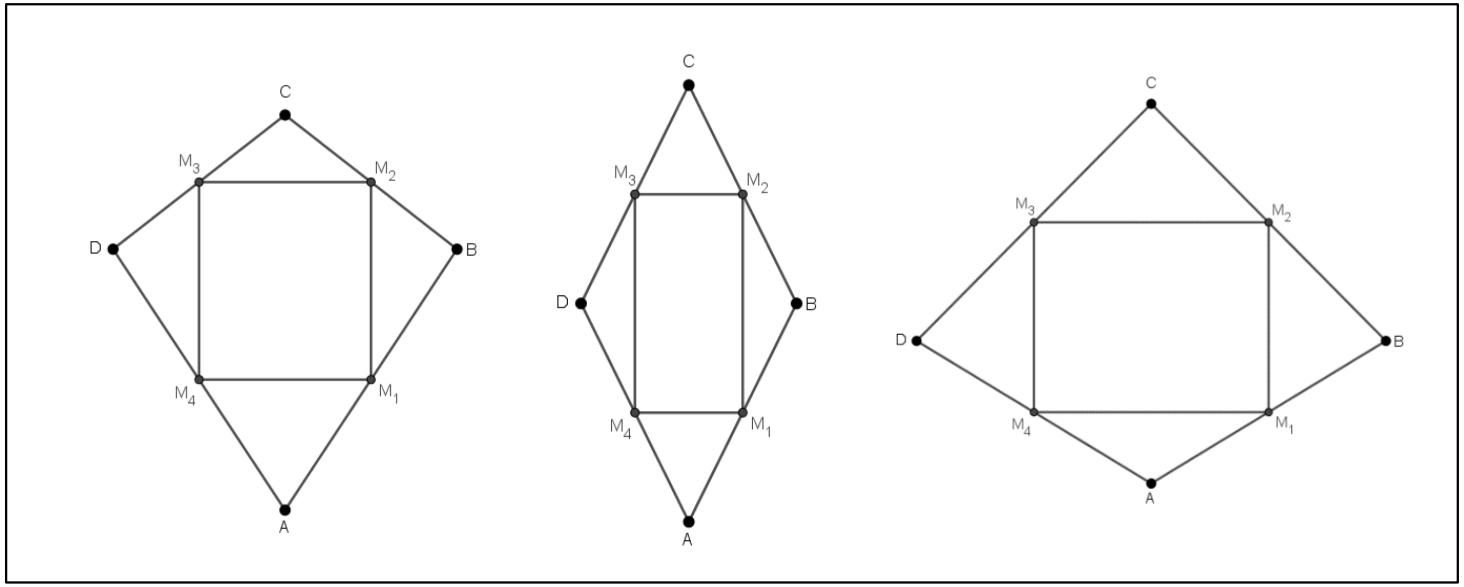


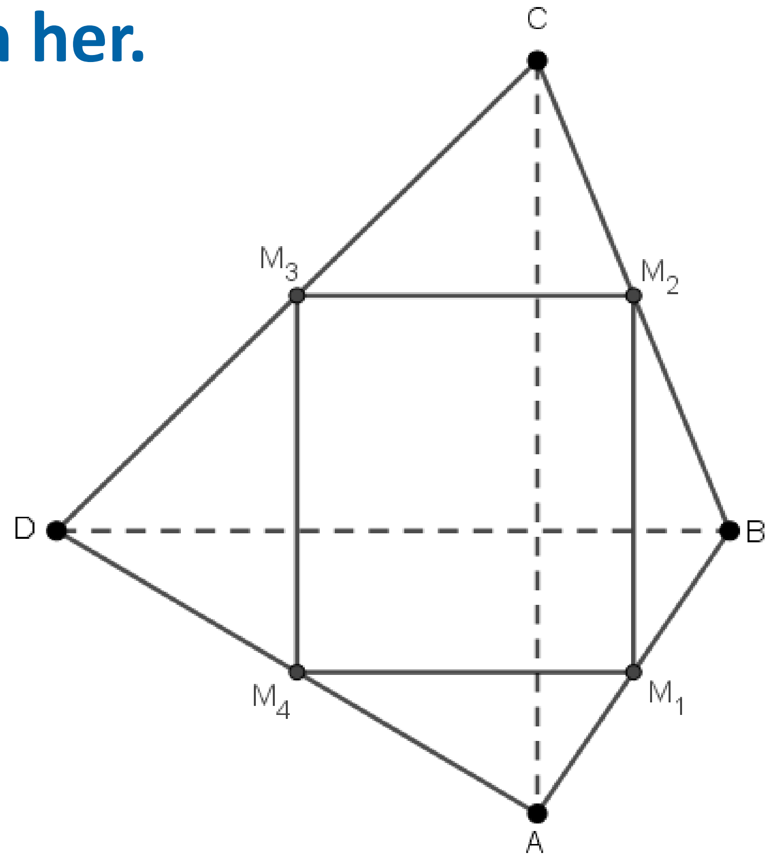
- Wieso ist die Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen nie durch vier teilbar?



Funktionen sichtbar machen

Systematisierung/Entdeckung
Beweise stellen Verbindungen zwischen Aussagen her.





Funktionen sichtbar machen

universität wien

Kommunikation

$$0,\dot{9} = 1$$

DAFÜR	DAGEGEN

irgendwann muss ich ja zu 1 kommen, weil die Zahl 1 ja schon existiert. Irgendwie muss ich dahin kommen

0,0periodisch und hinten eine 1

Periode heißt ja unendlich oft.

Aber es muss ja irgendwas dazwischen sein ... sowas wie 0,00000000irgendwas

So kann man es sagen, weil der Unterschied ist unendlich klein.

Realität ist nicht gleich Mathematik

Auch wenn man den Unterschied nicht messen kann, ist er noch da.

Ist o,9periodisch nicht 1/1 und das wäre 1.

In der Realität könnte man das vernachlässigen, aber nicht in der MAt

1-0,9periodisch ... da rutscht die 1 immer weiter nach hinten, bis in die Unendlichkeit.
daher wird sie unendlich klein.

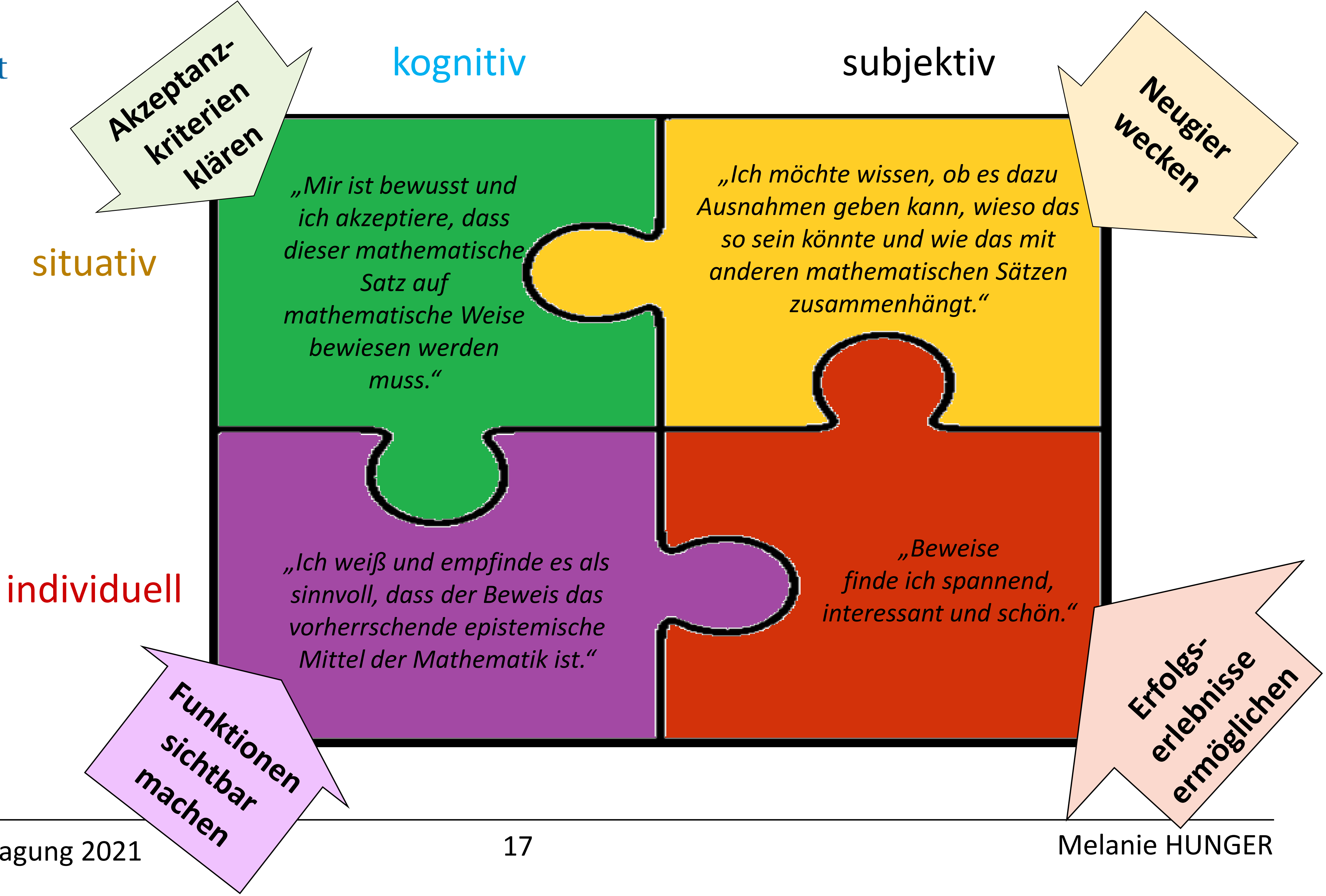
9/9

Da ist aber noch immer ein kleiner Unterschied.

Aber 9,9periodisch ist doch nicht 10.

universität wien

BEWEISBEDÜRFNIS



Neugier wecken

Neugier wecken

- Entdeckendes Lernen
- Kognitiver Konflikt bzw. Unsicherheit
- Rolle der Lehrperson als Vertreter*in der mathematischen Community und ihrer Kultur

Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A. J., Kidron, I., & Winicki-Landman, G. (2011). The Need for Proof and Proving: Mathematical and Pedagogical Perspectives. In H. G., & M. de Villiers (Hrsg.), *Proof and Proving in Mathematics Education, New ICMI Study Series 15* (S. 215–230). Dordrecht: Springer.

Neugier wecken

Endeckendes Lernen

„Es gehört zum Begriff der Neugier, daß man das Verlangen hat, s e l b s t zu erkunden.“

„Das Bemühen um eigenständige Erschließung neuen Wissens und des selbständigen Lösens bietet die Möglichkeit zu intellektuellen und emotionalen Identifikationen(…).“

„We should provide the classroom with a situation for validation oriented toward the construction of a proof of the conjecture. That supposes a didactical contract in which the pupils have the responsibility for the truth of the conjecture. This is possible only if they have or had the responsibility for forming the statement of the conjecture itself.“

Winter, H. (1983). Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. *Journal für Mathematik-Didaktik, 4(1)*, 59-95.

Winter, H. (2016). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik. 3., aktualisierte Aufl.* Wiesbaden: Springer.

Balacheff, N. (1990). Towards a Problématique for Research on Mathematics Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*, S. 258-272.

Neugier wecken

Kognitiver Konflikt
Ist das Zufall?

Ein Aufgabentyp, der

- die Beziehung zwischen Beispielen und Allgemeingültigkeit einbezieht,
- Lernende mit einem Phänomen durch ein Beispiel konfrontiert und
- sie dazu auffordert zu entscheiden, ob dieser Sachverhalt ein Zufall war,
- Unsicherheit bzw. extreme Überzeugtheit hervorruft und daher
- das Potential hat, Beweisbedürfnis zu wecken.

Buchbinder, O., & Zaslavsky, O. (2011). Is this a coincidence? The role of examples in fostering. *ZDM Mathematics Education, 43(2)*, 269–281.

Macht das wirklich einen Unterschied?

6 Klassen (123 Schüler*innen, 121 auswertbar)

Thema:

Hat eine quadratische Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ die Lösungen x_1 und x_2, dann gilt immer:

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

3 Gruppen in jeder Klasse

- apodiktisch
- entdeckend
- Ist das Zufall?

Neugier wecken

Verifikationsbedürfnis

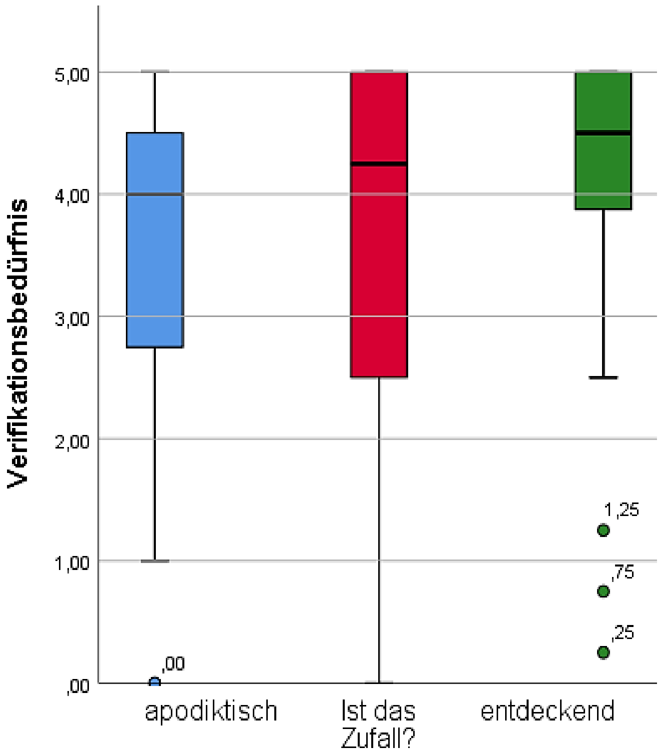
„Ich möchte gern wissen, ob da wirklich immer q rauskommt."

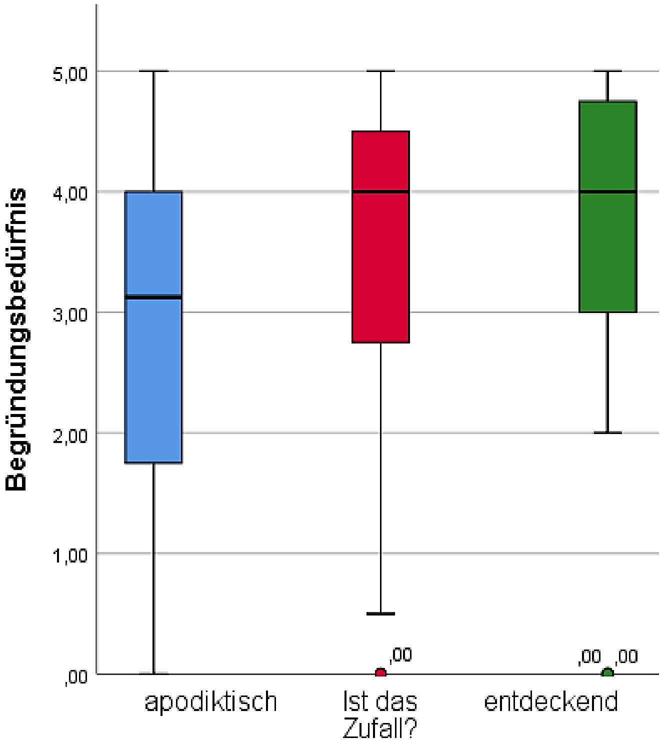
Begründungsbedürfnis

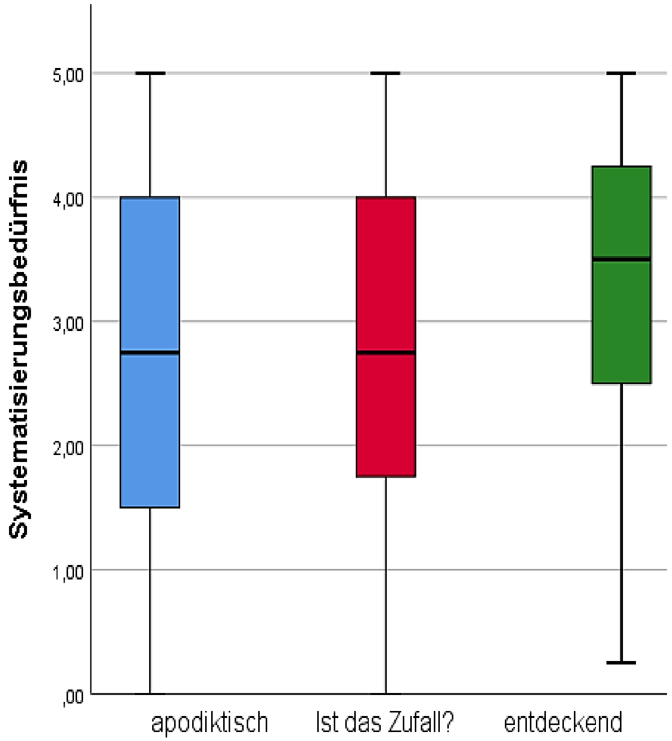
„Ich hätte sehr gerne eine Erklärung dafür, wieso das stimmen sollte."

Systematisierungsbedürfnis

„Ich würde gerne wissen, wie das mit anderen mathematischen Aussagen zusammenhängt."







universität wien

BEWEISBEDÜRFNIS

kognitiv

subjektiv

situativ

individuell

Akzeptanz-kriterien klären

„Mir ist bewusst und ich akzeptiere, dass dieser mathematische Satz auf mathematische Weise bewiesen werden muss.“

Neugier wecken

„Ich möchte wissen, ob es dazu Ausnahmen geben kann, wieso das so sein könnte und wie das mit anderen mathematischen Sätzen zusammenhängt.“

„Ich weiß und empfinde es als sinnvoll, dass der Beweis das vorherrschende epistemische Mittel der Mathematik ist.“

Funktionen sichtbar machen

„Beweise finde ich spannend, interessant und schön.“

Erfolgs-erlebnisse ermöglichen

Erfolgs-
erlebnisse
ermöglichen

Beweiskompetenz aufbauen

- **Einschrittige Beweise**
  - Beweise durch Beispiele
  - Beweise durch Gegenbeispiele
  - Beweise durch Rückgriff auf Definitionen/Satz
- **Arbeit an mehrschrittigen Beweisen**
  - Beweise bekommen Worte
  - Lücken schließen
  - Tabelle ergänzen
- **Mehrschrittige Beweise selbst erarbeiten**
  - Problemlöseprozess → Strategien explizit machen

Erfolgs-
erlebnisse
ermöglichen

Einschrittige Beweise

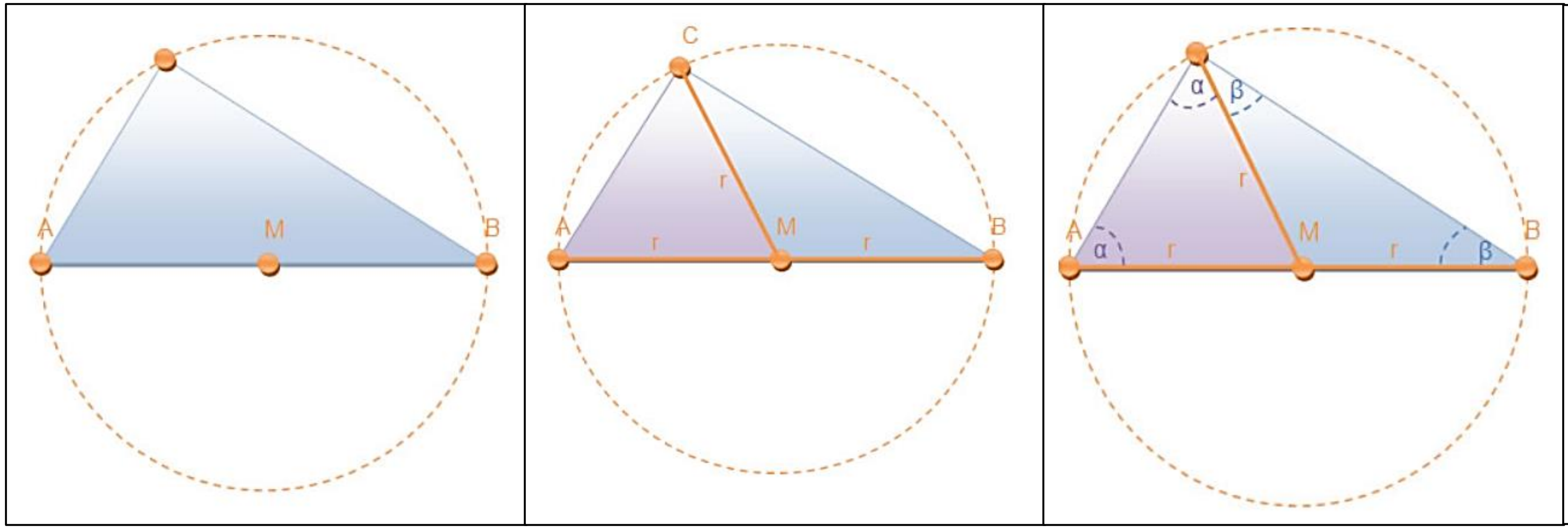
Entscheide mit welchem Begründungstyp (Beispiel, Gegenbeispiel oder Rückgriff auf Definition/Satz) man einen sinnvolle Begründung für die Behauptungen finden kann. Gib eine eigene Begründung für oder gegen die Behauptung sowie den Begründungstyp an.

(a) Jede natürliche Zahl ist durch 2 teilbar.
(b) Jedes Parallelogramm ist ein Trapez.
(c) Es gibt Dreiecke mit genau einer Symmetrieachse.

Bruder R., Grave B., Krüger U.-H. & Meyer, D. (2017) LEMAMOP. Lerngelegenheiten für Mathematisches Argumentieren, Modellieren und Problemlösen

Erfolgs-
erlebnisse
ermöglichen

Arbeit an mehrschrittigen Beweisen (Beweise bekommen Worte 1)



$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180°$$

$$2 \cdot (\alpha + \beta) = 180°$$

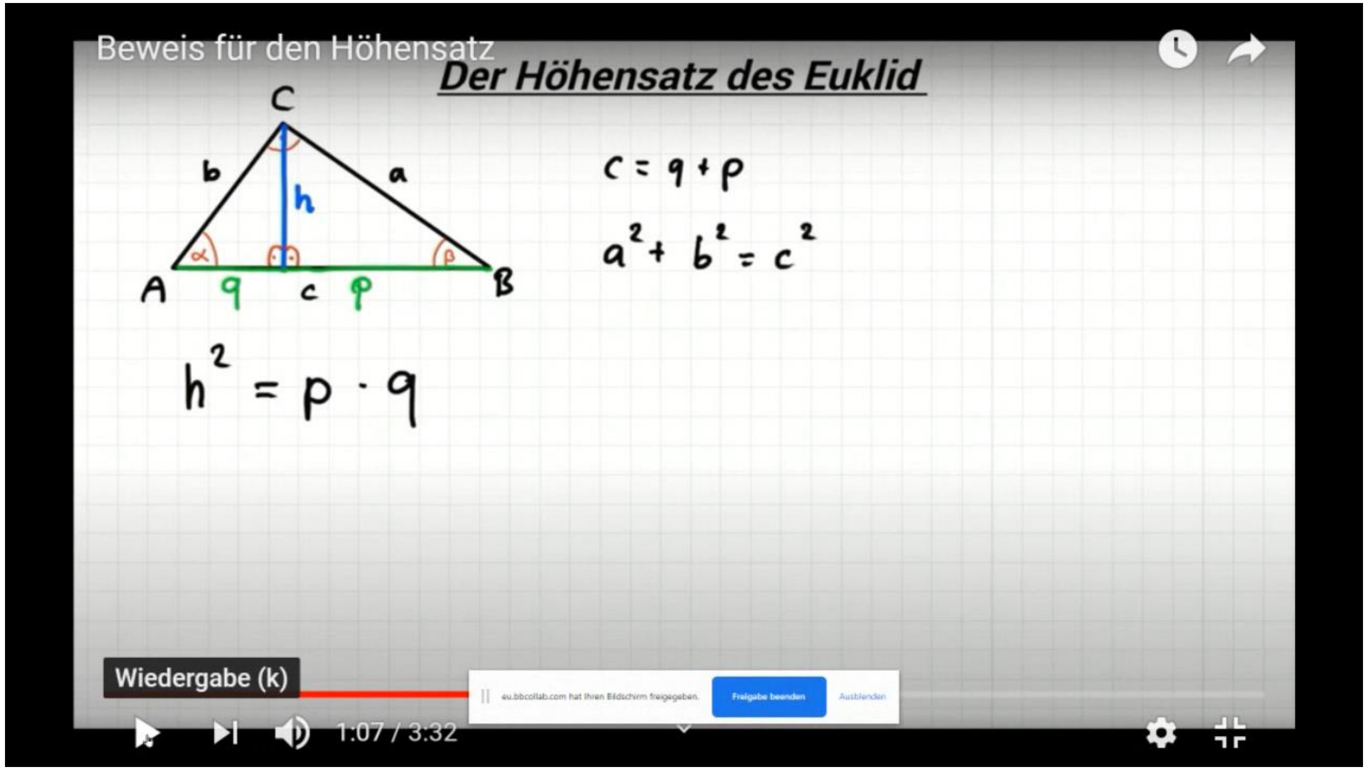
$$(\alpha + \beta) = 90°$$

$$\gamma = 90°$$

Literaturhinweis: Nelsen, R. B. (2016) *Beweise Ohne Worte*. Berlin, Heidelberg: Springer

Erfolgs-
erlebnisse
ermöglichen

Arbeit an mehrschrittigen Beweisen (Beweise bekommen Worte 2)



**Erfolgs-
erlebnisse
ermöglichen**

universität
wien

Arbeit an mehrschrittigen Beweisen (Lücken schließen)

Aussage:

„Die Diagonalen jedes Deltoids stehen normal aufeinander."

Beweis

Wir wissen, dass a gleich lang ist wie d und b gleich lang ist wie c, weil ein Deltoid ein Viereck mit zwei Paar gleich langen Nachbarseiten ist.
Daraus folgt, dass das Dreieck ABC und das Dreieck ADC kongruent sind, weil sie drei gleich lange Seiten haben (SSS-Satz).
Also ist auch der Winkel $\measuredangle CAB$ gleich groß wie der Winkel $\measuredangle CAD$, weil kongruente Dreiecke, gleiche Winkel haben.
Also wissen wir jetzt auch, dass das Dreieck ABE und das Dreieck ADE kongruent sind, weil

____

____

____

____

Nun können wir guten Gewissens behaupten, dass die Winkel $\measuredangle AEB$ und $\measuredangle AED$ gleich groß sind, weil

____

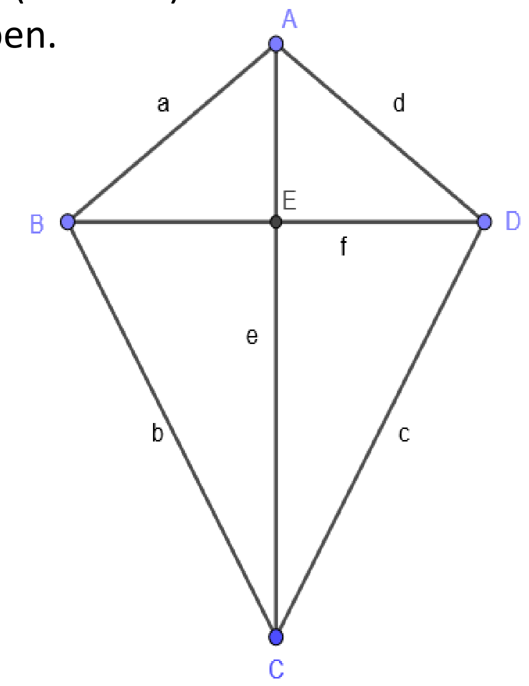
Wir wissen auch, dass $\measuredangle AEB + \measuredangle AED = 180°$, weil BD eine Diagonale, also eine Strecke ist.
Daraus folgt bereits, dass die Diagonalen e und f aufeinander normal stehen, weil

____

____

____.

Damit ist die Aussage bewiesen. 😊



Erfolgs-erlebnisse ermöglichen

universität wien

Arbeit an mehrschrittigen Beweisen (Tabelle ergänzen)

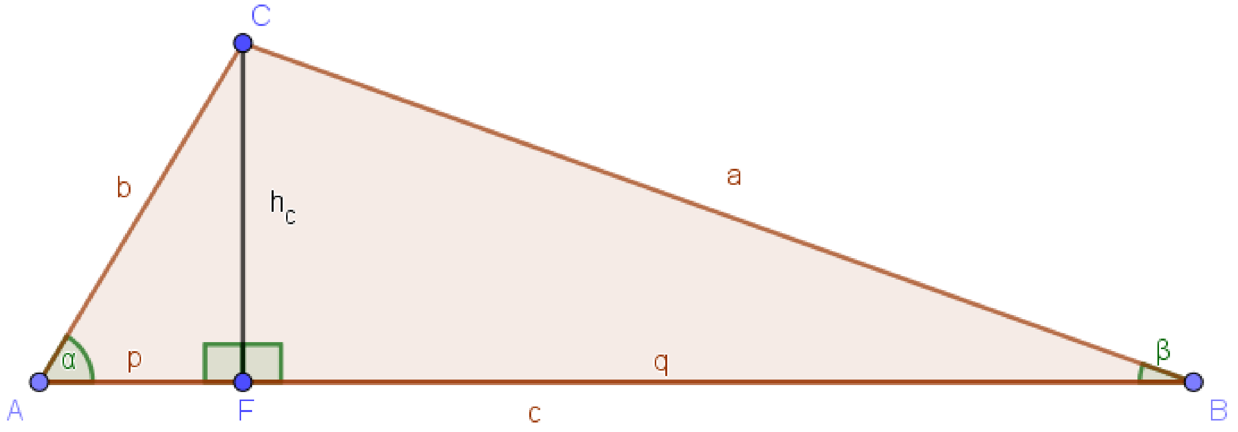
Wir wollen den **Kosinussatz** herleiten. Er lautet:

In jedem Dreieck mit den Seiten a, b und c gilt $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$.

Gegeben ist ein allgemeines Dreieck ABC. Die Höhe auf die Seite c bezeichnen wir mit h_c. Der Fußpunkt dieser Höhe soll F heißen. Die zwei Abschnitte der Seite c, die durch den Punkt F getrennt werden, heißen p und q.

Ergänze die Tabelle mit Begründungen zu den einzelnen Beweisschritten!

Schritt	Wir wissen, dass…	weil, …
1	$a^2 = h_c^2 + q^2$	
2	$h_c^2 = b^2 - p^2$	
3	$q = c - p$	
4	$a^2 = b^2 - p^2 + (c-p)^2$	
5	$a^2 = b^2 - p^2 + c^2 - 2cp + p^2$	
6	$a^2 = b^2 + c^2 - 2cp$	
7	$p = b \cdot \cos(\alpha)$	
8	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$	



Erfolgs-
erlebnisse
ermöglichen

Mehrschrittige Beweise selbst erarbeiten
Beweisen als Problemlöseprozess

Phasenmodell (Bruder, 2011) zur Erarbeitung von Heuristiken:

- **Gewöhnen** an heuristische Methoden oder Techniken durch Reflexion im Anschluss an eine Aufgabenlösung: *Was hat uns geholfen, die Aufgabe zu lösen?*
- **Bewusstmachen** einer speziellen Methode oder Technik anhand eines markanten Beispiels
- Bewusste **Übungsphasen** mit Aufgaben unterschiedlicher Schwierigkeit zur selbstständigen Bearbeitung
- Beispiele aus anderen mathematischen Gebieten suchen, bei denen die neue Strategie auch Anwendung finden kann (**Kontexterweiterung** der Strategieanwendung)

Bruder, R. (2011). *Problemlösen kann man im Mathematikunterricht lernen – aber wie?* Vortrag an der Universität Wien am 9. Mai 2011.
Abgerufen am 10.11.2020 unter http://www.math-learning.com/ files/110509w.pdf

Erfolgs-
erlebnisse
ermöglichen

Heuristiken

- zusätzliche Informationen in Figuren einzeichnen
- ähnliche/kongruente Dreiecke suchen
- rechtwinklige Dreiecke suchen
- mit Punktmustern arbeiten
- Zahlen mithilfe von Variablen und Zehnerpotenzen darstellen
- etc.

Erfolgs-
erlebnisse
ermöglichen

Heuristik: gerade und ungerade Zahlen algebraisch darstellen

$g = 2n \qquad u = 2m - 1 \qquad$ für $m, n \in \mathbb{N}$

Das Produkt aus zwei ungeraden Zahlen ist ungerade.

Das Produkt aus zwei geraden Zahlen ist ein Vielfaches von vier.

Das Quadrat einer ungeraden Zahl ist wieder ungerade.

Das Quadrat einer geraden Zahl ist ein Vielfaches von vier.

Das Produkt aus zwei geraden Zahlen ist ein Vielfaches von vier.

Das Produkt von zwei aufeinanderfolgenden geraden Zahlen ist ein Vielfaches von 8.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Literatur

- Andelfinger, B. (1988). Geometrie. In Didaktischer Informationsdienst Mathematik. Landesinstitut für Schule und Weiterbildung: Soest.
- Balacheff, N. (1990). Towards a Problématique for Research on Mathematics Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*, S. 258-272.
- Balacheff, N. (1991). Benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. In A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. Dormolen van (Hrsg.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching,* (S. 175-192). Kluwer Academic Publishers.
- Bruder, R. (2011). *Problemlösen kann man im Mathematikunterricht lernen – aber wie?* Vortrag an der Universität Wien am 9. Mai 2011. Abgerufen am 10.11.2020 unter http://www.math-learning.com/ files/110509w.pdf
- Bruder R., Grave B., Krüger U.-H. & Meyer, D. (2017) LEMAMOP. Lerngelegenheiten für Mathematisches Argumentieren, Modellieren und Problemlösen.
- Buchbinder, O., & Zaslavsky, O. (2011). Is this a coincidence? The role of examples in fostering. ZDM Mathematics Education, 43(2), 269–281.
- Coe, R., & Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. British Educational Research Journal, 20, S. 41-53.
- De Villiers, M. (1990). The Role and Function of Proof in Mathematics. Pythagoras (24), 17-24.
- Fischbein, K., & Kedem, I. (1982). Proof and certitude in development of mathematical thinking. In A. Vermandel (Hrsg.), Proceedings of the 6th PME Conference. (S. 128-132). Antwerpen.
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. CBMS Issues in Mathematics Education, 7, 234–283. (Harel & Sowder, 1998)
- Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra. Journal for Research in Mathematics Education, 31 (4), 396-428.
- Heinze, A., & Reiss, K. (2003, June). Reasoning and proof: Methodological knowledge as a component of proof competence. In Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Bellaria, Italy.
- Herbst, P., & Brach, C. (2006). Proving and Doing Proofs in High School Geometry Classes: What Is It That Is Going on for Students? Cognition and Instruction, 24 (1), S. 73-122.
- Krummheuer, G. (2003). Argumentationsanalyse in der mathematikdidaktischen Unterrichtsforschung. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 35(6), 247-256.
- Kunimune, S., Fujita, T., & Jones, K. (2009). "Why do we have to prove this?" Fostering Student' Understanding of "Proof" in Geometry in lower secundary School. In L. F., F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villier (Hrsg.), Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education. Volume 1. (S. 256-261).
- Nelsen, R. B. (2016) Beweise Ohne Worte. Berlin, Heidelberg: Springer
- Schoenfeld, A. (1986). On having and using geometric knowledge. In J. Hiebert (Hrsg.), Conceptual and procedural Knowledge: The Case of mathematics. (S. 225–263.). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Stein, M. (1999). Elementare Bausteine der Problemlösefähigkeit: logisches Denken und Argumentieren. Journal für Mathematik-Didaktik, 20, S. 3-27.
- Vollrath, H. J. (1969). Dialogisches Lehren von Beweisen. Beiträge zum Mathematikunterricht, 33-39.
- Wille, A. M. (2009). Selbst erdachte Dialoge. mathematik lehren, 156, 22-26.
- Williams, E. (1980). An investigation of senior high school students' understanding of the nature of mathematical proof. Journal for Research in Mathematics Education, 11 (3), S. 165-166.
- Winter, H. (1983). Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. Journal für Mathematik-Didaktik, 4(1), 59-95.
- Winter, H. (2016). Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik. 3., aktualisierte Aufl. Wiesbaden: Springer.
- Wittmann, G. (2014). Beweisen und Argumentieren. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, . . . G. Wittmann, & F. Padberg (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe 1.* (2. verbesserte Aufl., S. 35-54). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Socio-mathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics,. *Journal for Research in Mathematics Education, 27(4)*, S. 458-477.
- Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A. J., Kidron, I., & Winicki-Landman, G. (2011). The Need for Proof and Proving: Mathematical and Pedagogical Perspectives. In H. G., & M. de Villiers (Hrsg.), *Proof and Proving in Mathematics Education, New ICMI Study Series 15* (S. 215–230). Dordrecht: Springer.