PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE NIEDERÖSTERREICH

universität wien

Stefan Götz (Uni Wien) & Evelyn Süss-Stepancik (PH NÖ)

# Intelligentes Üben in einem verstehensorientierten Unterricht

# Was wir nicht wollen!

PH NÖ PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE NIEDERÖSTERREICH

universität wien

# Unproduktives Üben

**Aufgaben** **Grundkompetenzen**

**4.17** Ermittle alle Lösungen der Gleichung! Beachte die verschiedenen Lösungsfälle!

a) $3x^2+2x-1=0$ b) $9x^2+3x+1=0$ c) $5x^2-4x-33=0$ d) $x^2-2x+1=0$ e) $-3x^2+5x+8=0$
f) $3x^2+6x+4=0$ g) $-7x^2+6x-2=0$ h) $2x^2-5x-12=0$ i) $100x^2-160x-777=0$ j) $-x^2+x+2=0$
k) $6x^2+5x+2=0$ l) $4x^2-30x-154=0$ m) $10x^2-107x-156=0$ n) $5x^2-12x+4=0$ o) $-5x^2-4x-1=0$

**4.18** Löse die Gleichung!

a) $1{,}5x^2+6{,}5x+2=0$ b) $-3{,}1x^2+4{,}7x-3{,}5=0$ c) $1{,}2x^2+3{,}1x-3=0$
d) $5{,}2x^2-5{,}2x+1{,}3=0$ e) $9{,}1x^2-8{,}4x-0{,}7=0$ f) $-0{,}9x^2-3{,}9x+11{,}4=0$
g) $-0{,}5x^2+1{,}7x+1{,}2=0$ h) $0{,}8x^2+1{,}6x+0{,}8=0$ i) $2{,}3x^2-0{,}1x+2{,}3=0$

**4.19** Ermittle alle Lösungen der Gleichung!

a) $5x^2+\sqrt{5}\,x-1=0$ b) $2x^2-2\sqrt{3}\,x+1=0$ c) $\sqrt{2}\,x^2-4\sqrt{2}\,x+\sqrt{2}=0$

**4.20** Löse die Gleichung!

a) $(x-2)(x+3)=6$ b) $0{,}4x^2+12x=-90$ c) $0{,}5x^2+4{,}5x-11=0$ d) $x^2-\sqrt{3}\cdot x-\frac{3}{2}=0$
e) $\frac{1}{2}x^2-7x+24=0$ f) $\frac{3}{4}x^2-5x+33=0$ g) $3x^2-2\sqrt{3}\,x-3=0$ h) $-6x^2+36x=-42$
i) $(2x-3)(3x+2)-(x+1)(4x-4)=10$ j) $(5x-3)^2-(3x+1)^2=15(x-2)^2$ k) $(3x+3)(1-x)+(2x-5)^2=4x+53$ l) $(5x-2)^2-4(2x-3)^2-333=0$

**4.21** Ermittle alle Lösungen der Gleichung!

a) $(2x-3)(x-9)+18=0$ b) $(4x-3)(2x+1)+5=0$ c) $3(x-1)(x+5)=-27$
d) $x(7x-2)=3x(4-x)+36x$ e) $3x(2x-1)+2x(3x-1)=-1$ f) $x(5x-2)=x(6-x)-2x$
g) $(x-5)(3x-4)=-12$ h) $(x+1)\left(4x-\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{4}=0$ i) $\left(\frac{x}{2}-1\right)\left(\frac{x}{3}+1\right)=-\frac{2}{3}$

**4.22** Ermittle alle Lösungen der Gleichung!

a) $(2x-2)(2x+6)-(3x-2)^2=(2x-5)^2-(2x+7)(2x-1)-217$
b) $15\cdot(x+4)^2=(5x+27)^2-(3x+19)^2$

(Malle et al. 2010, S. 71)

**936** Ermittle 1 graphisch, 2 rechnerisch die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden g und h und die Größe des Schnittwinkels!
a g: $X=(3|3)+t\cdot(3|-3)$ h: $X=(2|0)+s\cdot(1|-3)$ b g: $X=(2|-1)+t\cdot(3|-2)$ h: $X=(1|0)+s\cdot(1|-1)$
c g: $X=(2|-1)+t\cdot(3|-2)$ h: $X=(1|1)+s\cdot(1|-1)$ d g: $X=(-1|3)+t\cdot(4|1)$ h: $X=(1|0)+s\cdot(3|-1)$

**937** Ermittle 1 graphisch, 2 rechnerisch die Koordinaten des Schnittpunktes der Trägergeraden g und h der Strecken AB und CD und die Größe des Schnittwinkels!
a g: $A(-1|3)$, $B(3|4)$ h: $C(-2|4)$, $D(2|0)$ b g: $A(-3|2)$, $B(-1|-6)$ h: $C(-3|5)$, $D(2|0)$
c g: $A(-5|10)$, $B(-2|-2)$ h: $C(-4|6)$, $D(5|-3)$ d g: $A(2|-1)$, $B(-13|9)$ h: $C(2|0)$, $D(-5|7)$

**938** Ermittle mit den Angaben von Aufg. 938 1 graphisch, 2 rechnerisch, ob die *Strecken* AB und CD einander schneiden! 3 In welchem Teilverhältnis teilt der Schnittpunkt (der Trägergeraden) die Strecken AB und CD?

**939** Ermittle 1 graphisch, 2 rechnerisch die Lage der Geraden g zum Koordinatensystem! In welchem Abstand vom Ursprung schneidet die Gerade jede der Koordinatenachsen? Welchen Abstand hat g vom Ursprung?
▸▸ a g: $X=(3|6)+t\cdot(3|-3)$ b g: $X=(2|3)+t\cdot(2|-3)$ c g: $X=(7|10)+t\cdot(0|5)$ d g: $X=(3|-2)+t\cdot(-3|-$
e g: $X=(1|-5)+t\cdot(-1|-1)$ f g: $X=(1|6)+t\cdot(1|-3)$ g g: $X=(6|-4)+t\cdot(3|-2)$ h g: $X=(6|-2)+t\cdot(3|-$

**940** Die Geraden a, b und c sind die Trägergeraden der Seiten eines Dreiecks. Ermittle 1 graphisch, 2 rechnerisch die Koordinaten der Eckpunkte, die Längen der Höhen und den Umfang! 3 Liegt ein besondere Dreieck vor?
a a: $X=(-1|0)+r\cdot(1|-4)$, b: $X=(8|-4)+s\cdot(-5|4)$, c: $X=(0|-4)+t\cdot(3|4)$
b a: $X=(-6|1)+r\cdot(12|-5)$, b: $X=(3|0)+s\cdot(-3|4)$, c: $X=(2|5)+t\cdot(-4|-2)$
c a: $X=(0|-1)+r\cdot(5|2)$, b: $X=(8|0)+s\cdot(6|-2)$, c: $X=(-1|3)+t\cdot(4|6)$
d a: $X=(-1|3)+r\cdot(5|0)$, b: $X=(6|2)+s\cdot(2|-3)$, c: $X=(-10|-4)+t\cdot(8|3)$

**941** ▸▸ Die vier Geraden a, b, c und d sind die Trägergeraden der Seiten eines Vierecks. Ermittle 1 graphisch, 2 rechnerisch die Koordinaten der Eckpunkte, den Umfang, alle Winkel und den Typ des Vierecks!
▸▸ a a: $X=(0|4)+r\cdot(1|2)$, b: $X=(7|-2)+s\cdot(2|-1)$, c: $X=(7|3)+t\cdot(1|2)$, d: $X=(-7|0)+u\cdot(-2|1)$
b a: $X=(3|5)+r\cdot(1|1)$, b: $X=(4|2)+s\cdot(1|5)$, c: $X=(7|1)+t\cdot(3|-1)$, d: $X=(0|-2)+u\cdot(-3|1)$
c a: $X=(-1|-2)+r\cdot(-3|1)$, b: $X=(3|0)+s\cdot(1|3)$, c: $X=(0|3)+t\cdot(2|0)$, d: $X=(2|7)+u\cdot(3|4)$
d a: $X=(1|-6)+r\cdot(-2|3)$, b: $X=(5|1)+s\cdot(3|2)$, c: $X=(3|4)+t\cdot(3|2)$, d: $X=(0|2)+u\cdot(2|-3)$
e a: $X=(-4|-1)+r\cdot(1|1)$, b: $X=(1|1)+s\cdot(2|-1)$, c: $X=(5|1)+t\cdot(2|1)$, d: $X=(1|-4)+u\cdot(1|-1)$
f a: $X=(6|2)+r\cdot(5|-1)$, b: $X=(1|3)+s\cdot(-1|5)$, c: $X=(7|-3)+t\cdot(5|-1)$, d: $X=(-3|-1)+u\cdot(1|-5)$
g a: $X=(7|-2)+r\cdot(-3|3)$, b: $X=(-2|1)+s\cdot(3|1)$, c: $X=(-5|0)+t\cdot(3|-2)$, d: $X=(-1|-1)+u\cdot(-3|-1)$
h a: $X=(1|1)+r\cdot(3|1)$, b: $X=(5|-1)+s\cdot(-1|3)$, c: $X=(6|6)+t\cdot(3|1)$, d: $X=(-1|-3)+u\cdot(-1|3)$

(Götz & Reichel 2010, S. 255)

PH NÖ PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE NIEDERÖSTERREICH

universität wien

**Neues Wissen**

Innerhalb der Menge der reellen Zahlen lassen sich die elementaren Rechenoperationen

- Addition
- Subtraktion
- Multiplikation
- Division durch eine Zahl $\neq 0$

ausführen. Das Resultat ist stets wieder eine reelle Zahl.

**Definition**

Eine Menge M heißt **abgeschlossen** bezüglich einer Rechenoperation $(+, -, \cdot, :)$, wenn das Ergebnis der Rechenoperation wieder ein Element von M ist.

**Satz**

Die reellen Zahlen sind abgeschlossen bezüglich der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division durch eine Zahl $\neq 0$.

Zusammengesetzte Ausdrücke wie $\frac{7}{12}\pi$, $\frac{7}{12}+2$, $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ oder $\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}$, deren Teilausdrücke reelle Zahlen sind, bezeichnen wieder reelle Zahlen.
Manche solcher Ausdrücke wie zum Beispiel $\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}$ können weiter vereinfacht werden, andere liegen bereits in ihrer einfachsten Darstellungsform vor.

53 Für welche der nachfolgenden Operationen ist das Resultat immer eine ganze Zahl, wenn $a, b \in \mathbb{Z}$? Kreuze an.

☐ $-\frac{a}{b}$ ☐ $a \cdot b$ ☐ $\sqrt{a}$ ☐ $a + b$ ☐ $b - a$

54 Kreuze jene Ausdrücke an, die eine reelle Zahl darstellen, und begründe deine Entscheidung.

☐ $\frac{\sqrt{32}-\sqrt{31}}{\sqrt{32}+\sqrt{31}}$ ☐ $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{2}}$ ☐ $\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{4}-2}\right)$ ☐ $3\pi^2\sqrt{5}$

(Bleier et al. 2017, S. 20)

„Bevor Schülerinnen und Schüler Mathematik betreiben können, müssen sie sich erst einmal bestimmte Fertigkeiten und Kenntnisse aneignen. Das geschieht durch Wiederholung und langsames Erhöhen der Schwierigkeit."

„Das Erarbeiten von mathematischen Begriffen wird getrennt von der Übung und Anwendung dieser Begriffe. Das Erstere geschieht unter sanfter Begleitung des Lehrers, das Zweite ist die Übepflicht des Schülers."

(Leuders 2009a, S. 133)

# Wofür Üben?

# Was kann man alles üben?

| Fähigkeitsaspekt | am Beispielthema „Quadratische Gleichungen“ |
|---|---|
| Kenntnisse | die Struktur bzw. kennen und wiedererkennen; Spezialfälle als solche identifizieren |
| Fertigkeiten | Lösungen ermitteln (mit und ohne Technologie) |
| Verstehen / Vorstellungen | über mögliche Anzahlen und Arten von Lösungen Bescheid wis |
| Anwendungsfähigkeit | in nicht vertrauten Situationen quadratischen Gleichungen identifizieren und nutzen |
| (übergreifende) Strategien | Teil der quadratischen Gleichung als Funktionsterm zur Beschreibung von quadratischen Abhängigkeiten abstrahieren |
| Reflexionsfähigkeit | entscheiden können, wie viele Lösungen existieren |
| Einstellungen | … und auch dazu bereit sein. |

Erkennen von Termstrukturen
(Fischer & Malle 1985, S. 65)

(Leuders 2009a, S. 133)

# Kenntnisse – abseits des Solve-Befehls

Die vier Spalten enthalten quadratische Gleichungen, die bzgl. ihrer Struktur Gemeinsamkeiten aufweisen. Finde heraus welche und gib passende Überschriften an!

| Lösbar durch Hinsehen | Elementarmformung(en) nötig | Erst ausmultiplizieren – dann lösen | Anwenden der Lösungsformeln |
|---|---|---|---|
| $x^2 = -14$ | $-2x^2 = 3x^2 + 15x - 10$ | $(x-5)(x+3) = 9$ | $x^2 + x - 4 = 0$ |
| $-10 = (x+4)^2$ | $25x^2 - 100x + 50 = 0$ | $(2x-7)^2 = 20$ | $x^2 + 2x - 10 = 0$ |
| $4x \cdot (3x+12) = 0$ | $\frac{1}{51}x^2 + \frac{5}{17}x - \frac{9}{34} = 0$ | $4x \cdot (3x+12) = 0$ | $3x^2 - \frac{4}{11}x - \frac{11}{7} = 0$ |
| | $40 = 8x^2$ | $(x+3) = \frac{6}{(x-9)}$ | |
| $(x-5)(x+3) = 0$ | $x^2 = -16x - 64$ | $(x-5)(x+3) = 0$ | |
| | $x^2 + 9x - 20 = 16$ | | |

(Block 2018)

# Kenntnisse

$$(2x-4)\cdot(2x+4)-(3x-5)^2=(2x-7)^2-(2x+5)\cdot(2x-3)-217$$

$$-x^2=6x+9$$

$$(x+1)^2=52-(x-1)^2$$

$$11x^2=-4{,}4x$$

$$(1-5x)\cdot(5x+1)=-24$$

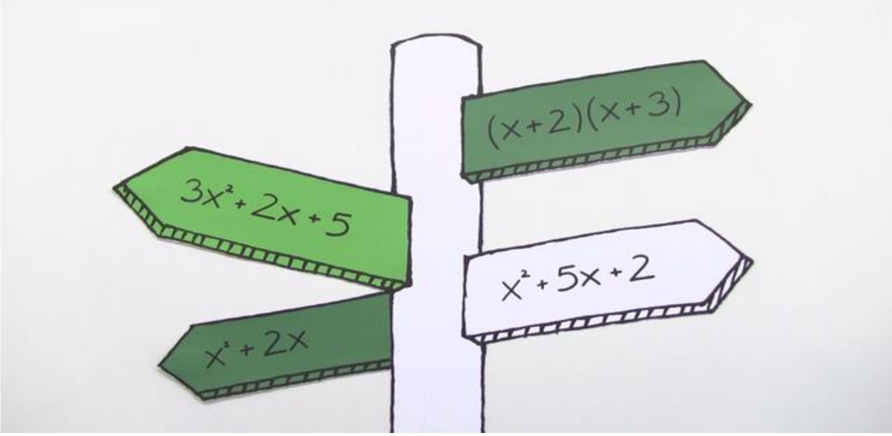
$$-6x-2\cdot\sqrt{2}+5\cdot\sqrt{2}\cdot x^2=0$$

$$64x^2-25=0$$

$$5x^2=-50$$

1. Ordne die Gleichungen nach ihrer **Struktur**!

2. Ordne die Gleichungen nach möglichen **Lösungsstrategien**!



# Kenntnisse

## Gleichungen sortieren

**Schreibe die Gleichungen auf Kärtchen und schneide sie aus. Sortiere die Karten mit den Gleichungen. Nenne deine Kriterien und erläutere sie.
Beachte: Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Gleichungen zu sortieren.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| A<br>$-2x^2 = 3x^2 + 15x - 10$ | B<br>$x^2 + 4x = 0$ | C<br>$(x-8)^2 = 0$ | D<br>$2x + x^2 - 10 = 0$ |
| E<br>$-10 = (x+4)^2$ | F<br>$x^2 + x - 4 = 0$ | G<br>$x^2 = -16x - 64$ | H<br>$(x-5)(x+3) = 9$ |
| I<br>$6x^2 - 15 = 0$ | J<br>$x^2 = x$ | K<br>$5x^2 = -26$ | L<br>$(2x-7)^2 = 20$ |
| M<br>$40 = 8x^2$ | N<br>$4x \cdot (3x+12) = 0$ | O<br>$4x^2 + 16x + 20 = 0$ | P<br>$x^2 = 50$ |
| Q<br>$(x-5)(x+3) = 0$ | R<br>$(x+3) = \frac{6}{(x-9)}$ | S<br>$x^2 = -14$ | T<br>$x^2 + 9x - 20 = 16$ |

(Block 2018, S. 23)

**Weiterführende Arbeitsschritte:**

- Such dir drei Aufgaben aus! Löse sie! Begründe, warum du diese gewählt hast!
- Stell dir vor, du musst alle Aufgaben lösen und darfst fünf aussortieren. Welche würdest du aussortieren? Warum?

(Block 2018, S. 24)

# Verstehen / Vorstellungen

„Schließlich lässt sich der kognitive Anspruch einer Aufgabe als hoch charakterisieren, wenn […] Reflexionen […] nötig sind […].“
(Drüke-Noe & Siller 2018, S. 3)

Finde eine quadratische Gleichung, die

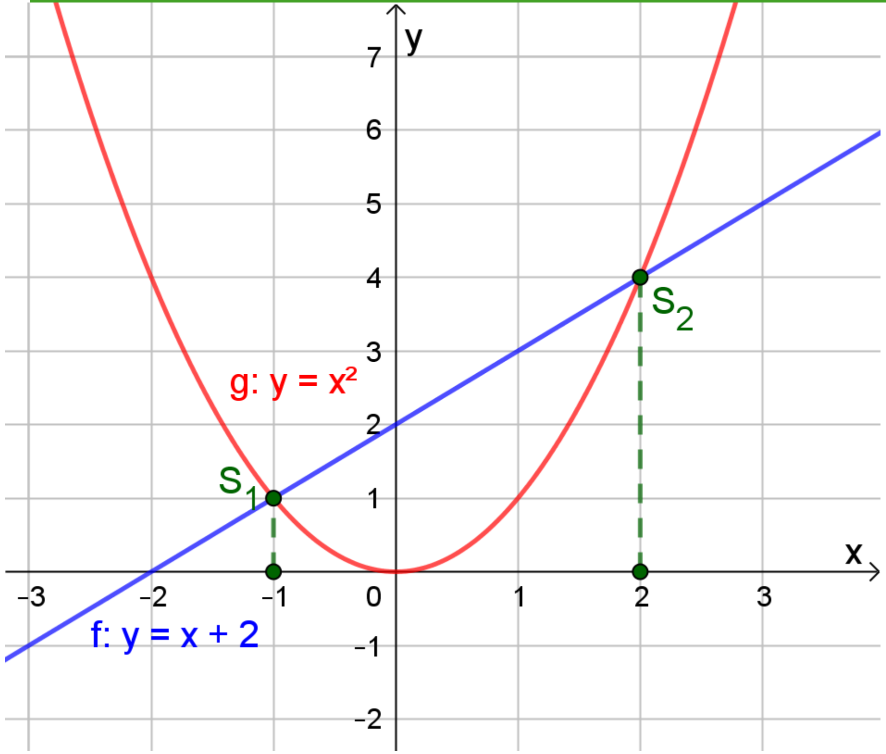
1) nur eine Lösung hat!
2) nur 1 als Lösung hat!
3) keine (reelle) Lösung hat!
4) die Lösungen -2 und +3 hat!
5) die Lösungen 1, 2 und 3 hat!
6) 0 als Lösung hat!
7) 0 als Lösung hat und für die $q \neq 0$ bzw. $c \neq 0$ gilt!

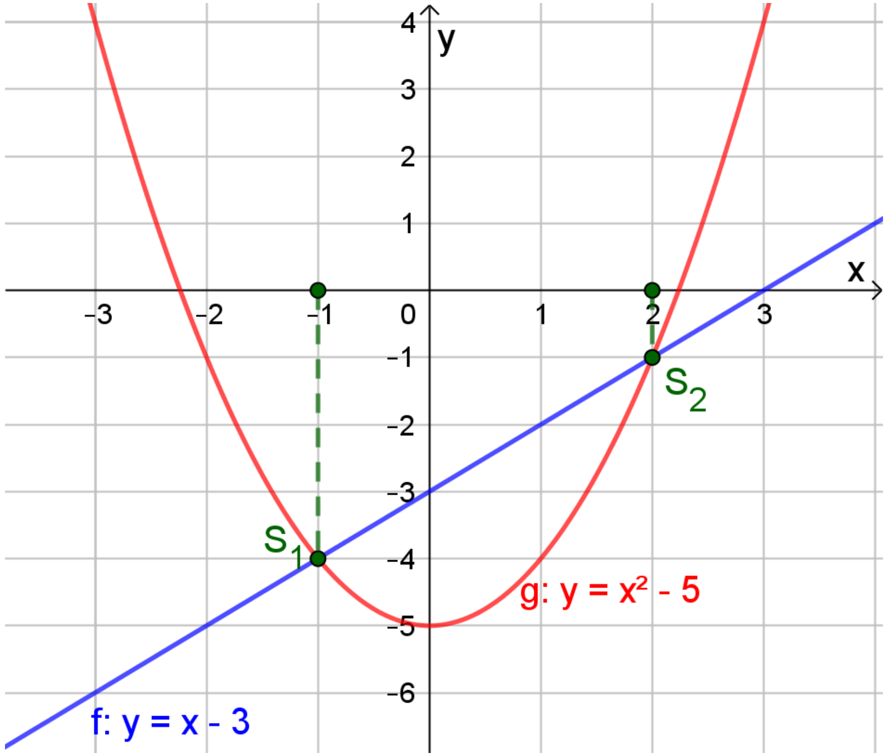
# (Übergreifende) Strategien

Gegeben ist die Gleichung $x^2 - x - 2 = 0$.

☞ Finde verschiedene grafische Lösungsmöglichkeiten und führe sie durch!

☞ Wo können die Lösungen jeweils abgelesen werden?




Mehrere Repräsentationsformen (**Gleichung – Funktion – Graph**), die durch Transformationen in einander übergeführt werden müssen.

(Drüke-Noe & Siller 2018, S. 5)

# Eine mögliche Reifeprüfungsaufgabe

Quadratische Gleichungen können in der Menge der reellen Zahlen keine, genau eine oder zwei verschiedene Lösungen haben.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie jeder Lösungsmenge *L* die entsprechende quadratische Gleichung in der Menge der reellen Zahlen zu!

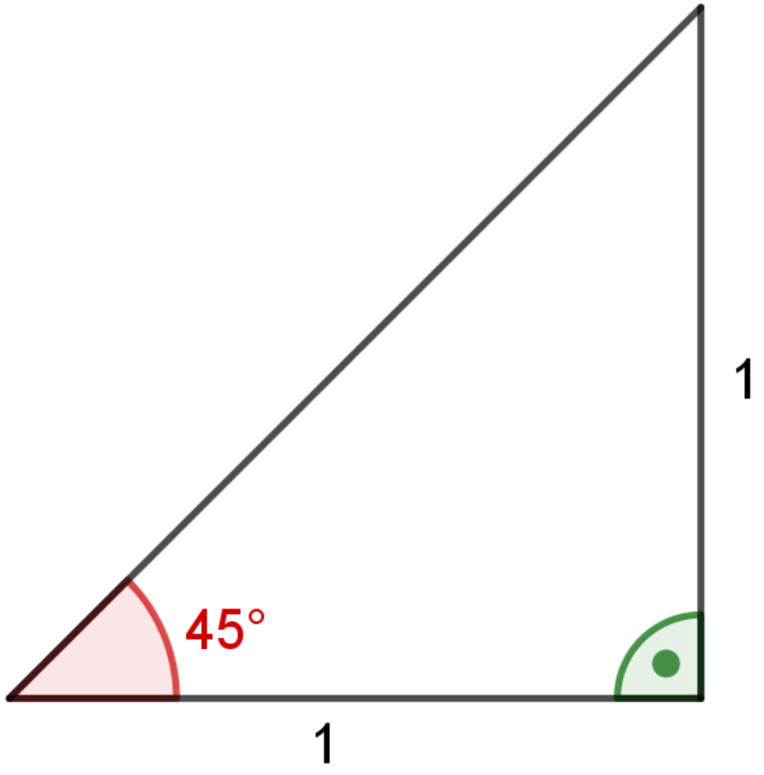
| | |
|---|---|
| $L = \{\ \}$ | |
| $L = \{-4;\ 4\}$ | |
| $L = \{0;\ 4\}$ | |
| $L = \{4\}$ | |

| | |
|---|---|
| A | $(x + 4)^2 = 0$ |
| B | $(x - 4)^2 = 25$ |
| C | $x(x - 4) = 0$ |
| D | $-x^2 = 16$ |
| E | $x^2 - 16 = 0$ |
| F | $x^2 - 8x + 16 = 0$ |

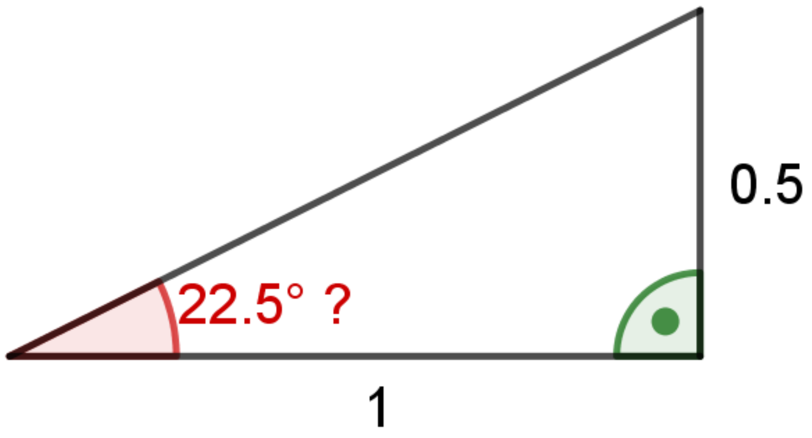
(Übungsklausuren für die SRP in Mathematik o. J., https://aufgabenpool.srdp.at)

# Reflektierendes Üben

Beim Einüben einer Fertigkeit soll auch zur Reflexion des verwendeten Verfahrens angeregt werden.

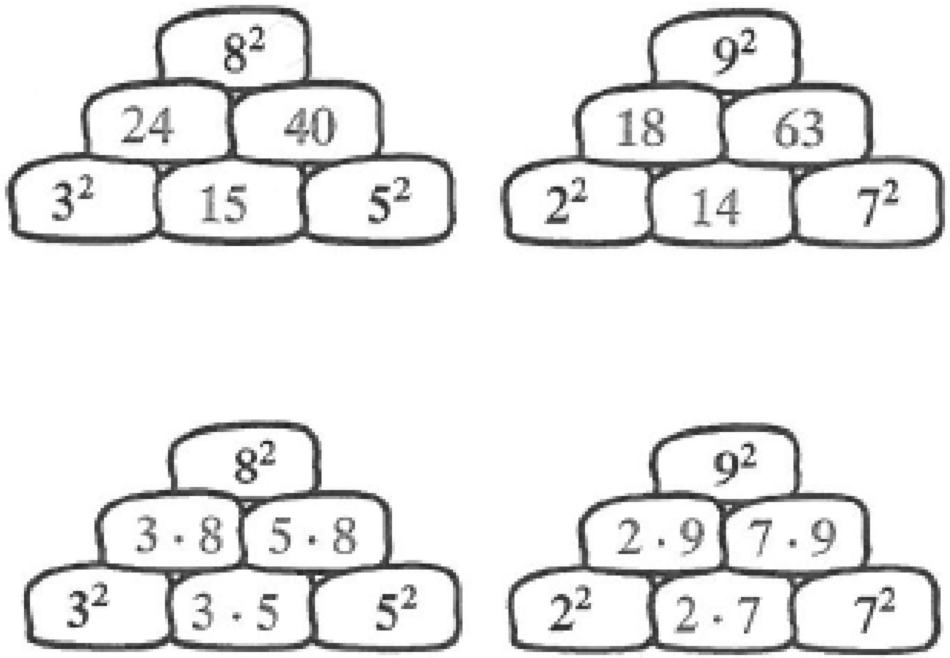


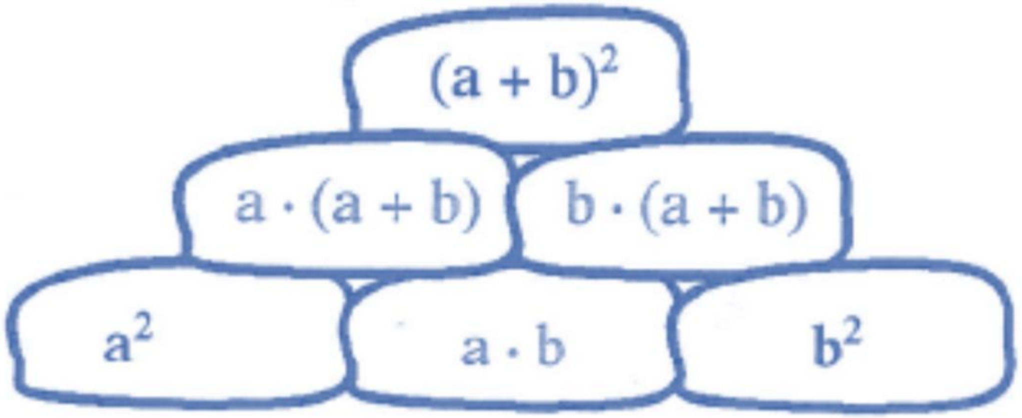

100% Steigung entspricht 45° Steigungswinkel.
Sind 200% dann 90°?



# Reflektierendes Üben

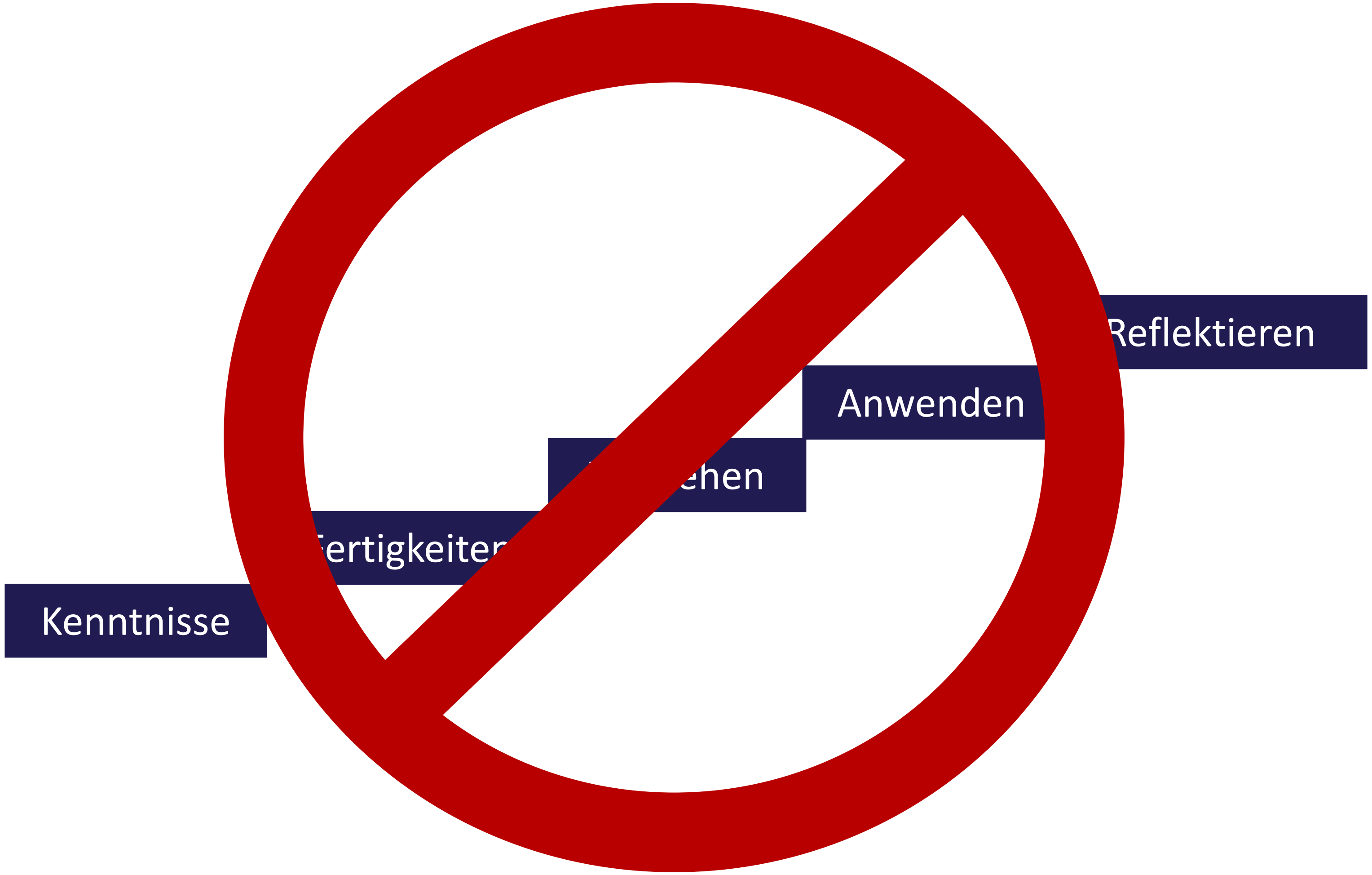
## Zahlenmauern zur Reflexion der Binomischen Formel:



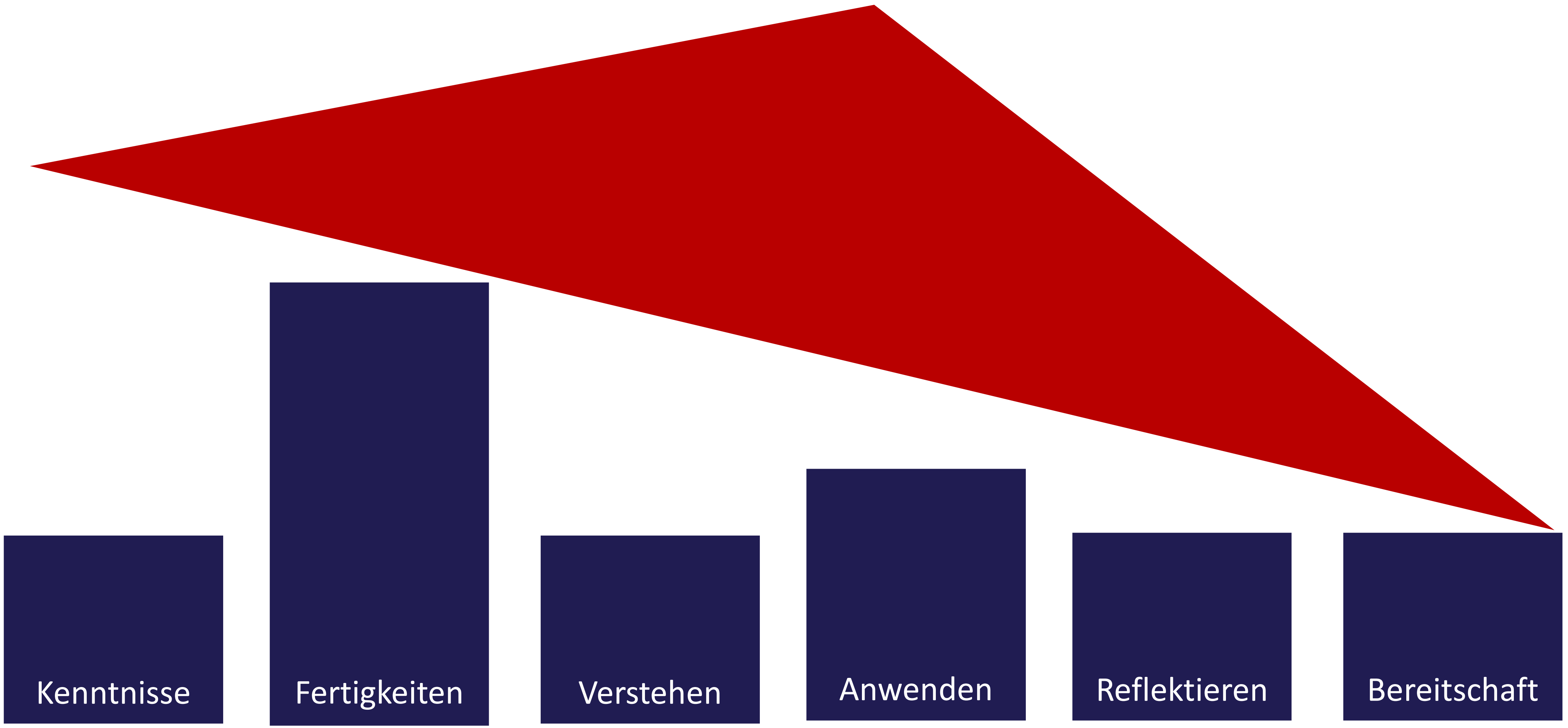




Gibt es Zahlenmauern mit zwei oder drei Basissteinen, die nur mit Quadratzahlen befüllt werden?

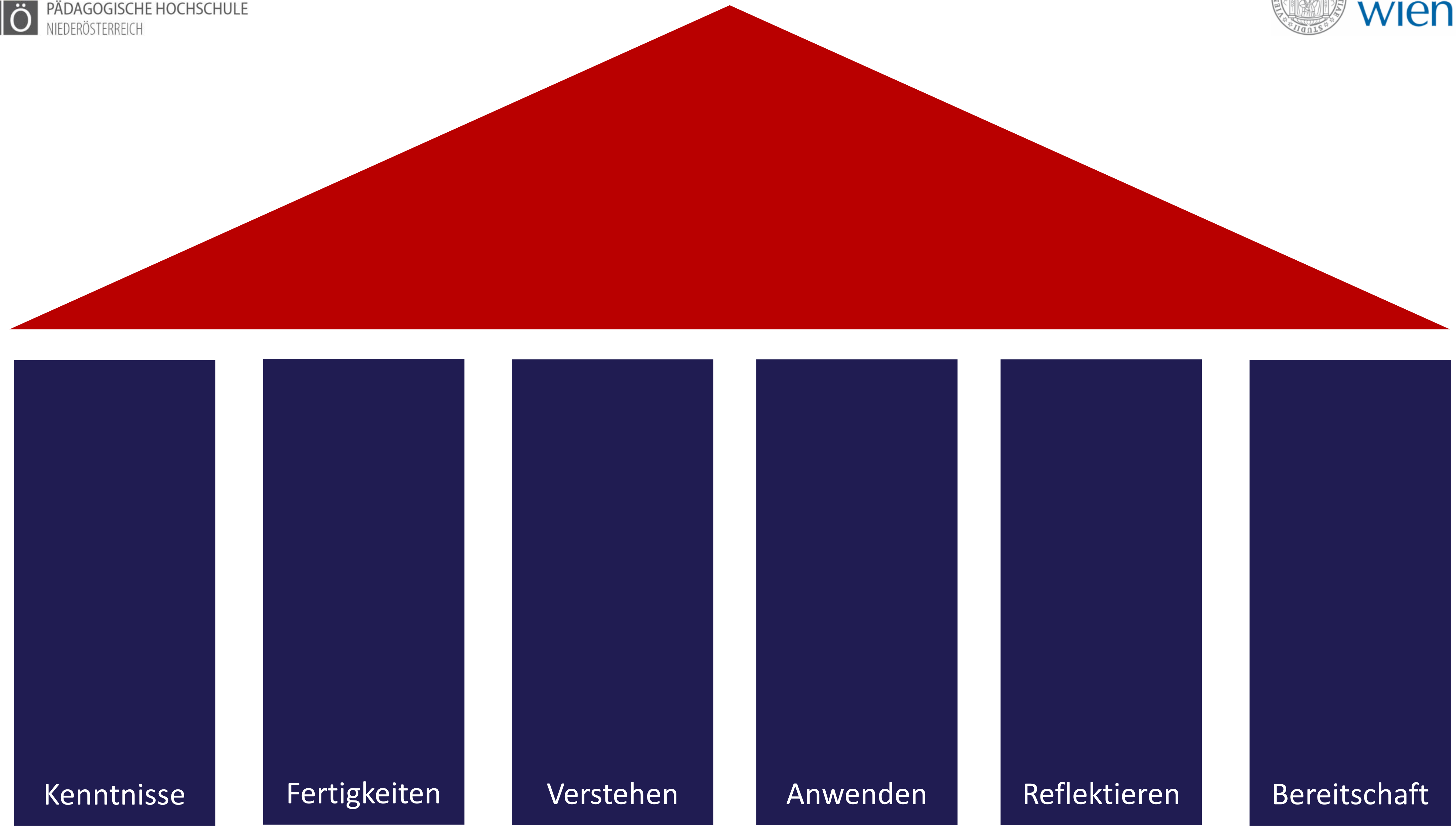
(Müller 2005, S. 34)




(Leuders 2009b, Folie 13 auf DVD)




(Leuders 2009b, Folie 14 auf DVD)




(Leuders 2009b, Folie 15 auf DVD)

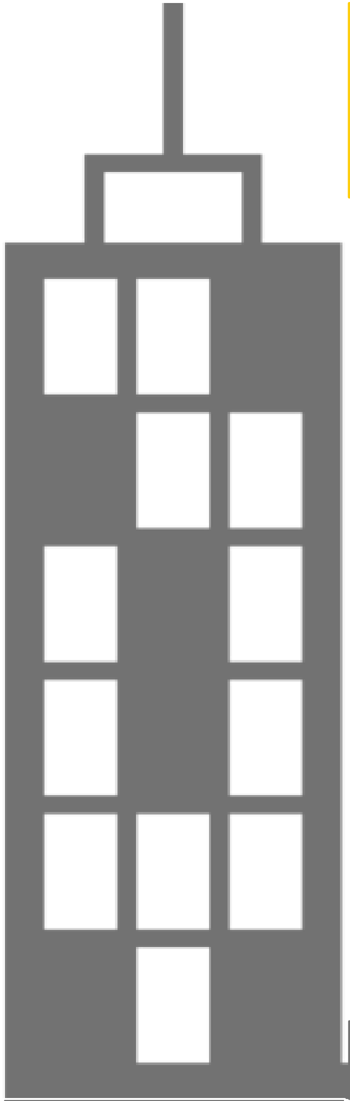
# Kognitiver Anspruch und Schwierigkeit einer Aufgabe

1) **niedrig:** einschrittige Aktivitäten, direkt aus der Aufgabenstellung ersichtlich
2) **mittel:** mehrschrittige Aktivitäten, bei denen Querverbindungen herzustellen sind
3) **hoch:** komplexe Prozesse, Reflexionen, Verallgemeinerungen

☞Lösungsquote alleine definiert die Schwierigkeit einer Aufgabe: empirischer Ansatz (Drüke-Noe & Siller 2008, S. 4)

PH NÖ PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE NIEDERÖSTERREICH

universität wien



Finde eine quadratische Gleichung, die keine ganzzahligen aber rationale Lösungen hat!

$$-2x^2 - 8x + 42 = 0$$

Kogn. Anspruch

$$-2x^2 - 8x + 42 = 0$$

Finde eine quadratische Gleichung, die keine ganzzahligen aber rationale Lösungen hat!

Schwierigkeit

PH NÖ PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE NIEDERÖSTERREICH

universität wien

## Schwierigkeitsbestimmende Merkmale von Aufgaben

- Zugehörigkeit zu einer Klassenstufe
- Inhaltliche Komplexität und Anzahl der zu steuernden Denkprozesse
- Offenheit der Aufgabenstellung
- Art des Kontextes
- Erfordernis, zu begründen
- Komplexität der involvierten Handlungsprozesse
- Sprachlogische Komplexität

## Merkmale einfacher Aufgaben

- Niedrige kognitive Anforderungen
- Einschrittig zu lösen
- Durch Vorwärtsarbeiten zu lösen
- Vertrauter Kontext
- Einfaches Zahlenmaterial
- Kaum Text
- Aufgabentext erklärt, was zu tun ist
- Keine Argumentation

(Drüke-Noe 2018, S. 11 f.)

# Gruppenexplorationen für heterogene Lerngruppen – Differenzieren durch parallele Aufgaben

- Möglichst viele Stammbrüche finden, deren Summe wieder ein Stammbruch ist.

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \qquad \frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} \qquad \frac{1}{6} = \frac{1}{15} + \frac{1}{10}$$

- Finden aller neunstelligen Zahlen, bei denen die Ziffern 1 bis 9 genau einmal vorkommen und die durch 99 teilbar sind.

197845362 286734591

insgesamt 31680

(Büchter & Leuders 2005, S. 110)

# Wie entwickelt man gute Übungsaufgaben?

PH NÖ PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE NIEDERÖSTERREICH

universität wien

# Kennzeichen intelligenten Übens

- Strukturen, die „Lernen und Üben nach den Prinzipien des aktiven und entdeckenden Lernens“ (Rott 2018, S. 18) ermöglichen

*„Das Lernen von Mathematik ist um so wirkungsvoller [...], je mehr es im Sinne eigener aktiver Erfahrungen betrieben wird, je mehr der Fortschritt im Wissen, Können und Urteilen des Lernenden auf selbständigen entdeckerischen Unternehmungen beruht.“* (Winter 2016, S. 1)

- Differenzieren: Schwache fördern, Starke fordern
- Reflektieren: Zum Nachdenken motivieren

# Von Testitems zu Lernaufgaben: Strategien

IKM

Informelle Kompetenzmessung

5. bis 9. Schulstufe 2017

(H,I,K) identifizieren

1. Kontextualisierung
2. Öffnen der Aufgabe
    a. Zielumkehr
    b. Variationen
3. Begründungen einfordern
4. Gegenbeispiele einfordern
5. Aussagen begründen lassen
6. Anwendungsbeispiele erfragen
7. Grenzen eines Modells erfragen

(Götz & Süss-Stepancik 2018)

# Vor dem Erstellen klären:

**Welches ist die Tätigkeit, die geübt werden soll?**

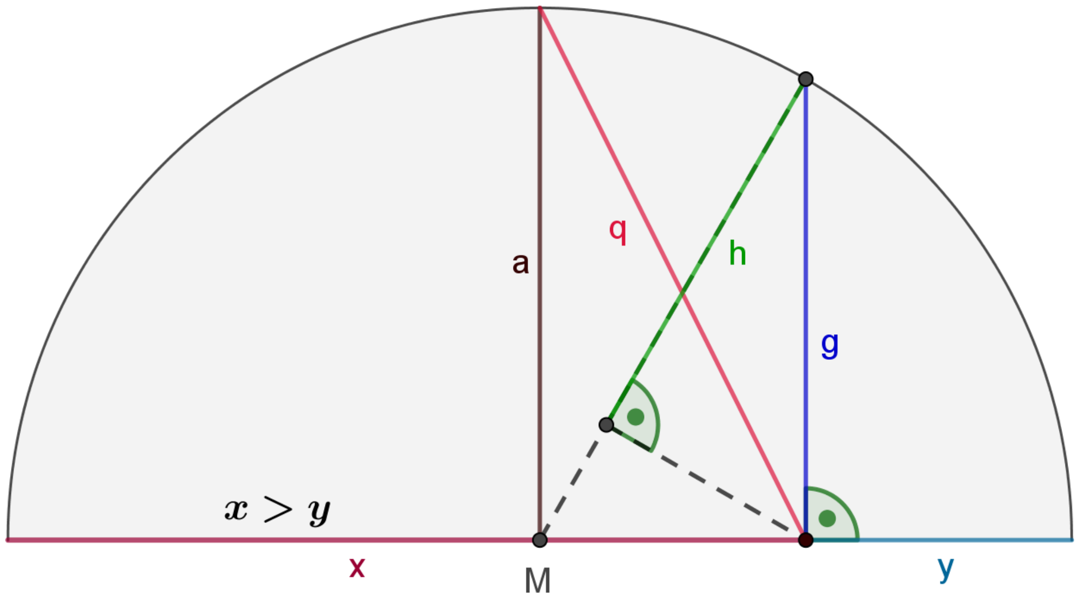
- Das WIEDERGEBEN VON WISSEN (Zusammenhänge, Bezeichnungen, …) – wenn ja: Welche?
  - ☞ z. B.: Definition des arithmetischen Mittels, $\sum_{i=1}^{n} x_i = n \cdot \overline{x}$
- Das AUSFÜHREN VON VERFAHREN – wenn ja: Welches?
  - ☞ z. B.: Bestimmen von Quartilen
- Das ANWENDEN VON BEGRIFFEN – wenn ja: Welche und auf welche Weise?
  - ☞ z. B.: Schularbeitsnoten versus Punkteanzahlen – Kann man hier sinnvollerweise den Median bestimmen?

# Vor dem Erstellen klären:

## Welches ist die Tätigkeit, die geübt werden soll?

- Das HERSTELLEN VON BEZIEHUNGEN – wenn ja: Welche?

☞ z. B.: $a(x,y) = \dfrac{x+y}{2}$; $g(x,y) = \sqrt{xy}$; $h(x,y) = \dfrac{2xy}{x+y}$; $q(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$




$h \leq g \leq a \leq q$

PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE NIEDERÖSTERREICH

universität wien

# Drei Strategien zur Erstellung

Gegeben: Werte bzw. Objekte
Gesucht: Größen

Aufgaben umkehren →

Gegeben: Größe
Gesucht: Werte bzw. Objekte

Routineaufgaben

Erweiterung →

Routineaufgaben + Störaufgabe

Übungsaufgaben

Auswahl →

Serie von Aufgaben, die auf das Erkennen eines Musters abzielen

(Rott 2018, S. 19)

# I. Umkehren von Aufgaben

GK 888

Die Finanzministerin verspricht allen Unternehmen ab 20 Mitarbeitern einen Bonus von € 1000. Ein Bürgermeister kündigt begeistert an: „Wir werden mehr als 20 000 € bekommen, da die Firmen unseres Ortes durchschnittlich 22 Mitarbeiter haben!" Eine skeptische Bürgerin widerspricht: „Wir haben 21 Unternehmen. Eines davon hat 300 Arbeiter. Mir sind zwar die anderen Zahlen nicht bekannt, aber es können höchstens 8 Unternehmen den Bonus bekommen. Rechnen Sie nach, Herr Bürgermeister!"
Zeige, wie der Bürgermeister und die Skeptikerin auf ihre Zahlen kommen.

Bürgermeister: $21 \cdot 1000 = 21000 > 20000$

Skeptikerin: $21 \cdot 22 = 462; 462 - 300 = 162; x \cdot 20 + (20 - x) \cdot 1 \leq 162$ → $x \leq 7$ → höchstens 8 Firmen

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n \cdot \overline{x}$$

(Bleier et al. 2018, S. 307)

# Teil 1-Aufgabe 20 des 1. Nebentermins, 20. September 2018

## Änderung einer Datenliste

Gegeben ist eine Datenliste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit $n$ Werten und dem arithmetischen Mittel $a$. Diese Datenliste wird um zwei Werte $x_{n+1}$ und $x_{n+2}$ ergänzt, wobei das arithmetische Mittel der neuen Datenliste $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$ ebenfalls $a$ ist.

**Aufgabenstellung:**

Geben Sie für diesen Fall einen Zusammenhang zwischen $x_{n+1}$, $x_{n+2}$ und $a$ mithilfe einer Formel an!

$$a = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \Rightarrow a \cdot n = x_1 + \cdots + x_n \Rightarrow \frac{a \cdot n + x_{n+1} + x_{n+2}}{n+2} = a \Rightarrow \frac{x_{n+1} + x_{n+2}}{2} = a$$

# II. Einstreuen von Störaufgaben

Evelyn und Stefan sind Zwillinge, aber einander gar nicht ähnlich. Hier sind ihre errechneten Durchschnittswerte. Wie groß, wie schwer und wie alt könnten sie sein?

a) Durchschnittliche Größer: 155 cm

b) Durchschnittliches Gewicht: 45 kg

c) Durchschnittliches Alter: 12 Jahre 45 Tage

(Rott 2018, S. 20)

# III. Muster erkennen und nützen

3 Schubladenschränke

(1)

| |
|---|
| 1, 5, 9 |
| 2, 5, 8 |
| 3, 5, 7 |

(2)

| |
|---|
| 5, 7, 9, 11, 13 |
| 20, 22, 24, 26, 28 |
| 49, 51, 53, 55, 57 |

(3)

| |
|---|
| 8, 10, 12, 14 |
| 16, 18, 20, 22 |
| 24, 26, 28, 30 |

(4)

| |
|---|
| 30, 80, 20, 10, 10 |
| 30, 80, 20, 10, 20 |
| 30, 80, 20, 10, 30 |

(5)

| |
|---|
| 1, 6, 8, 9 |
| 3, 8, 10, 11 |
| 5, 10, 12, 13 |

(6)

| |
|---|
| 5, 8, 10, 15, 17 |
| 10, 16, 20, 30, 34 |
| 15, 24, 30, 45, 51 |

a) Berechne jeweils den Durchschnitt der Zahlen in jeder Schublade. Schreibe auch auf, was dir bei jedem Schrank auffällt.
b) Erkläre alle Entdeckungen, die du in a) gemacht hast.
c) Erfinde ähnliche, eigene Schubladenschränke und lass sie von deinem Nachbarn untersuchen.

Zum Beispiel zu (6):
$x_i \longrightarrow y_i = a \cdot x_i \Longrightarrow \overline{x} \longrightarrow \overline{y} = a \cdot \overline{x}$

(Leuders 2009a, S. 132)

# III. Muster erkennen und nützen

**Berechne die Ableitungen und trage deine Ergebnisse in die Tabelle ein.**

| | **A1:** $f_1(x) = x \cdot e^x$ | **A2:** $f_2(x) = (1 + x) \cdot e^x$ | **A3:** $f_3(x) = (2 + x) \cdot e^x$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | |
| $f''(x)$ | | | |
| $f'''(x)$ | | | |

1) Welche Auffälligkeiten erkennst du bei den berechneten Ableitungen?
2) Beschreibe das entdeckte Muster durch eine allgemeine Formel!
3) Begründe deine Entdeckungen mithilfe der allgemeinen Formel!

(Wessel 2018, S. 39)

# Noch drei Strategien …

„beliebige“ Aufgaben → Begründungen einfordern → Gilt das immer? Zeige, dass es keine anderen … gibt!

Fehler finden in vorgegebenem/r Text, Gleichungsumformung, … → Verbalisieren → Was hat … falsch gemacht? Worin besteht der Fehler? Stelle richtig!

Vernetzen: Verbindungen herstellen z. B.: Geometrie – Algebra → Übersetzen → Skizziere eine geometrische Darstellung zu $x \cdot (x + 2) = 8$!

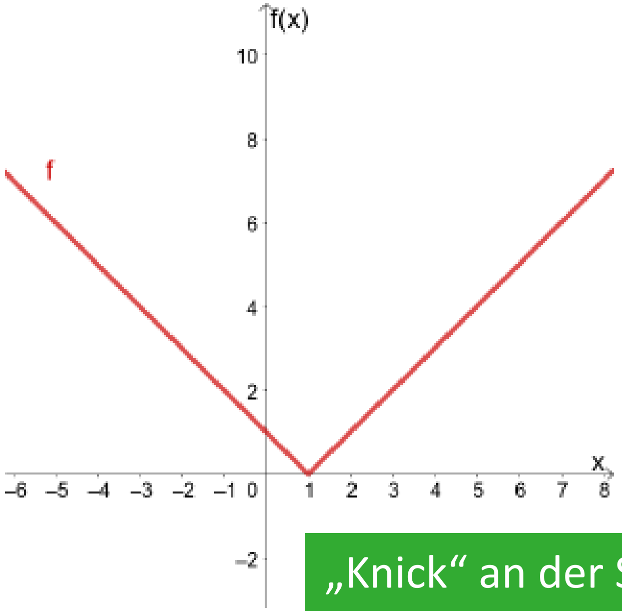
(Goy 2018, MatheWelt)

# IV. Begründungen einfordern

Welche der folgenden Eigenschaften haben die Funktionen jeweils **auf ganz** $\mathbb{R}$? Kreuzen Sie an!

(a) $f\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f(x) = |x - 1|$

- ☐ unstetig.
- ☐ stetig, aber nicht differenzierbar.
- ☐ differenzierbar.




„Knick" an der Stelle 1: links- und rechtsseitiger Grenzwert der Ableitung stimmen nicht überein.

Lösungsquote: 80%; $n$ = 211; Anfang 5. Semester (2018)

PH NÖ PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE NIEDERÖSTERREICH

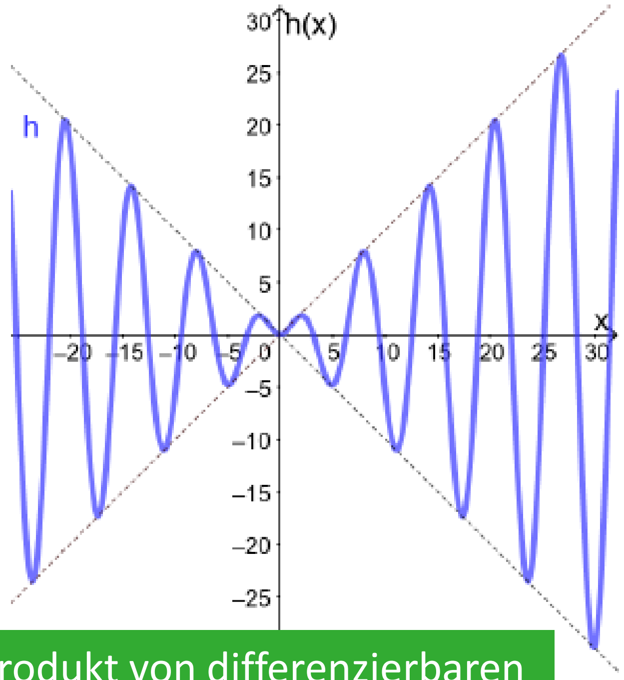
universität wien

# IV. Begründungen einfordern

Welche der folgenden Eigenschaften haben die Funktionen jeweils **auf ganz** $\mathbb{R}$? Kreuzen Sie an!

(c) $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x \sin(x)$

- ☐ unstetig.
- ☐ stetig, aber nicht differenzierbar.
- ☐ differenzierbar.




Produkt von differenzierbaren Funktionen ist differenzierbar: Produktregel.

Lösungsquote: 69%; $n$ = 210

PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE NIEDERÖSTERREICH

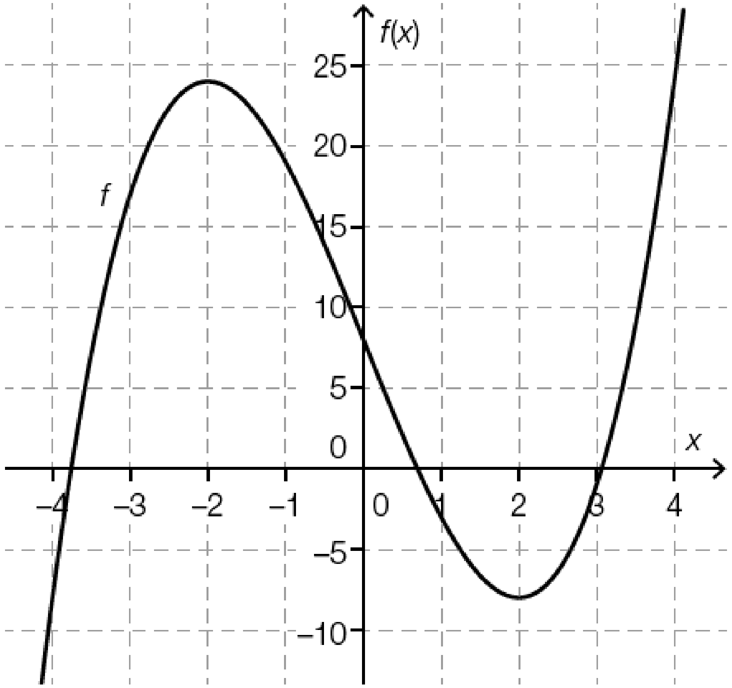
universität wien

# Teil 1-Aufgabe 16 aus dem 2. Nebentermin, 15. Jänner 2019

## Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion dritten Grades $f$. Die Stellen $x = -2$ und $x = 2$ sind Extremstellen von $f$.

An der Stelle $x = 2$ befindet sich ein Extremum.




Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

| | |
|---|---|
| $f'(0) = 0$ | ☐ |
| $f''(1) > 0$ | X |
| $f'(-3) < 0$ | ☐ |
| $f'(2) = 0$ | X |
| $f''(-2) > 0$ | ☐ |

Leicht: einschrittig, Vorwärtsarbeiten

# Teil 1-Aufgabe 15 aus dem 2. Nebentermin, 15. Jänner 2019

## Zusammenhang zwischen Funktion und Stammfunktionen

Die Funktionen $g$ und $h$ sind unterschiedliche Stammfunktionen einer Polynomfunktion $f$ vom Grad $n \geq 1$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

| | |
|---|---|
| $g'(x) = h'(x)$ | X |
| $g(x) + h(x) = c,\ c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ | |
| $\int_0^2 g(x)\,dx = f(2) - f(0)$ | |
| $\int_0^2 f(x)\,dx = h(2) - h(0)$ | X |
| $g(x) = c \cdot h(x),\ c \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ | |

Hauptsatz der Diff.-Int.-Rechnung – Zweiter Teil

Mittel: Vorwärtsarbeiten, inhaltliche Komplexität

PH NÖ PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE NIEDERÖSTERREICH

universität wien

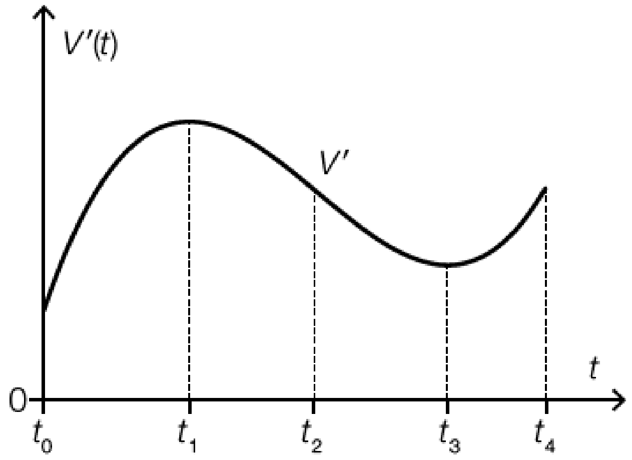
# Teil 1-Aufgabe 14 aus dem 2. Nebentermin, 15. Jänner 2019

## Veränderung eines Flüssigkeitsvolumens

Zwischen den Zeitpunkten $t_2$ und $t_3$ ist $V'$ positiv, daher nimmt das Flüssigkeitsvolumen in diesem Zeitintervall zu.

Das in einem Gefäß enthaltene Flüssigkeitsvolumen $V$ ändert sich im Laufe der Zeit $t$ im Zeitintervall $[t_0; t_4]$.

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion $V'$, die die momentane Änderungsrate des im Gefäß enthaltenen Flüssigkeitsvolumens in diesem Zeitintervall angibt.




Aufgabenstellung:

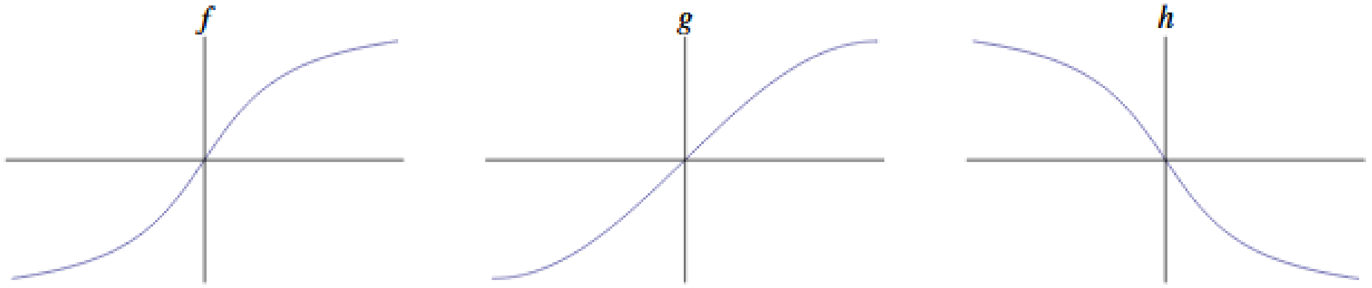
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

| | |
|---|---|
| Das Flüssigkeitsvolumen im Gefäß nimmt im Zeitintervall $[t_1; t_3]$ ab. | ☐ |
| Das Flüssigkeitsvolumen im Gefäß ist zum Zeitpunkt $t_2$ kleiner als zum Zeitpunkt $t_3$. | X |
| Das Flüssigkeitsvolumen im Gefäß weist zum Zeitpunkt $t_3$ die niedrigste momentane Änderungsrate auf. | ☐ |
| Das Flüssigkeitsvolumen im Gefäß ist zum Zeitpunkt $t_4$ am größten. | X |
| Das Flüssigkeitsvolumen im Gefäß ist zu den Zeitpunkten $t_2$ und $t_4$ gleich groß. | ☐ |

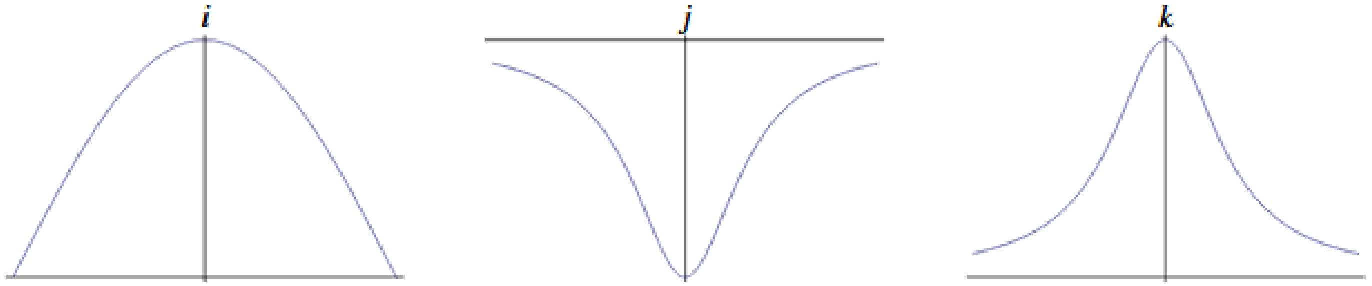
Schwer: Art des Kontextes, inhaltliche Komplexität, Anzahl der Denkprozesse

# IV. Begründungen einfordern

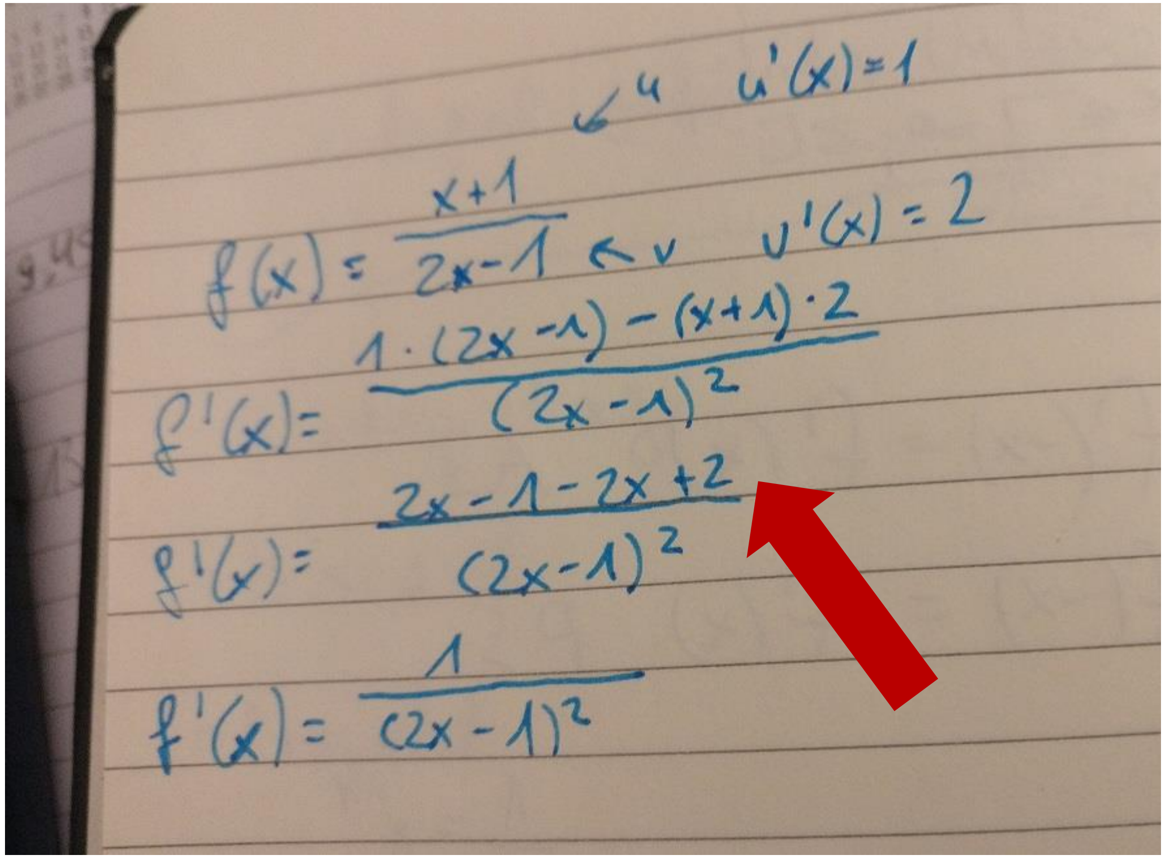
$\boxed{50}$ **Ableitungspuzzle 1.** Gegeben sind die Graphen der Funktionen $f$, $g$ und $h$.




Welche der Funktionen $i$, $j$, $k$ (Graphen siehe unten) ist die Ableitung von $f$, $g$ bzw. $h$? Begründen Sie Ihre Auswahl!



# V. Fehler finden und berichtigen




$$
\begin{aligned}
g(x) &= (3x+7)^3 \\
\Rightarrow g'(x) &= 3\cdot(3x+7)^2\cdot 3 \\
&= 9\cdot(3x+7)^2 \\
&= 9\cdot(9x^2+49) \\
&= 91x^2+441
\end{aligned}
$$

(https://de.serlo.org/105440/typische-fehler-klammern)

# V. Fehler finden und berichtigen

1. Weise nach, dass die angegebene Lösung falsch ist! Worin besteht der Fehler? Wie lautet die richtige Lösung?

$$\int (2x)^2 \cdot dx = \frac{(2x)^3}{3} + c$$

(Götz & Reichel 2013, S. 37)

(vgl. Götz & Reichel 2013, S. 54)

2. Max und Eva berechnen das folgende Integral auf verschiedene Arten:

$$z = 2x: \int \sin 2x \, dx = \; \dots = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$$

$$z = \sin x : \int \sin 2x \, dx = 2\int \sin x \cos x \, dx = \; \dots = \sin^2 x + c$$

Hat sich eine/r der beiden geirrt?

$$\sin^2 x - \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) = \frac{1}{2}$$

# V. Fehler finden und berichtigen

Finde den Fehler in der formalen und verbalen „Definitionen“ für den Grenzwert einer reellen Folge! Erkläre, worin der Fehler liegt! Stelle jeweils richtig!

☞ a) $a_n \to a \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists \varepsilon > 0\colon |a_n - a| < \varepsilon$

☞ b) In jeder noch so kleinen $\varepsilon$-Umgebung von $a$ liegen unendlich viele Folgenglieder.

Ad a) Für die Folge $a_n = 10^n$ und $a = 0$ leistet $\varepsilon = 10^{n+1}$ das Gewünschte.

Ad b) Für die Folge $a_n = (-1)^n$ und $a = 1$ ist die Forderung erfüllt.

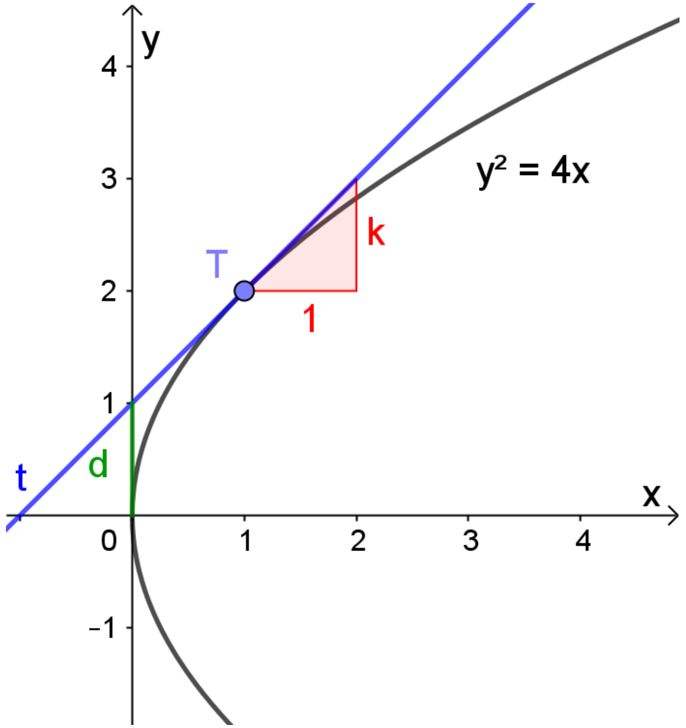
# VI. Vernetzen: Verbindungen herstellen

Zeige mit Mitteln der Differenzialrechnung die Spaltform der Tangente im Berührpunkt $T(x_T|y_T)$ eines Kegelschnitts in erster Hauptlage!

Zum Beispiel für die Parabel:

$$y^2 = 2px \quad \Rightarrow y'(x_T) = \frac{p}{y_T} \Rightarrow d = y_T - \frac{p}{y_T} x_T \Rightarrow \ldots$$

$$\Rightarrow y y_T = p(x + x_T)$$




Vergleiche Herleitung mit der Berührbedingung!

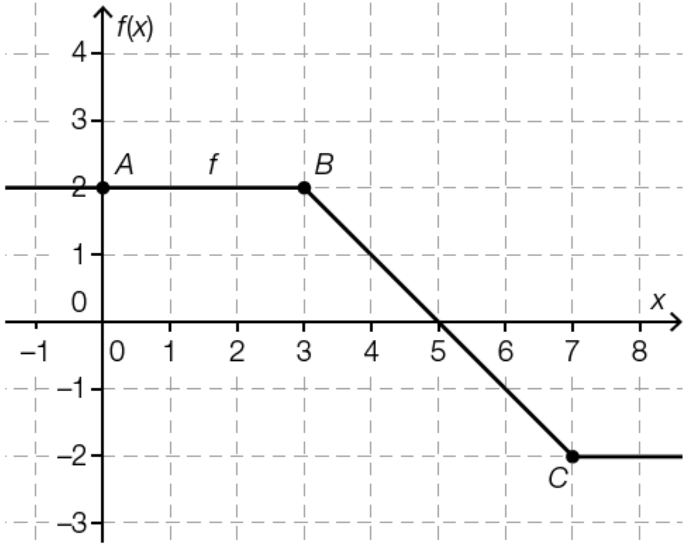
PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE NIEDERÖSTERREICH

universität wien

# Teil 1-Aufgabe 17 aus dem 1. Nebentermin, 20. September 2018

## Bestimmtes Integral

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer abschnittsweise linearen Funktion $f$ dargestellt. Die Koordinaten der Punkte $A$, $B$ und $C$ des Graphen der Funktion sind ganzzahlig.




Bestimmung des Flächeninhalts durch Berechnen elementarer geometrischer Figuren unter Berücksichtigung des Vorzeichens.

**Aufgabenstellung:**

Ermitteln Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int_0^7 f(x)\,\mathrm{d}x$!

$\int_0^7 f(x)\,\mathrm{d}x =$ ____________________

PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE NIEDERÖSTERREICH

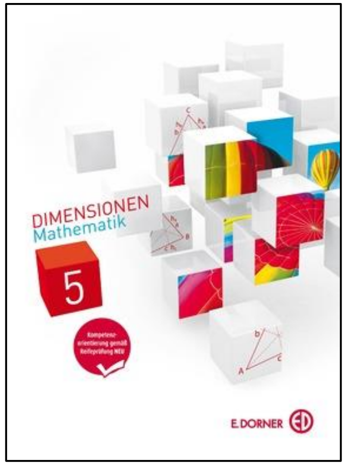
# Zusammenfassung und Ermutigung

# Wie findet man Übungsaufgaben?

(1) Gute Schulbücher sammeln
– Abschreiben erlaubt!

(2) Schulbuchaufgaben ergänzen
– Altbau renovieren!

(3) Aufgaben systematisch konstruieren
– Kreatives Handwerk




(Leuders 2009b, Folie 16 auf DVD)

# Kurz und bündig

**Fähigkeitsaspekt**

- Kenntnisse
- Fertigkeiten
- Verstehen / Vorstellungen
- Anwendungsfähigkeit
- (übergreifende) Strategien
- Reflexionsfähigkeit
- Einstellungen

**Strategien**

- Aufgaben umkehren
- Routineaufgaben + Störaufgaben
- Serie von Aufgaben, die auf das Erkennen eines Musters abzielen
- Begründungen einfordern
- Fehler finden in vorgegebenen/r Text, Gleichungsumformung, …
- Vernetzen: Verbindungen herstellen

# Literatur


- Bleier, G., Lindenberg, J., Lindner, A., & Süss-Stepancik, E. (2017): *Dimensionen Mathematik 5*. Wien: Dorner.
- Bleier, G., Lindenberg, J., Lindner, A., & Süss-Stepancik, E. (2018): *Dimensionen Mathematik 6*. Wien: Dorner.
- Block, J. (2018): Sortieren und Variieren. Aufgaben werden zu Aufgaben. In *mathematik lehren* 209, S. 22-27.
- Büchter, A., & Leuders, T. (2005): *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen*. Berlin: Cornelsen.
- Drüke-Noe, C. (2018): Einfach – mittel – schwierig … Wenn das so einfach wäre: Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades entwickeln. In *mathematik lehren* 209, S. 9-12.
- Drüke-Noe, C., & Siller, H.-S. (2018): Aufgaben als Aufgabe. Aufgaben auswählen, charakterisieren, variieren. In *mathematik lehren* 209, S. 2-8.
- Fischer, R., & Malle, G. (1985): *Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln* (unter Mitarbeit von H. Bürger). Mannheim u. a.: B.I.-Wissenschaftsverlag.
- Götz, S., & Reichel H.-C. (Hrsg., 2010): *Mathematik 5* von R. Müller & G. Hanisch.  Wien: öbv.
- Götz, S., & Reichel H.-C. (Hrsg., 2013): *Mathematik 8* von R. Müller & G. Hanisch.  Wien: öbv.
- Götz, S., & Süss-Stepancik, E. (2018): Vom Testen zum (kompetenten) Lernen im Mathematikunterricht. In *R&E-SOURCE*, Tag der Mathematik 2018. Wer Mathe lernt, hat mehr Erfolg im Leben! https://journal.ph-noe.ac.at/index.php/resource/article/view/566, 4 Seiten.
- Goy, A. (2018): Aufgaben verändern: Quadratische Gleichungen. In *mathematik lehren* 209, MatheWelt. Das Schülerarbeitsheft.

# Literatur


- Leuders, T. (2009a): Intelligent üben und Mathematik erleben. In Leuders, T., Hefendehl-Hebeker, L., & Weigand, H. G. (Hrsg.): *Mathemagische Momente*. Berlin: Cornelsen.
- Leuders, T. (2009b): Produktives üben ist keine Zauberei. DVD zu Leuders, T., Hefendehl-Hebeker, L., & Weigand, H. G. (Hrsg.): *Mathemagische Momente*. Berlin: Cornelsen.
- Malle, G. et al. (2010): *Mathematik verstehen 5*. Wien: öbv.
- Müller, J.H. (2005): Entdeckend Lernen mit Zahlenmauern in der Sekundarstufe. In *Praxis der Mathematik in der Schule,* Heft 2, **47**. Jahrgang, S. 32-38.
- Rott, B. (2018): Kleine Änderung mit großer Wirkung. Produktives Üben durch Variation von Aufgaben. In *mathematik lehren* 209, S. 18-21.
- Wessel, L. (2018): Strukturierte Aufgabenfolgen. Begründen üben und Ableitungsregeln trainieren. In *mathematik lehren* 209, S. 38-42.
- Winter, H. (2016): *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihrer Bedeutung für die Pädagogik* (3., aktualisierte Auflage). Wiesbaden: Springer Spektrum.