universität wien

Hans Humenberger

Elementarmathematische Betrachtungen zur gerechten Pizza- und Apfelteilung

ARD: Wissen vor 8, 14. 11. 2018

(Vince EBERT: Physiker, Entertainer)

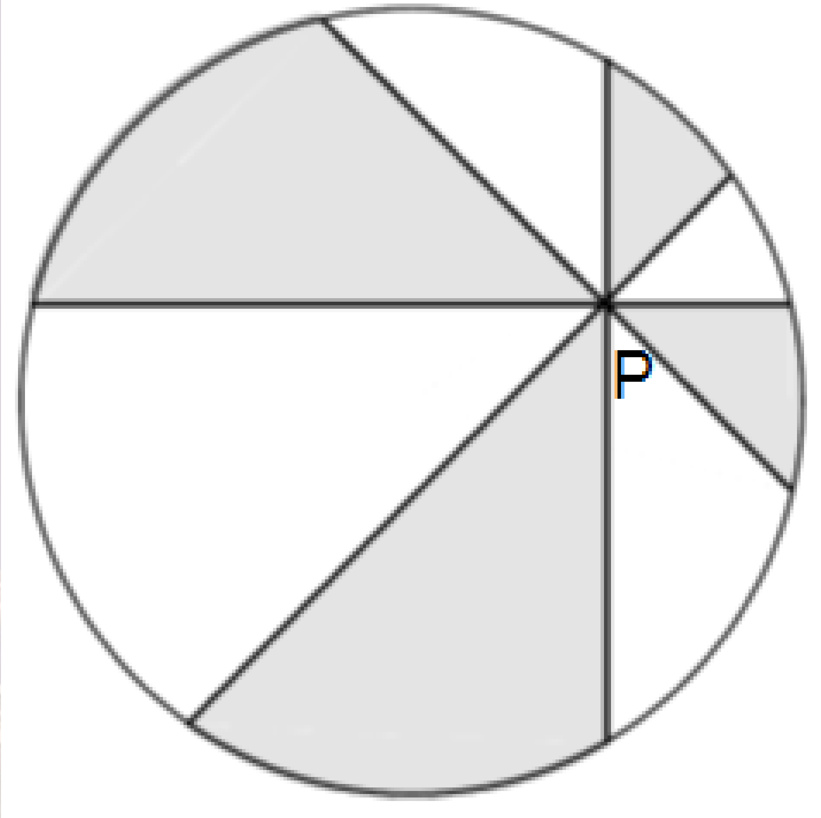
Pizza-Theorem

Summe der grauen Flächeninhalte
= Summe der weißen
(unabhängig von P!)

Noch dazu: auch gleich viel Rand!

Scheint irgendwie nicht zu den Symmetrieverhältnissen des Kreises zu passen???

„Pizza-Theorem“



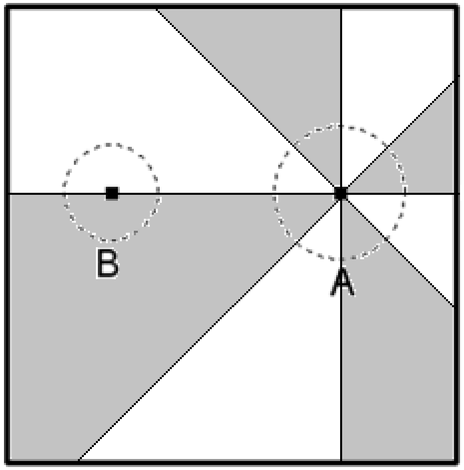
Einstiegsproblem in der Sek 1 (Kroll/Jäger 2010)

Schwierige Erbteilung

Bei der Geburt ihrer Zwillingskinder, einer Tochter und einem Sohn, pflanzen die Eltern auf ihrem Grundstück einen Apfel- und einen Birnbaum. Beide, wie auch die Kinder, gedeihen prächtig, aber die Eltern entzweien sich im Laufe des Lebens; und da der Sohn zur Mutter, die Tochter zum Vater hält, will jedes Elternteil, dass ihr Erbe zu gleichen Teilen an ihre Kinder gelangt.

Der Erbfall tritt ein. Aber wie soll das Grundstück geteilt werden, wenn jedes Kind gleich viel Land und auch gleich viel von den beiden Bäumen bekommt soll? Ein befreundeter Mathematiker schlägt den Zwillingen vor, einfach einen der beiden Bäume zu fällen; dann wäre das Problem leicht lösbar. Aber das wollen die Kinder nicht, und tatsächlich finden sie selbst nach einigem Probieren eine Lösung.

(Die gestrichelten Kreise stellen die Baumkronen dar. Von jeder beansprucht jeder Zwilling genau die Hälfte.)



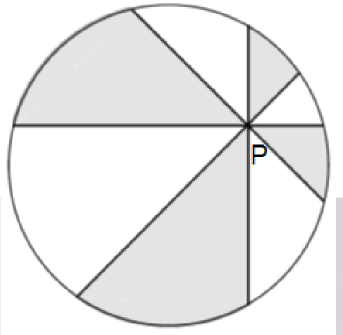
„Niemand sollte sich daran stören, dass das Problem unrealistisch ist; denn Schüler stören sich auch nicht daran.“ (K/J S. 101)

Ich glaube:

- Viele S&S stören sich sehr wohl daran

- Problematisch aus der Sichtweise von *Realitätsbezügen im Mathematikunterricht*:
  Falsches und schädliches Bild von Mathematik kann erzeugt werden

Sekundarstufe 1 – Vorübungen

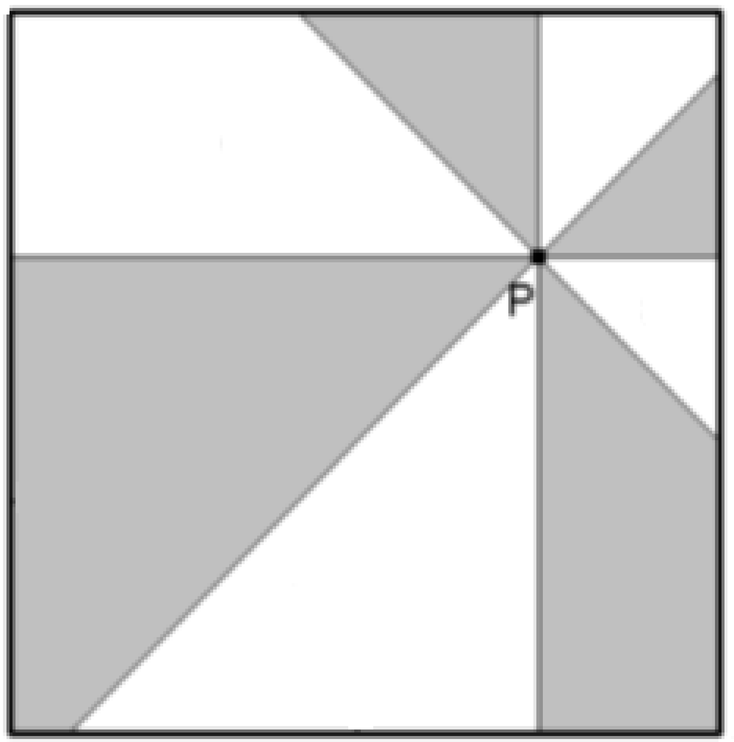


- **Enaktiv: Kreisrundes Stück Karton zerteilen und die weißen bzw. grauen Flächenstücke zusammen abwiegen**
- **Messen des Inhalts der Flächenstücke mit DGS, Erstellen eines dynamischen Applets**

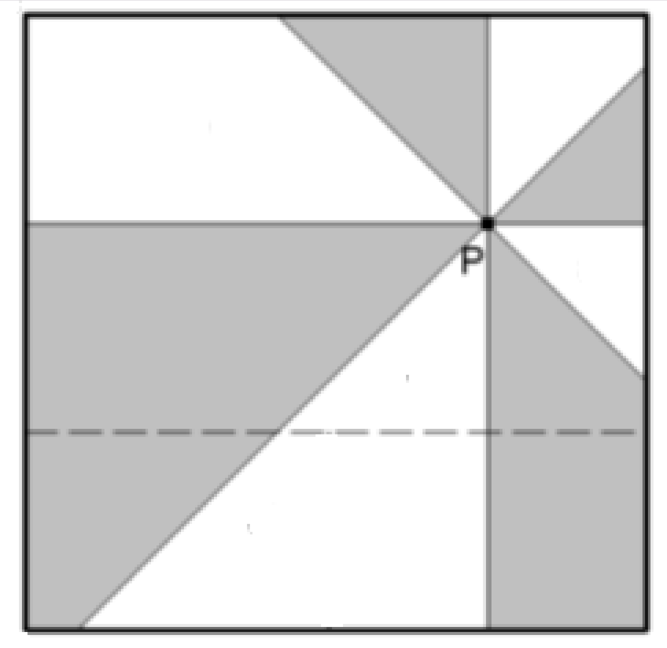
GeoGebra-Messen

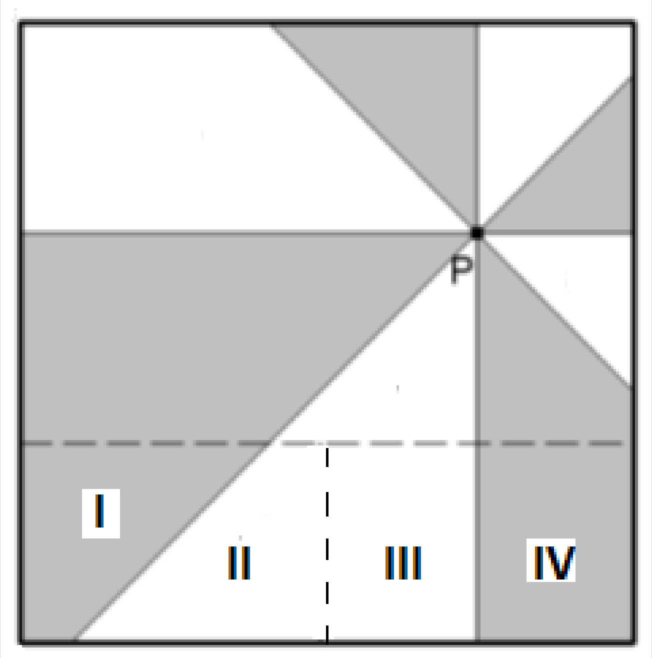
Sekundarstufe 1 – Analogproblem mit Quadrat (ohne Einkleidung):

Stanzmesser parallel zu den Seiten bzw. Diagonalen



Mögliche Hinweise für S&S:

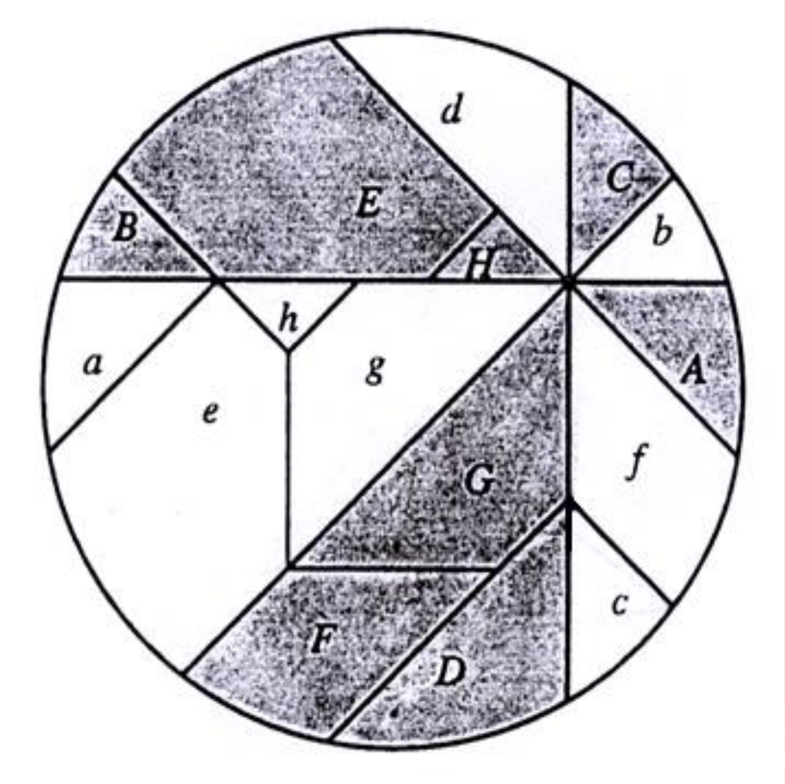


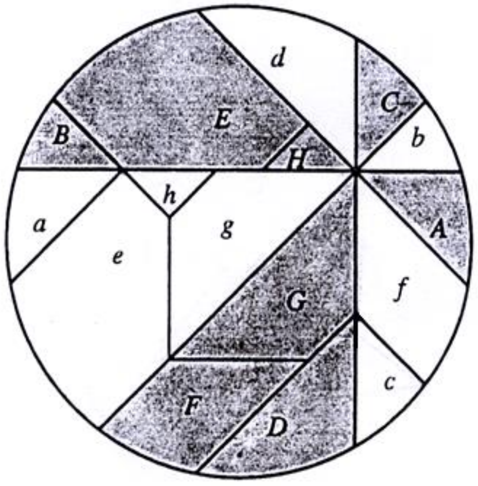


Die ursprüngliche Aufgabe mit dem Kreis („Pizza“) ist deutlich zu schwierig für eine selbständig zu lösende Aufgabe!

Zerlegung von Carter/Wagon (Math.Mag. 1994)

- Sogar ***Zerlegungsgleichheit***!
- „Beweis ohne Worte“ ???
- Studierende, evtl. auch S&S im Gymnasium können diesen Beweis ***analysieren*** (keine leichte Aufgabe!)





Fachdidaktische Bemerkungen:

- Interessantes Phänomen
- wichtige elementargeometrische Inhalte
- Problemlösen (obwohl Beweisfigur vorgegeben):
  teilweise selbständiges Arbeiten,
  teilweise Unterstützung durch Lehrkraft nötig
- Beitrag aus einer Fachzeitschrift → mögl. gute Motivation
- Interpretation (Spekulation): wie könnte das gemeint sein?
- Wenn Lernende was Substanzielles liefern →
  gute Leistung!
- Erkennen, wie die einzelnen Flächenstücke „entstehen“,
  warum sind jene mit gleichen Buchstaben kongruent?

universität wien

Kongruenzen

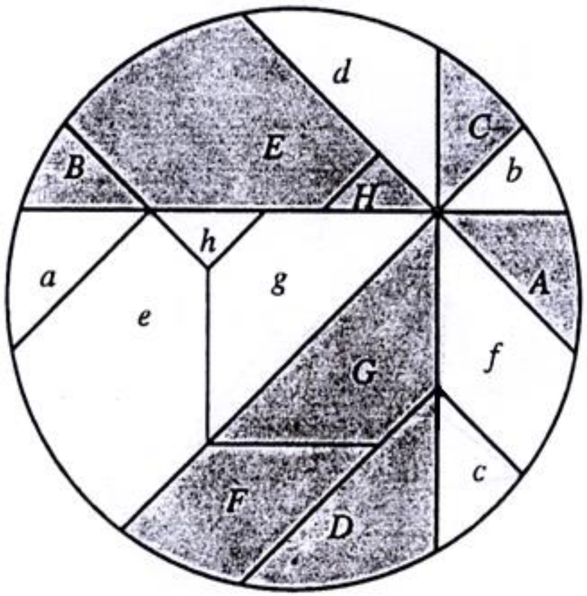
- **Klar (Spiegelungen):**

$$A \cong a, b \cong B, C \cong c, d \cong D, G \cong g$$

- **Noch genauer zu untersuchen:**

$$f \cong F, \qquad e \cong E, \qquad h \cong H$$

und das ist gar nicht so leicht . . .
(„ohne Worte“ ??)



Kohnhauser/Velleman/Wagon 1996: Achteck

- hochsymmetrisches Achteck, Mittelpunkt = *M* = Kreismittelp.

- A priori klar (ohne Achteck):

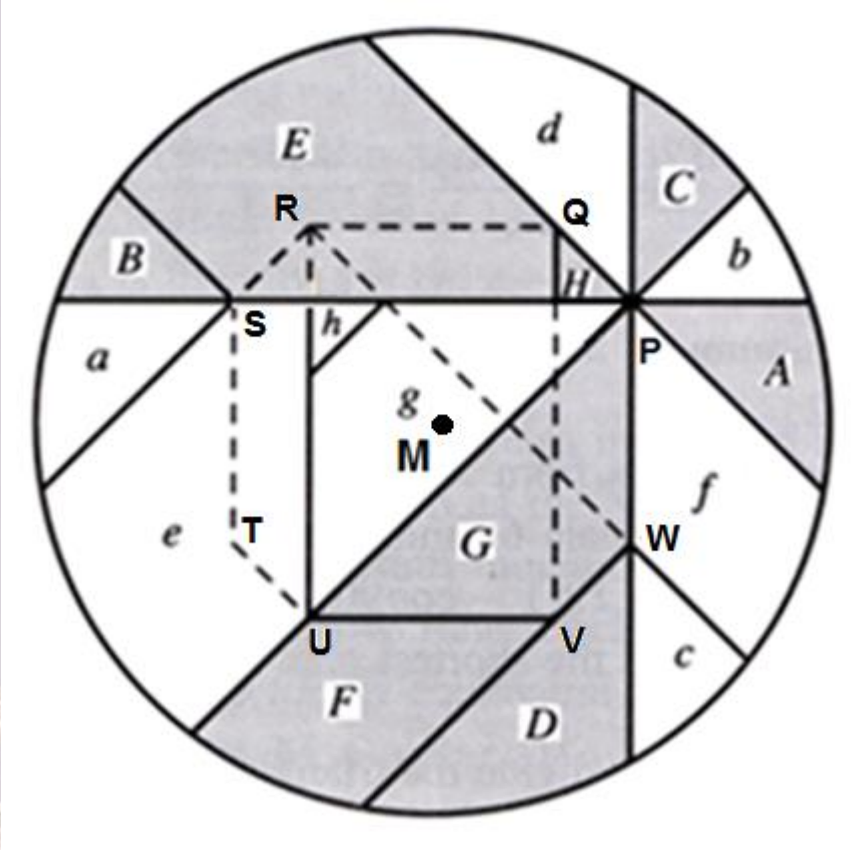
$$A \cong a, B \cong b, C \cong c, D \cong d, G \cong g$$

- Mit Hilfe des Achtecks:

$$H \cong h$$

- 90°-Drehsymmetrie mit Zentrum *M*:

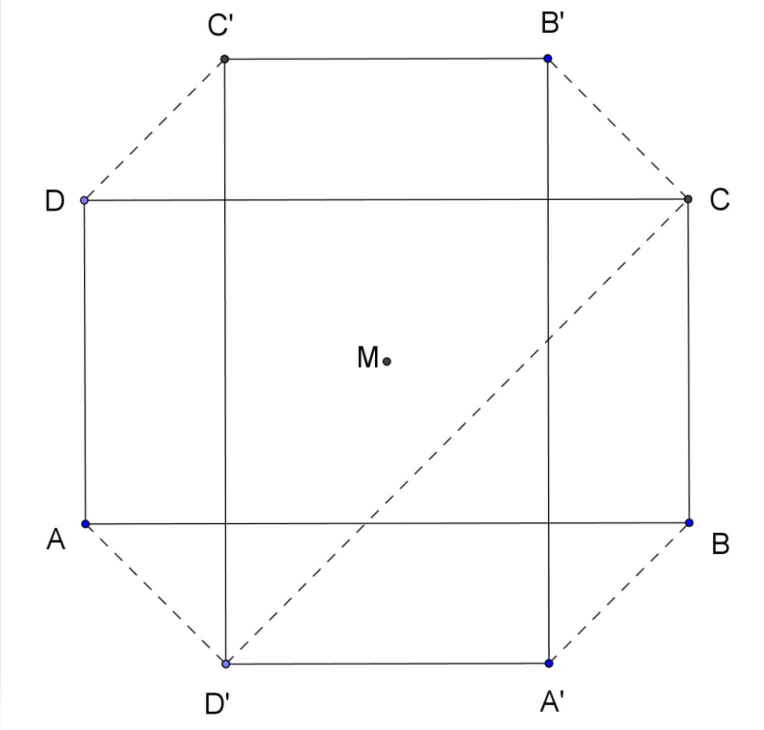
$$f \cong F \;,\; e \cong E$$



Achtecksymmetrie – warum genau?

- Rechteck *ABCD* mit Zentrum *M* um 90° gedreht

  Warum sind die gestrichelten schrägen Linien „45°-Linien“?

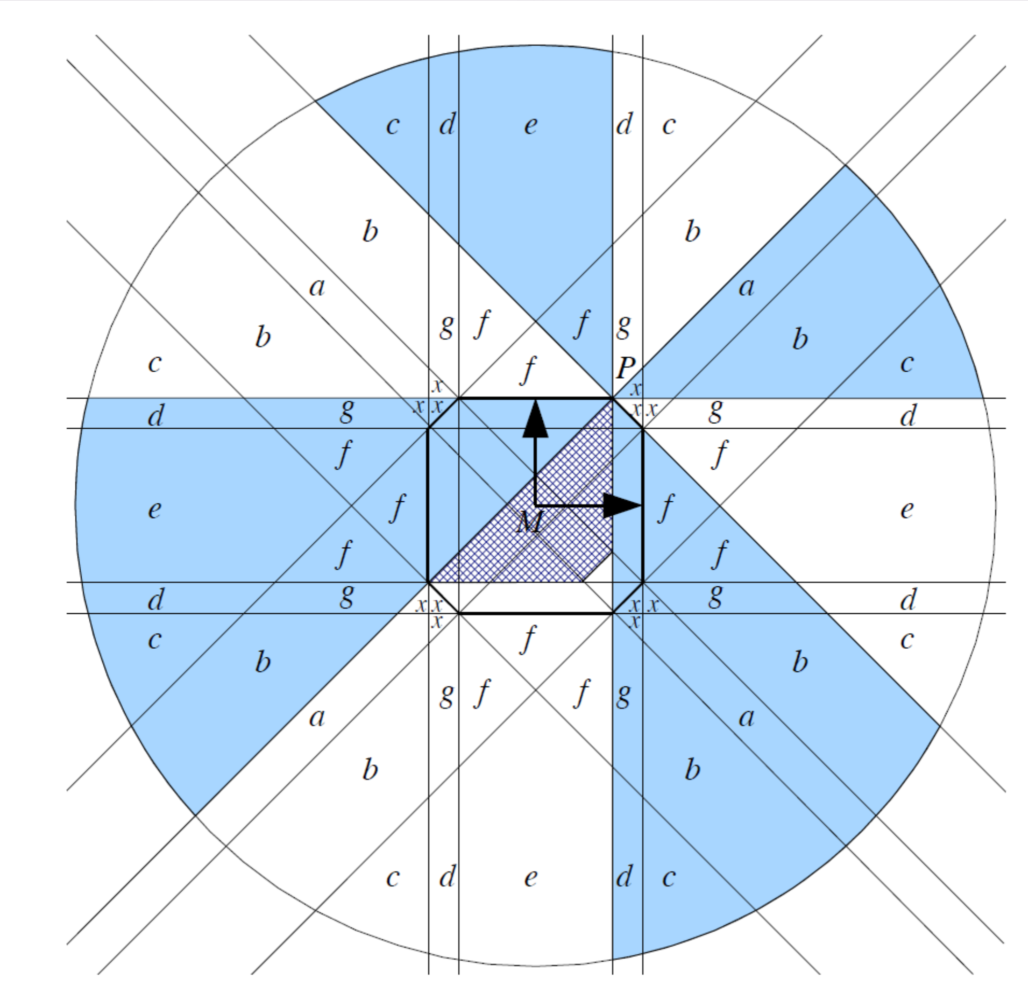


Zerlegung nach Gallin 2011:

P samt den 4 Messern an den Koordinatenachsen und Winkelhalbierenden „rundherum“ gespiegelt → Achteck

Sehr viele Teile, aber sehr elementar!

Beweis „ohne Worte“, auch für S&S

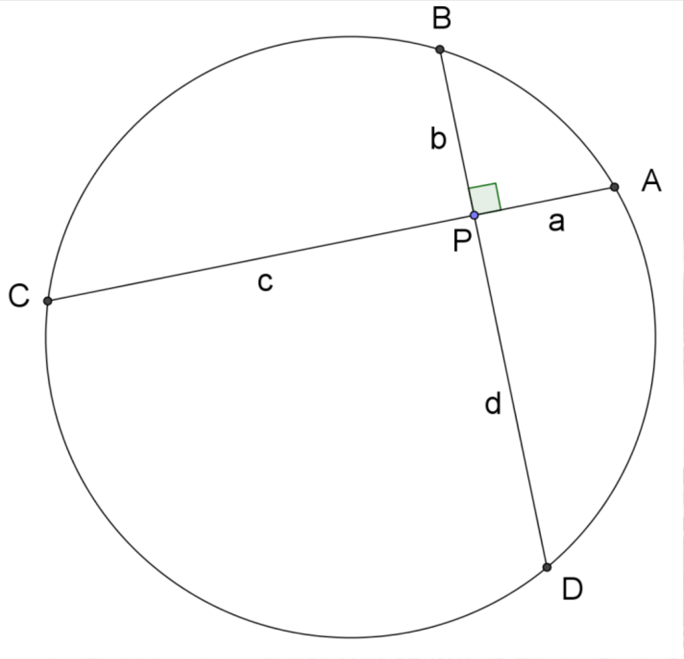


Sekundarstufe 2

Zunächst eine wichtige elementargeometrische Erkenntnis:

Bei jedem orthogonalen Sehnenpaar in einem Kreis gilt für die Sehnenabschnittslängen *a*, *b*, *c*, *d* (*r* ist der Kreisradius):

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (2r)^2$$



Beweis auf viele Arten möglich

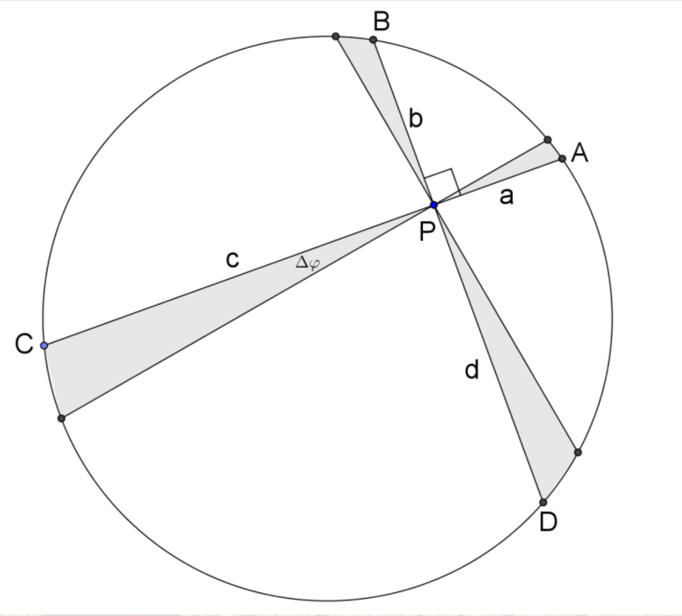
Typische Aufgabe zum „Problemlösen“

Wichtig für
(1) folgende Plausibilitätsbetrachtung
(2) analytische Herangehensweise

Plausibilitätsbetrachtung

Wenn man zwei orthogonale „Pizzamesser“ (Schnittpunkt *P*) um *P* mit einem kleinen Winkel $\Delta\varphi$ weiterdreht , dann ist der Flächeninhalt zwischen der ursprünglichen und der neuen Lage *ungefähr* gleich:

$$A \approx \frac{1}{2}\Delta\varphi\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)$$



Erklärung: Man fasst jeden der vier Teile näherungsweise als Kreissektor mit Öffnungswinkel $\Delta\varphi$ und den jeweiligen Radien *a*, *b*, *c* , *d* auf.

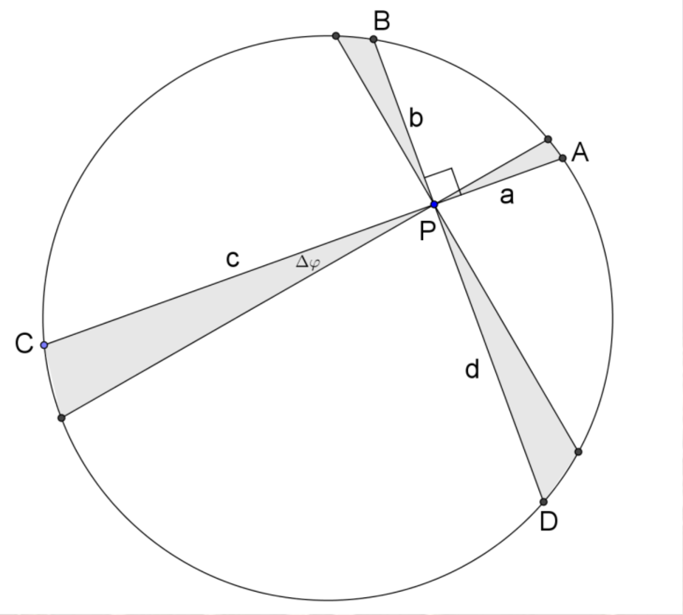
Beziehung gilt sogar exakt!

Plausibilitätsbetrachtung

- **Flächeninhalt *direkt proportional* zum Drehwinkel:**

$$A \approx \frac{1}{2}\Delta\varphi \underbrace{\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)}_{(2r)^2} = \left(2r^2\right) \cdot \Delta\varphi$$

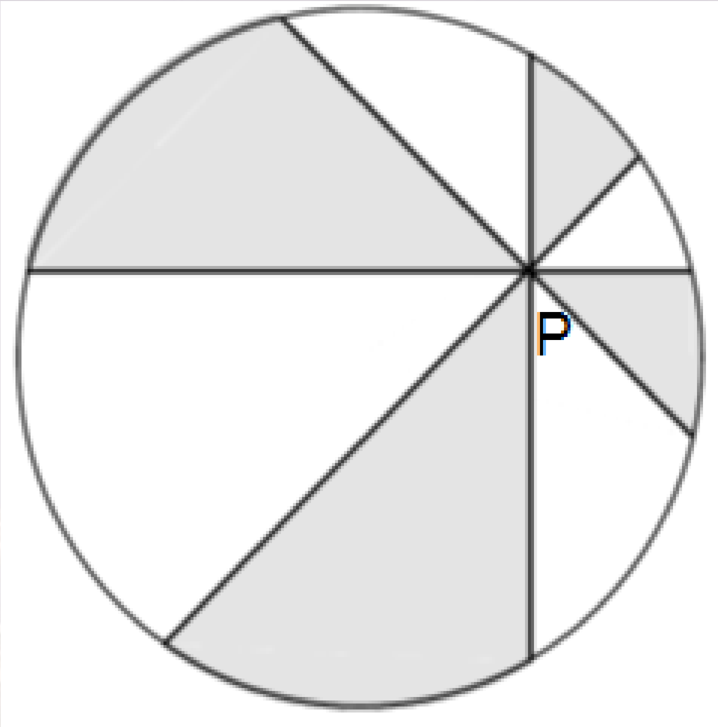
- Unabhängig von der Lage von *P*, unabhängig von der Stellung der orthogonalen Messer: immer derselbe Prop.faktor 2*r* ² (bei beliebig häufiger Wiederholung des Weiterdrehens um $\Delta\varphi$) → *plausibel*: Formel gilt nicht nur für kleine $\Delta\varphi$



Proportionalität $A \approx \left(2r^2\right) \cdot \varphi$

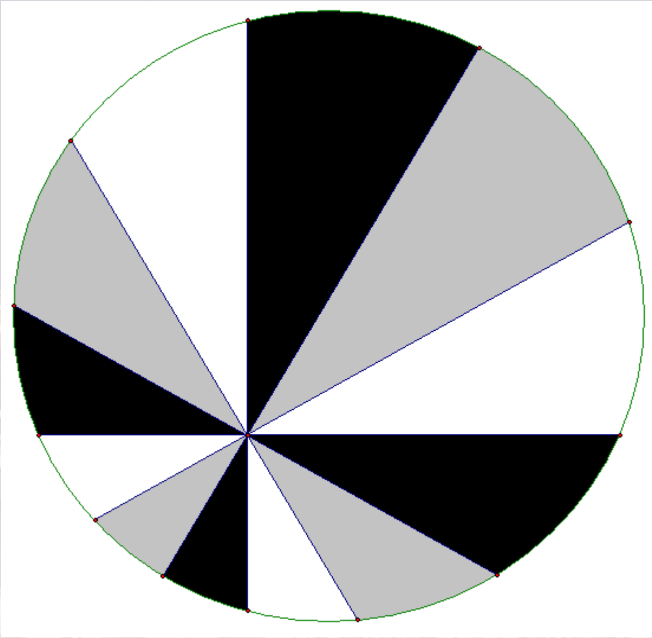
Mit $\varphi = 90° = \pi / 2$ **hätte man die ganze Kreisfläche,**
mit $\varphi = 45° = \pi / 4$ **daher die halbe!**

→ Flächeninhaltssummen der grauen und der weißen „Sektoren“ sind jeweils der halbe Kreisflächeninhalt!



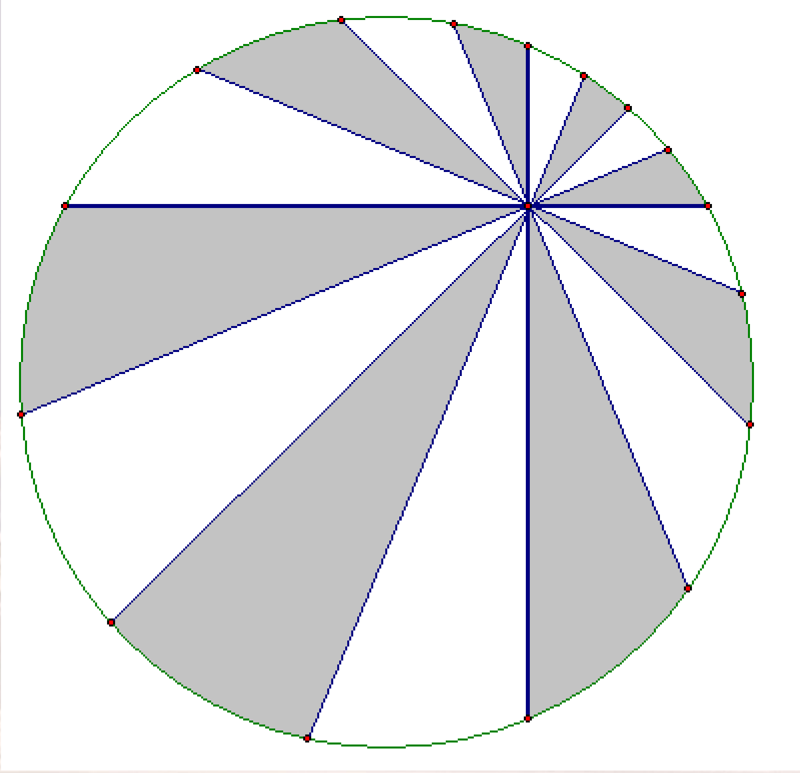
Proportionalität = mathematischer Kern!

- **Verallgemeinerung:**
  Quadranten nicht in zwei 45°-Winkel,
  sondern in drei 30°-Winkel geteilt →
  analog eine faire Aufteilung unter drei Personen
- **Weitere Verallgemeinerung auf *n* Quadrantenteile bzw. Personen klar!**

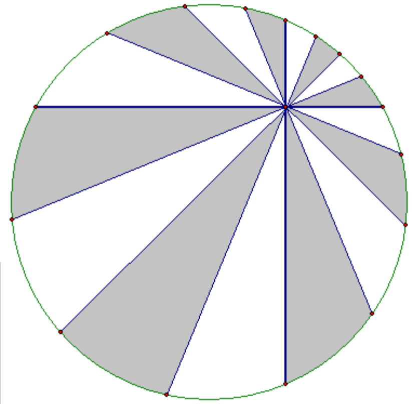


Aufteilung auf 2 Personen

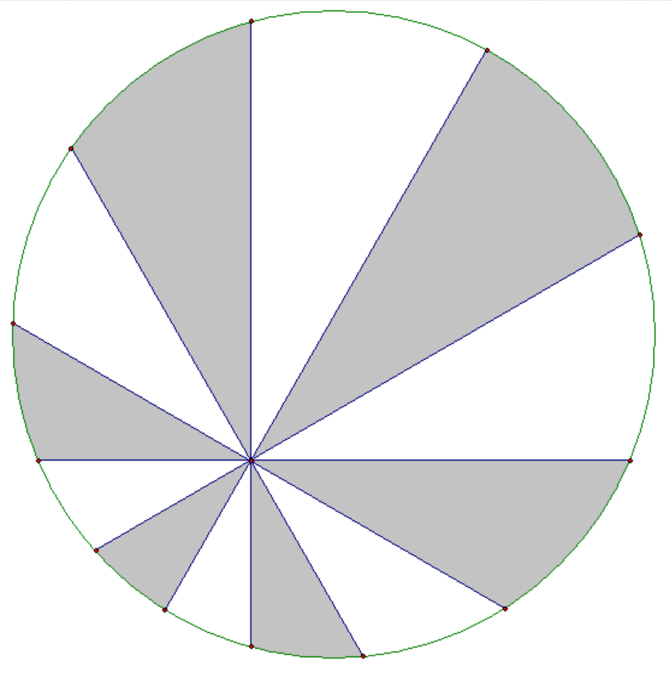
- Jeder Quadrant in 2*k* Teile geteilt → gerechte Aufteilung auf 2*k* Personen
- Vereinigung der geraden und ungeraden Personen → gerechte Aufteilung auf 2 Personen, bzw.: Flächeninhaltssummen der geraden (weiß) und ungeraden (grau) Teile sind gleich



Aufteilung auf 2 Personen



- **Jeder Quadrant in ungerade viele Teile geteilt:**
  Auch dann gilt: Flächeninhaltssummen der ungeraden (weiß) und geraden Teile (grau) sind gleich:



„Pizzatheorem"

Beweis etwas komplizierter (leider keine Paare „orthogonaler Doppelsektoren" gleicher Farbe) → H. H. 2015.

universität wien

Integralrechnung

- **Unterricht: oft viel zu sehr auf das *Rechnen* fokussiert statt auf die dazugehörigen (Grund-)Vorstellungen; analog: Bruchrechnen**

Bedeutet f(x) (für $a \le x \le b$) –	**dann bedeutet $\int_a^b f(x)\,dx$ –**
– die **Ordinate** des Punktes (auf einer geeigneten Kurve oberhalb der ersten Achse) mit der Abszisse x	– den **Flächeninhalt** unter der Kurve zwischen den Stellen a und b
– die **Geschwindigkeit** im Zeitpunkt x	– den zwischen den Zeitpunkten a und b zurückgelegten **Weg**
– den **Grenzsteuersatz** beim Einkommen x	– die **Einkommensteuer** beim zu versteuernden Einkommen b (sofern a = Existenzminimum)
– die an der Wegstelle x wirkende **Kraft**komponente	– die zwischen den Stellen a und b verrichtete **Arbeit**
– den **Oberflächeninhalt** der Kugel vom Radius x	– das **Volumen** der Kugelschale vom inneren Radius a und äußeren Radius b
– den **Querschnitt** eines Körpers in der Höhe x	– das **Volumen** des Körpers zwischen den Höhen a und b
– die **Steigung** einer Kurve im Punkt mit der Abszisse x	– den **Ordinatenzuwachs** der Kurve zwischen den Stellen a und b
– die **Ableitung** $\frac{dF(x)}{dx}$ einer Funktion F an der Stelle x	– die **Differenz** F(b) – F(a) der Funktionswerte F(a) und F(b)

Tab 2.: Deutungen des Integrals

- **Grundidee der Integralrechnung: *Grenzwerte* von *Produktsummen* in verschiedensten Kontexten (z. B. Blum/Kirsch 1996)**

$$\sum_i f(x_i) \cdot \Delta x_i$$

Integralrechnung

- **Oft schnellstmöglich zum Hauptsatz der D-I-Rechnung:**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

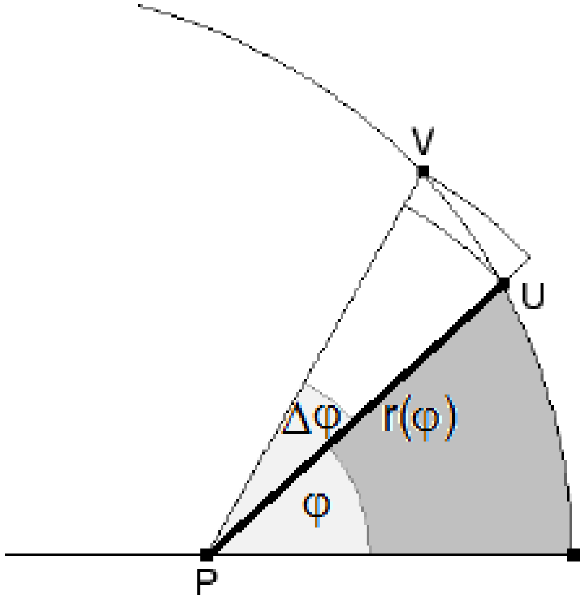
- **Manchmal sogar als Definition:**

Definition: Der Wert $F(b)-F(a)$ wird als das **bestimmte Integral** der Funktion $f=F'$ mit der Obergrenze b und der Untergrenze a (kurz: „Integral von f von a bis b" bzw. „Integral von f zwischen a und b") bezeichnet. Man schreibt:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

- **Im Folgenden: *Produktsummen*, nicht schmale RE-Streifen, sondern schmale Kreissektoren**

Leibniz‘sche Sektorformel

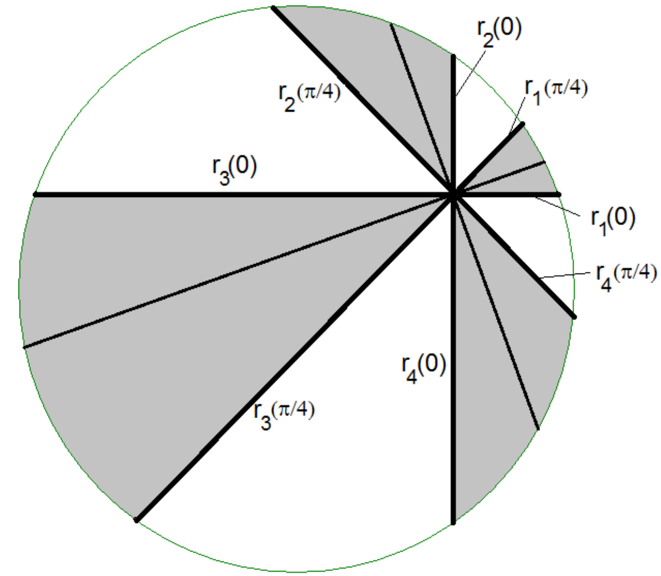


Aufsummieren der Inhalte kleiner Kreissektorflächen ergibt eine *Produktsumme,* die im Grenzwert dann zu einem *Integral* wird:

$$\frac{1}{2}\sum_i r^2(\varphi_i)\cdot\Delta\varphi_i \;\to\; \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

Begriff „Polarkoordinaten“ dabei nicht nötig

Angewandt auf Pizzaproblem:



$$
\begin{aligned}
A_{\text{grau}} &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} r_1^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} r_2^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} r_3^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} r_4^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \underbrace{\left(r_1^2(\varphi) + r_2^2(\varphi) + r_3^2(\varphi) + r_4^2(\varphi)\right)}_{=(2r)^2}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\cdot(2r)^2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi r^2}{2}
\end{aligned}
$$

Integrale, ohne rechnen zu müssen!

Obige Näherungsformel gilt also wirklich exakt:

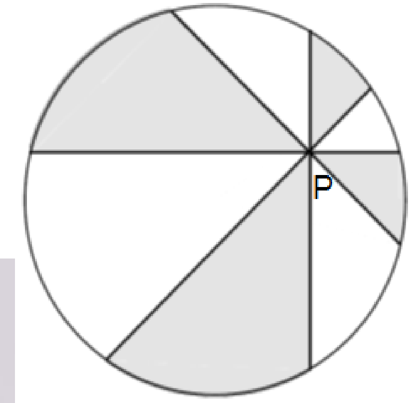
$$A \approx \frac{1}{2}\Delta\varphi\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)$$

Ränder der Pizzastücke meist trockener:

- **Fotos beim Vortrag aus Urheberrechtsschutzgründen hier entfernt!**

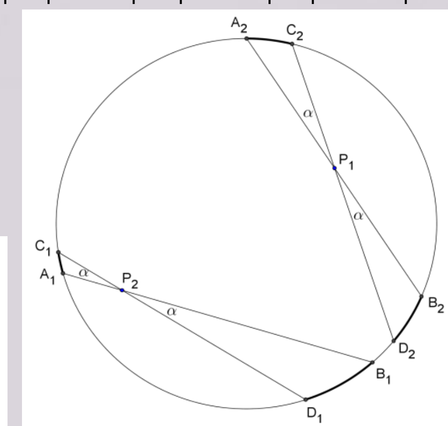
Auch die Ränder werden bei obiger Zerlegung gerecht aufgeteilt!

- Summenkonstanz **Flächeninhalt**: **Zwei** aufeinander normal stehende Doppelsektoren nötig
- Summenkonstanz **Bogenlänge**: Schon bei **einem** Doppelsektor



Bogenlängen:

- **Innerhalb jedes Doppelsektors konstante Summe, bei beliebigem, festem Öffnungswinkel:** $|A_1C_1| + |B_1D_1| = |A_2C_2| + |B_2D_2|$



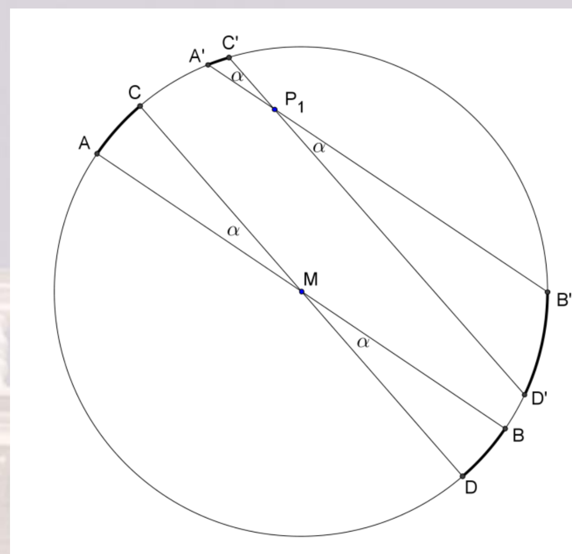
- **Problemvereinfachung: Es genügt dies für *P_2 = M* und parallele Sehnen zu zeigen:**

$$|A'C'| + |B'D'| = |AC| + |BD|$$

$$|A'C'| = |AC| + |CC'| - |AA'|$$

$$+ \qquad + $$

$$|B'D'| = |BD| + |BB'| - |DD'|$$



Fachdidaktische Bemerkungen

- **Für die Schule ein anspruchsvolles und beziehungs-haltiges Thema, auch für die Lehrerbildung geeignet**
- **gute Gelegenheit, die Elementargeometrie an einem interessanten Phänomen etwas zu stärken**
- **Stärkung inhaltlicher (semantischer) Aspekte in der Sek2 (Differential- und Integralrechnung)**
- **Evtl. auch Vernetzung zwischen Elementargeometrie und Integralrechnung**
- **Auch selbständiges Problemlösen in wohl dosierten Teilen dabei möglich**

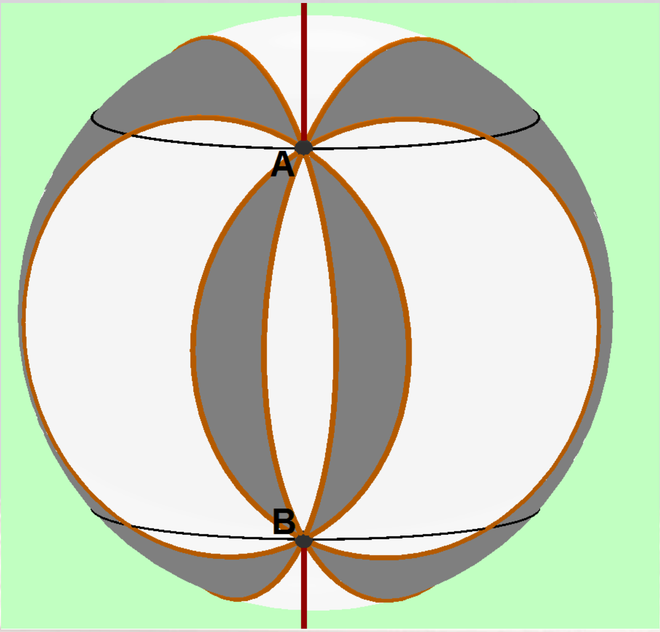
Weiteres Pizzatheorem (ohne Beweis):

Foto entfernt!

https://www.facebook.com/pages/category/Pizza-Place/Maxi-Pizza-olching-604579206356432/

Apfelteilung mit der Pizza-Stanze

8 keilförmige Apfelspalten („wedges“), gegenüberliegende wieder grau bzw. weiß gefärbt



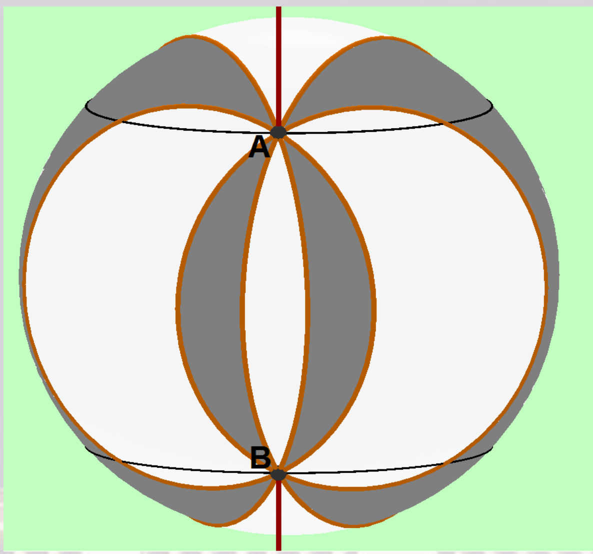
Stanzachse nicht durch Mittelpunkt:

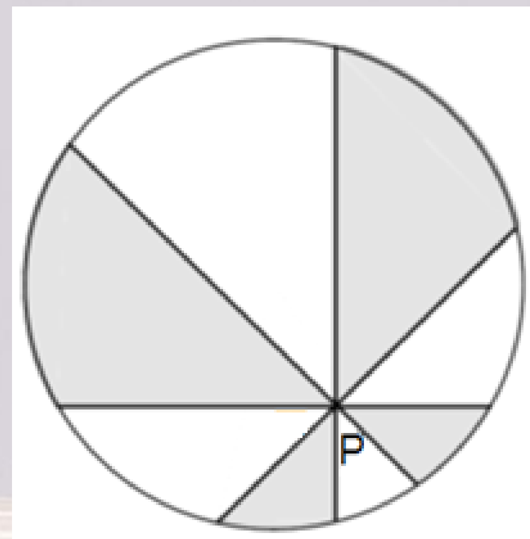
Summe(grau) = Summe(weiß)?

Volumen? Oberflächeninhalt (Apfelschale)?

A nur knapp über B

Die „hintere“ (großteils unsichtbare!) weiße Fläche wird sehr groß
→ sicher keine Halbierung bei Oberflächeninhalt und Volumen!



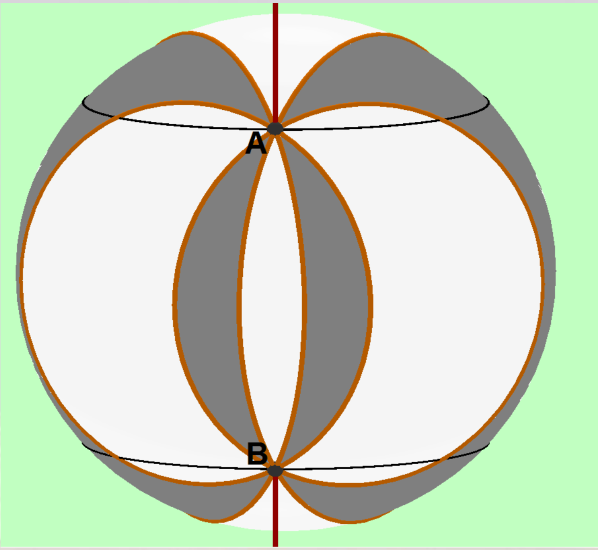


Enttäuschung?

Immerhin: Bei jedem „Breitenkreis“ zwischen A und B als Schnitt genau gerechte Flächen- und Ränderteilung (laut ebenem Pizzatheorem)!

Prinzip von Cavalieri

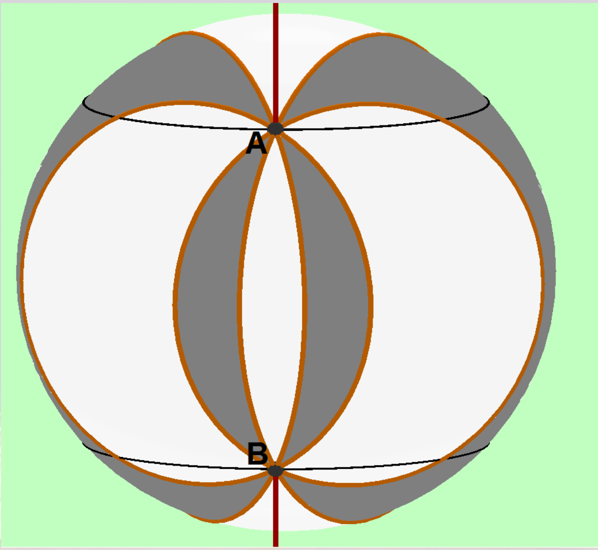
- Zwischen den beiden Breitenkreisen von A und B muss Volumen-Ausgleich zwischen Grau und Weiß herrschen (auch Oberflächeninhalt → unten)



- Das Problem muss also irgendwie an den „Polregionen“ liegen!

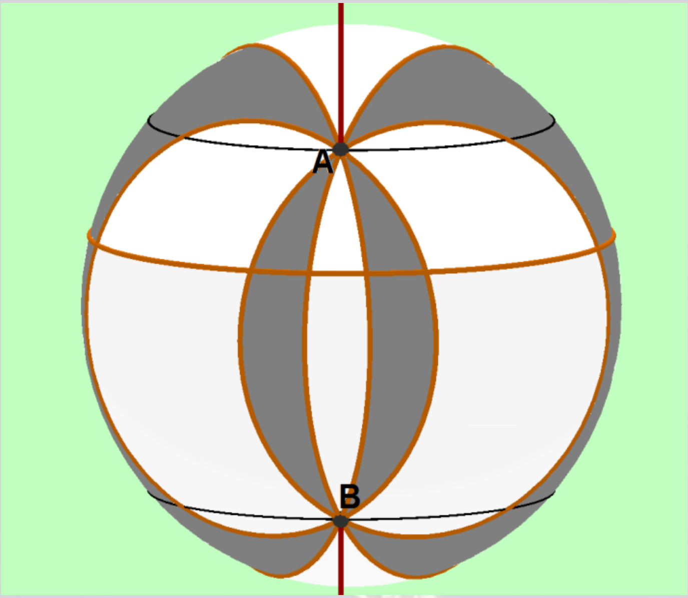
Polregionen

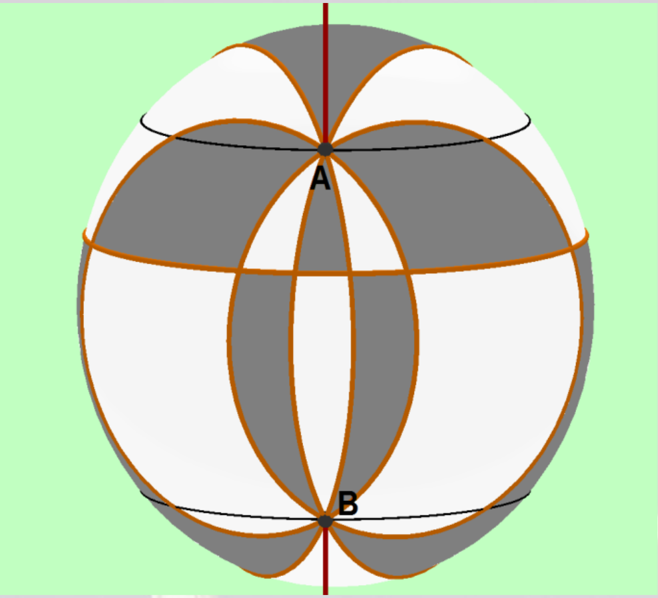
- **Symmetrie zur „Äquatorebene“:**
  Was nördlich von A grau ist,
  ist es auch südlich von B (analog bei weiß)



- **Idee: Wenn man eine Polregion einfach umfärben könnte . . .**

Umfärben nördlich eines beliebigen „Breitenkreises“ zwischen A und B

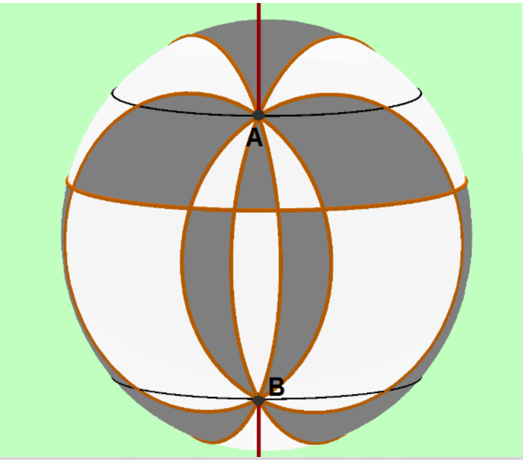




- Ausgleich zwischen den Polregionen!
- Ausgleich zwischen den Breitenkreisen bleibt erhalten, weil der Ausgleich weiterhin in JEDER Zwischenebene gegeben ist!
- Daher: AUSGLEICH INSGESAMT beim Volumen (auch beim Oberflächeninhalt bzw. „Apfelschale“)

Apfeltheorem

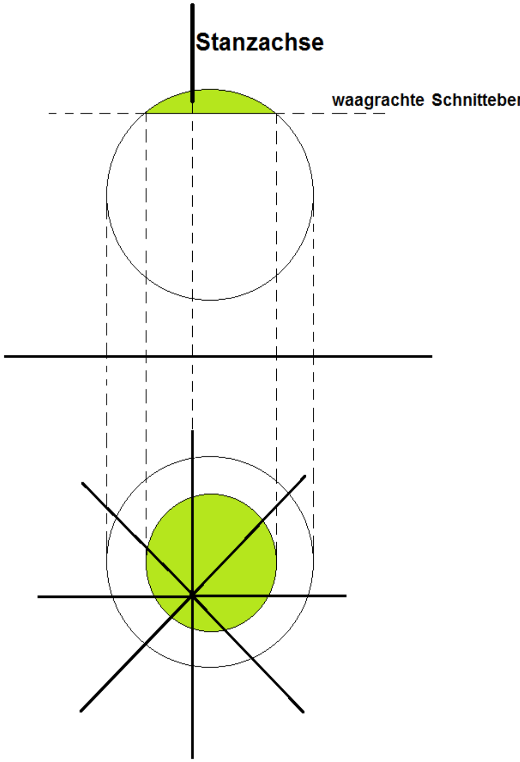
(Calzone-Theorem, M. Nathanson;
vgl. Berzsenyi 1994)



- Apfel waagrecht einmal durchschneiden

- mit einer „gleichwinkligen Pizzastanze“
  von oben in „wedges“ teilen
  (Stanze trifft irgendwo auf die abgeschnittene „Polkappe“)

- Fruchtoberfläche **schachbrettartig** „färben“
  (weiß/grau)



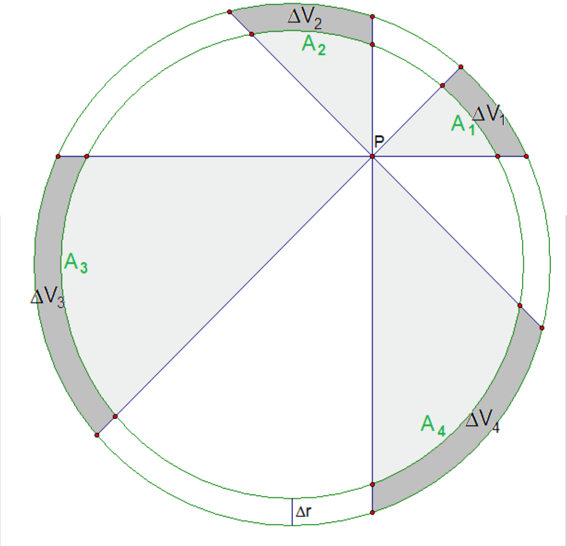
Dann gilt:

$V(\text{grau}) = V(\text{weiß})$

$O(\text{grau}) = O(\text{weiß})$

Plausibilitätsbetrachtung zur Oberflächenhalbierung:

- **Wissen:** *V*(grau) ist – bei festem Radius – *unabhängig* von der Lage der Stanzachse → das gilt auch für die Differenz zweier solcher Volumina mit verschiedenen, festen Radien



Zweidimensionaler Querschnitt – Oberflächen erscheinen als Bögen

$$\Delta V \approx \left(A_1 + A_2 + A_3 + A_4\right)\cdot \Delta r$$ ist unabhängig von P (konstant)

Dies gilt auch für $\dfrac{\Delta V}{\Delta r}$ und im Limes für

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta r} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

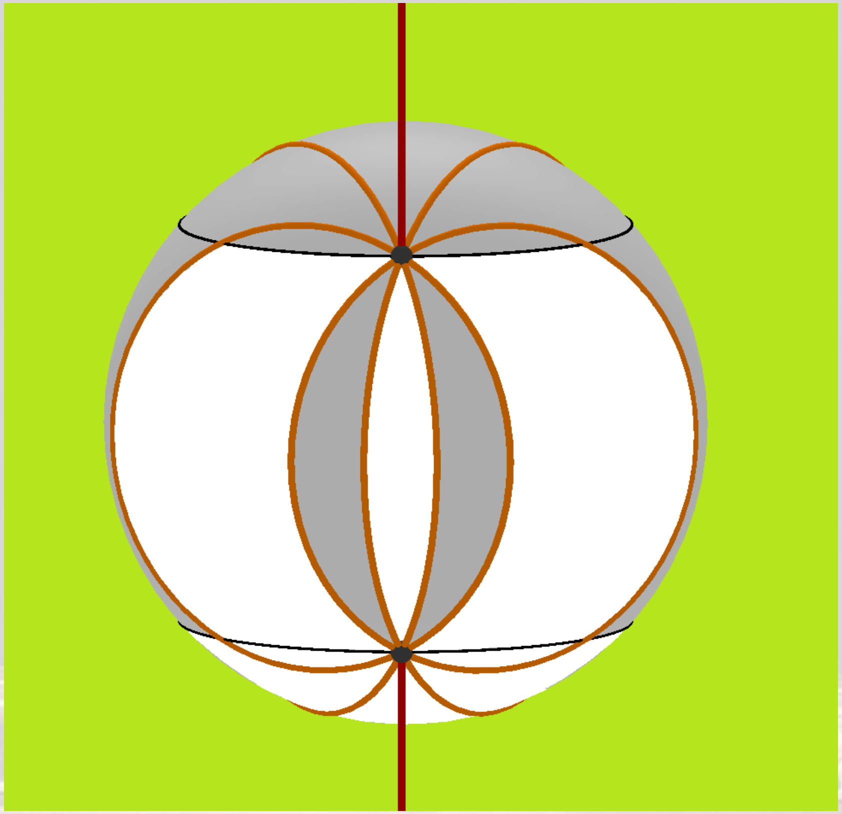
D. h. auch $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ ist unabhängig von der Lage von P, und macht den halben (grauen) Oberflächeninhalt aus, die andere Hälfte ist weiß!

Analog bei der Kugel (inhaltliche Begründung für): $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = O$

Andere Lösung: Pole einheitlich färben

- zwei genau zu setzende waagrechte Schnitte nötig

- kein Schachbrettmuster mehr (gleiche Farben grenzen aneinander)



Das ganze Phänomen (incl. Beweise) funktioniert nicht nur bei Kugeln, auch bei Körpern mit:
1) Rotationssymmetrie
2) waagrechter Symmetrieebene
(z. B. Rotationsellipsoide „längliche“ Melone)

universität wien

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!

Literatur:

- Berzsenyi, G. (1994): The Pizza Theorem – Part II. In: Quantum, vol. 4, nr. 4 (April/März 1994), S. 29. http://static.nsta.org/pdfs/QuantumV4N4.pdf
- Carter, L, Wagon S. (1994): Proof without Words: Fair Allocation of a Pizza. Mathematics Magazine 67, 4, 267. http://en.wikipedia.org/wiki/Pizza_theorem
- Gallin, P. (2011): Exzentrische Kuchenhalbierung. Bulletin des VSMP Nr. 116, Juni 2011, 11–19. http://www.gallin.ch/KuchenhalbierungBulletin.pdf
- Kohnhauser, J.D.E., Velleman, D., Wagon, S. (1996): Which Way Did the Bicycle Go? Dolciani Mathematical Expositions 18, Mathematical Association of America, Washington.
- Kroll, W., Jäger, J. (2010): Das Pizzatheorem. Ein Thema mit Variationen. mathematica didactica 33, 79–112. http://www.mathematica-didactica.com/altejahrgaenge/md_2010/md_2010_Kroll_Jaeger_Pizzatheorem.pdf

- H. H. (2015): Gerechte Pizzateilung – keine leichte Aufgabe! In: Mathematische Semesterberichte 62, 2, 173–194.
- H. H. (2019): Gerechte Apfelteilung – keine leichte Aufgabe! In: Mathematische Semesterberichte 66, 1, 101–109.