Schaltalgebra

Franz Pauer, Florian Stampfer

Institut für Fachdidaktik
und
Institut für Mathematik

Universität Innsbruck

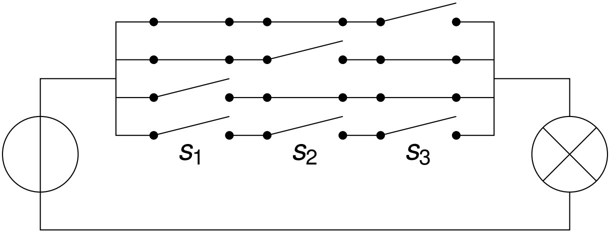
Lehrer/innen/fortbildungstag Wien 2019
26. April 2019

Eine Lampe mit drei Schaltern

- Die Lampe eines Stiegenhauses kann von Schaltern im Keller, im Erdgeschoß und im ersten Stock bedient werden.
- Man möchte haben, dass sich bei jedem Druck auf einen der drei Schalter der Zustand der Lampe (leuchtet oder leuchtet nicht) ändert.
- Wie müssen die Leitungen zwischen den Schaltern und der Lampe verlegt werden, um das zu erreichen?

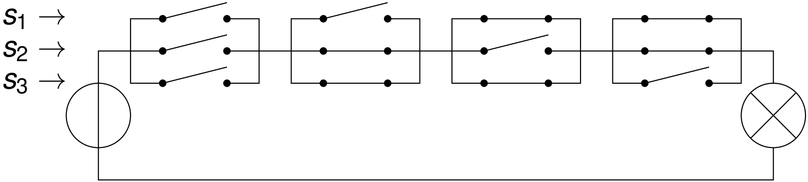
Eine Lampe mit drei Schaltern

Eine Lösung:



Eine Lampe mit drei Schaltern

Eine andere Lösung:



Beschreibung dessen, was man will: Schaltfunktion

- Für jeden Schalter gibt es zwei Positionen: 0 und 1.
- Es gibt zwei Zustände der Lampe:
  1 (Licht leuchtet) und 0 (Licht leuchtet nicht).
- $\mathbb{Z}_2 := \{0, 1\}$
- Menge aller möglichen Positionen der drei Schalter:
  $\mathbb{Z}_2^3 := \{0, 1\}^3$
  (dazu zuerst Reihenfolge der Schalter festlegen und Bezeichnung der Position wählen)
- Es gibt 8 verschiedene Positionen der drei Schalter.
- $(0, 1, 1)$ beschreibt:
  Schalter 1 in Position 0, Schalter 2 und 3 in Position 1.

Beschreibung dessen, was man will: Schaltfunktion

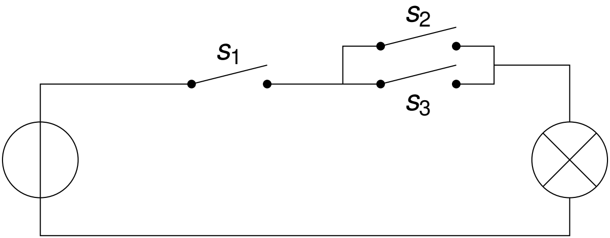
- Beschreibung des Zusammenhangs zwischen der Menge der Schalterpositionen und der Menge der Zustände der Lampe:
  Schaltfunktion $f : \mathbb{Z}_2^3 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ mit $f(x_1, x_2, x_3) :=$ Zustand der Lampe, wenn die drei Schalter in Position (x_1, x_2, x_3) sind.

- Darstellung durch eine Tabelle:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Einfach: Von der Schaltung zur Schaltfunktion

Ist eine Schaltung gegeben, kann die Schaltfunktion daraus leicht ermittelt werden.
Die Schaltfunktion der Schaltung



ist $g : \mathbb{Z}_2^3 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ mit $g(x_1, x_2, x_3) :=$ Zustand der Lampe, wenn die drei Schalter in Position (x_1, x_2, x_3) sind.

Einfach: Von der Schaltung zur Schaltfunktion

Darstellung der Schaltfunktion $g : \mathbb{Z}_2^3 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ durch ihren Graphen (eine Tabelle):

x_1	x_2	x_3	$g(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Graph einer Funktion $h : D \longrightarrow W$:

$$\{\, (d, h(d)) \mid d \in D \,\} \subseteq D \times W$$

Schwieriger: Von der Schaltfunktion zur Schaltung

- Strategie: Finde zuerst Schaltungen für „einfache“ Schaltfunktionen und „baue dann damit die gesuchte Schaltung zusammen“.
- Strategie bereits in den folgenden Fällen erfolgreich verwendet:
  - Lösen ganzzahliger linearer Gleichungen $ax + by = c$ (erweiterter Euklidischer Algorithmus)
    Löse zuerst (durch „Hinschauen“) die ganzzahligen linearen Gleichungen
    $ax + by = a$ und
    $ax + by = b$,
    dann
    $ax + by = a - mb$ usw. ... bis $ax + by = \text{ggT}(a, b)$
  - Interpolation nach Lagrange

Exkurs: Lagrange-Interpolation

- Gegeben: $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden,
  $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.
  Gesucht: eine reelle Polynomfunktion f mit $grad(f) \leq n$ und der Eigenschaft $f(x_i) = y_i \ , \quad 0 \leq i \leq n$.
- Aufgabe leicht lösbar, wenn fast alle $y_j = 0$ sind und nur $y_i = 1$ ist.
- In diesem Fall: eindeutig bestimmte Lösung

$$f_i \text{ mit } f_i(x) := \prod_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j} \cdot (x - x_j)$$

Exkurs: Rechnen mit Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$

Mit Funktionen kann man rechnen, wenn man in ihrem Bildbereich (hier: $\mathbb{R}$) rechnen kann.
u, v Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$

- Addition: $u + v$ ist die Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit
  $(u + v)(x) := u(x) + v(x)$
  Dabei ist $u(x) + v(x)$ die Summe in $\mathbb{R}$.
- Multiplikation: $u \cdot v$ ist die Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit
  $(u \cdot v)(x) := u(x) \cdot v(x)$
  Dabei ist $u(x) \cdot v(x)$ das Produkt in $\mathbb{R}$.
- Es gelten die gleichen Rechenregeln wie für ganze Zahlen (Assoziativgesetze, Distributivgesetze, $\ldots$).
- cf. Summen- und Produktregel der Differentialrechnung, Summen von Zufallsvariablen, $\ldots$
- Mit c bezeichnen wir nicht nur das Element $c \in \mathbb{R}$, sondern auch die konstante Funktion c von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$:

Exkurs: Lagrange-Interpolation

- Gegeben: $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden, $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.
  Gesucht: eine reelle Polynomfunktion f mit $grad(f) \leq n$ und der Eigenschaft $f(x_i) = y_i \;, \quad 0 \leq i \leq n \;.$

- Lösung, wenn fast alle $y_j = 0$ sind und nur $y_i = 1$ ist:

$$f_i \text{ mit } f_i(x) := \prod_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j} \cdot (x - x_j)$$

- Dann ist $y_i \cdot f_i$ eine Lösung für: fast alle $y_j = 0$ und y_i beliebig.

- Die Summe der Funktionen $f := y_1 \cdot f_1 + y_2 \cdot f_2 + \ldots + y_n \cdot f_n$ ist die Lösung der ursprünglichen Interpolationsaufgabe, denn:

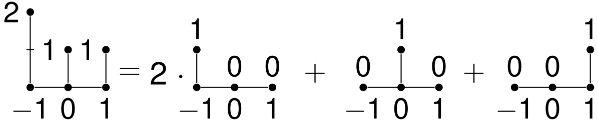
$$(y_1 \cdot f_1 + \ldots + y_n \cdot f_n)(x_i) = (y_1 \cdot f_1)(x_i) + \cdots + (y_n \cdot f_n)(x_i) = y_i.$$

Exkurs: Lagrange-Interpolation

Beispiel:

- Es sei $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $y_0 = 2$, $y_1 = 1$, $y_2 = 1$.

- Interpolation nach Lagrange:



-

$$f_0(x) = \frac{1}{2}x(x-1) \quad f_1(x) = -(x+1)(x-1) \quad f_2(x) = \frac{1}{2}x(x+1)$$

$$f = 2f_0 + f_1 + f_3, \text{ also } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$$

Exkurs: Lagrange-Interpolation und (künstliche ?) „Intelligenz“

- So kann ein Computer das „Zahlenreihen fortsetzen“ in diversen „Intelligenz-“ oder Zulassungstests lösen:
- $x_0 = 0, x_1 = 1, \ldots, x_n = n$,
  $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ vorgegeben.
- Berechne wie oben eine reelle Polynomfunktion f mit $grad(f) \leq n$ und der Eigenschaft $f(i) = y_i \;, \quad 0 \leq i \leq n \,.$
- Setze $y_0, \ldots, y_n$ mit $f(n+1)$ fort.
- Häufig Vorgabe: für das Bildungsgesetz dürfen nur Addition und Multiplikation verwendet werden (f Polynomfunktion!) Ohne Bedingung an den Grad von f gibt es aber unendlich viele mögliche „Bildungsgesetze“.

Rechnen in $\mathbb{Z}_2$

- Addition: $0 + 0 := 0, \;\; 0 + 1 := 1, \;\; 1 + 0 := 1, \;\; 1 + 1 := 0$
- Multiplikation: $0 \cdot 0 := 0, \;\; 0 \cdot 1 := 0, \;\; 1 \cdot 0 := 0, \;\; 1 \cdot 1 := 1$
- Es gelten die gleichen Rechenregeln wie für reelle Zahlen (Assoziativgesetze, Distributivgesetze, ...).

- Bei jeder Änderung von einer der drei Schalterpositionen ändert sich der Zustand der Lampe.
- Also kann f zum Beispiel durch $f(x_1, x_2, x_3) := x_1 + x_2 + x_3$ beschrieben werden.
- Dann ist $f(1, 1, 0) = 1 + 1 + 0 = 0$ und $f(0, 1, 0) = 0 + 1 + 0 = 1$

Die einfachen Fälle: Serienschaltung

- Die 8 Schaltfunktionen $f_{000}, f_{001}, f_{010}, \ldots, f_{111}$ von $\mathbb{Z}_2^3$ nach $\mathbb{Z}_2$ mit

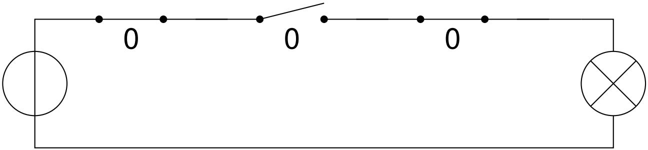
$$\begin{aligned}
&f_{000}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1),\\
&f_{001}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3),\\
&f_{010}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 1)x_2(x_3 + 1),\\
&\ldots,\\
&f_{111}(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3
\end{aligned}$$

  haben an einer einzigen Stelle den Funktionswert 1 und an allen (sieben) anderen Stellen den Funktionswert 0.
- Die Tabelle von f_{010} ist

x_1	x_2	x_3	$f_{010}(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0

Die einfachen Fälle: Serienschaltung

- Bei der Schaltfunktion f_{010} darf die Lampe nur dann leuchten, wenn die Schalter in den Positionen $0, 1, 0$ sind. Die entsprechende Schaltung ist die Serienschaltung der drei Schalter, wobei durch den ersten bzw. zweiten bzw. dritten Strom fließt, wenn er in Position 0 bzw. 1 bzw. 0 ist.
- Bild:



Rechnen mit Funktionen von $\mathbb{Z}_2^3$ nach $\mathbb{Z}_2$

Mit Funktionen kann man rechnen, wenn man in ihrem Bildbereich (hier: $\mathbb{Z}_2$) rechnen kann.
u, v Funktionen von $\mathbb{Z}_2^3$ nach $\mathbb{Z}_2$

- Addition: $u + v$ ist die Funktion von $\mathbb{Z}_2^3$ nach $\mathbb{Z}_2$ mit
  $(u + v)(x) := u(x) + v(x)$
  Dabei ist $u(x) + v(x)$ die Summe in $\mathbb{Z}_2$.

- Multiplikation: $u \cdot v$ ist die Funktion von $\mathbb{Z}_2^3$ nach $\mathbb{Z}_2$ mit
  $(u \cdot v)(x) := u(x) \cdot v(x)$
  Dabei ist $u(x) \cdot v(x)$ das Produkt in $\mathbb{Z}_2$.

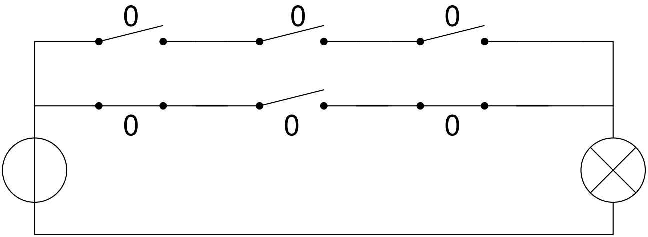
- Es gelten die gleichen Rechenregeln wie für ganze Zahlen (Assoziativgesetze, Distributivgesetze, $\ldots$).

Rechnen mit Funktionen von $\mathbb{Z}_2^3$ nach $\mathbb{Z}_2$

- Mit p_i bezeichnen wir die i-te Projektion von $\mathbb{Z}_2^3$ nach $\mathbb{Z}_2$: $p_i(x_1, x_2, x_3) := x_i$ ($i = 1, 2$ oder 3).
- Mit 1 bezeichnen wir nicht nur das Element $1 \in \mathbb{Z}_2$, sondern auch die konstante Funktion 1 von $\mathbb{Z}_2^3$ nach $\mathbb{Z}_2$: $1(x_1, x_2, x_3) := 1$.
- Dann ist f mit $f(x_1, x_2, x_3) := x_1 + x_2 + x_3$ die Summe der 3 Projektionen: $f = p_1 + p_2 + p_3$.
- $f_{111} = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ und $f_{010} = (p_1 + 1) \cdot p_2 \cdot (p_3 + 1)$
- g wie oben:
  $g = p_1 \cdot (p_2 + p_3 + p_2 \cdot p_3) = p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$,
  also $g(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_2 x_3$.

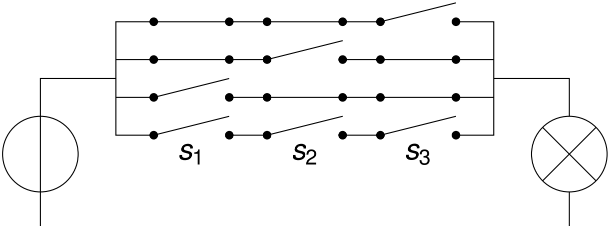
Zusammenbau: Parallelschaltung von Serienschaltungen

- Bei der Schaltfunktion $f_{010} + f_{111}$ leuchtet die Lampe genau dann, wenn die Schalter in den Positionen $0, 1, 0$ oder $1, 1, 1$ sind. Die entsprechende Schaltung ist die Parallelschaltung der zwei Serienschaltungen der drei Schalter, wobei durch den ersten bzw. zweiten bzw. dritten Strom fließt, wenn er in Position 0 bzw. 1 bzw. 0 ist.
- Bild:



Zusammenbau: Parallelschaltung von Serienschaltungen

- $$p_1 + p_2 + p_3 = f =$$
$$= f(0,0,0)f_{000} + f(0,0,1)f_{001} + f(0,1,0)f_{010} + \cdots + f(1,1,1)f_{111} =$$
$$= \sum_{x \in \mathbb{Z}_2^3} f(x) f_x = \sum_{x \in \mathbb{Z}_2^3,\ f(x)=1} f_x =$$
$$= f_{001} + f_{010} + f_{001} + f_{111} =$$
$$= (p_1+1)\cdot(p_2+1)\cdot p_3 + (p_1+1)\cdot p_2 \cdot (p_3+1) + p_1 \cdot (p_2+1)\cdot(p_3+1) + p_1 \cdot p$$
- Bild:



Von der Schaltfunktion zur Schaltung

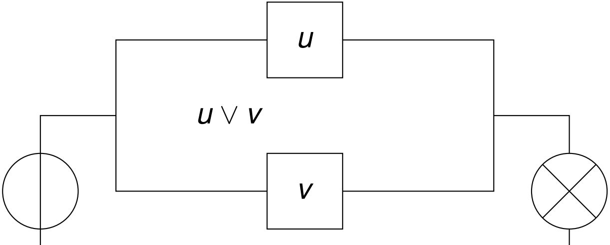
u, v Funktionen von $\mathbb{Z}_2^3$ nach $\mathbb{Z}_2$

- Schreibweise:

$$u \wedge v := u \cdot v, \quad \neg u := u + 1, \quad u \vee v := u + v + u \cdot v$$

- Ist $u \cdot v = 0$, z.B. wenn $u = f_x,\ v = f_y$ mit $x \neq y \in \mathbb{Z}_2^3$, dann ist $u \vee v := u + v$.

- Sind u und v zwei Schaltfunktionen für Schaltungen mit denselben Schaltern, dann ist $u \wedge v$ die Schaltfunktion der Serienschaltung und $u \vee v$ die Schaltfunktion der Parallelschaltung dieser zwei Schaltungen.



Von der Schaltfunktion zur Schaltung

- In dieser Schreibweise ist

$$p_1 + p_2 + p_3 = f =$$

$$= (p_1+1)\cdot(p_2+1)\cdot p_3+(p_1+1)\cdot p_2\cdot(p_3+1)+p_1\cdot(p_2+1)\cdot(p_3+1)+p_1\cdot p$$

$$= ((\neg p_1)\wedge(\neg p_2)\wedge p_3)\vee((\neg p_1)\wedge p_2\wedge(\neg p_3))\vee(p_1\cdot(\neg p_2)\cdot(\neg p_3))\vee(p_1\cdot$$

  disjunktive Normalform von f, zum Bau der Schaltung als Parallelschaltung von Serienschaltungen

-

$$f = (p_1\vee p_2\vee p_3)\wedge(p_1\vee(\neg p_2)\vee(\neg p_3))\wedge((\neg p_1)\vee p_2\vee(\neg p_3))\wedge$$

$$\wedge((\neg p_1)\vee(\neg p_2)\vee p_3)$$

  konjunktive Normalform von f, zum Bau der Schaltung als Serienschaltung von Parallelschaltungen

Normalformen

- Es gibt 2^8 Funktionen von $\mathbb{Z}_2^3$ nach $\mathbb{Z}_2$, jede ist Linearkombination (mit Koeffizienten 0 oder 1) der 8 Monome

$$1,\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_1 \cdot p_2,\ p_1 \cdot p_3,\ p_2 \cdot p_3,\ p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$$

  dargestellt werden.

- Darstellung von f als Summe (bzw. Linearkombination) von Potenzprodukten: $p_1 + p_2 + p_3$,
  zum Auswerten der Funktion f

- Ob eine Normalform „einfacher“ oder „besser“ ist als eine andere, hängt vom jeweiligen Kontext ab.
  (Analog: Soll $a^2 - b^2$ zu $(a + b)(a - b)$ vereinfacht werden oder umgekehrt?)

Abstimmungsmaschinen

- Abstimmungsmaschine für 5 Personen, Lampe leuchtet wenn Mehrheit auf ja drückt.

- Schaltfunktion f mit $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_5 + x_1x_2x_4x_5 + x_1x_3x_4x_5 + x_2x_3x_4x_5 + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_5 + x_1x_3x_4 + x_1x_3x_5 + x_1x_4x_5 + x_2x_3x_4 + x_2x_3x_5 + x_2x_4x_5 + x_3x_4x_5$ (Summe aller Produkte von x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 mit drei oder vier verschiedenen Faktoren)
- disjunktive Normalform: $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1x_2x_3x_4x_5 + x_1x_2x_3(1+x_4)x_5 + x_1x_2(1+x_3)x_4x_5 + x_1(1+x_2)x_3x_4x_5 + (1+x_1)x_2x_3x_4x_5 + x_1x_2x_3(1+x_4)(1+x_5) + x_1x_2(1+x_3)x_4(1+x_5) + x_1x_2(1+x_3)(1+x_4)x_5 + x_1(1+x_2)x_3x_4(1+x_5) + x_1(1+x_2)x_3(1+x_4)x_5 + x_1(1+x_2)(1+x_3)x_4x_5 + (1+x_1)x_2x_3x_4(1+x_5) + (1+x_1)x_2x_3(1+x_4)x_5 + (1+x_1)x_2(1+x_3)x_4x_5 + (1+x_1)(1+x_2)x_3x_4x_5$

- ...

Danke für die Aufmerksamkeit!

https://www.uibk.ac.at/mathematik/personal/pauer/

https://www.uibk.ac.at/dingim/team/stampfer/

franz.pauer@uibk.ac.at , florian.stampfer@uibk.ac.at