Verständnis von Zusammenhängen im Analysisunterricht fördern

Annika Wille

Alpen-Adria-Universität Klagenfurt

6. April 2018

ÖMG – Lehrer/innen/fortbildungstagung

an der Fakultät für Mathematik an der Universität Wien

Zusammenhänge in der Analysis verstehen

Unterschiedliche Zusammenhänge in der Analysis

- Zusammenhang von unterschiedlichen Darstellungen: Termdarstellungen, Graphen, Tabellen, verbalen Beschreibungen
- Zusammenhänge von verschiedenen analytischen Begriffen, wie zum Beispiel Integralfunktion und Stammfunktionen
- Zusammenhang von verschiedenen Ableitungen
- Zusammenhang zwischen Differenzenquotient und Ableitung:

Differenzenquotient	$\longrightarrow$	Ableitung
$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	$\longrightarrow$	$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
Sekantensteigung	$\longrightarrow$	Tangentensteigung
mittlere Änderungsrate (z.B. Durchschnittsgeschwindigkeit)	$\longrightarrow$	lokale Änderungsrate (z.B. Momentangeschwindigkeit)

(Tabelle leicht verändert von zwei Tabllen von Danckwerts & Vogel 2006, S. 57 und S. 85)

Begriffsverständnis

Zum Verständnis eines mathematischen Begriffes gehören (vgl. z.B. Weigand 2015):

- Begriffsinhalt:
  - „Vorstellungen über Merkmale und Eigenschaften eines Begriffs und deren Beziehungen“
- Begriffsumfang:
  - „Überblick über die Gesamtheit aller Objekte erhalten, die unter einem Begriff zusammengefasst werden“
- Begriffsnetz:
  - „Beziehungen des Begriffs zu anderen Begriffen aufzeigen können“
- Kenntnisse über Anwendungen des Begriffs
- Fähigkeiten im Umgang mit dem Begriff

Wie können Zusammenhänge verstanden werden?

→ Skemp (1976): instrumentelles und relationales Verständnis

Skemp: instrumentelles und relationales Verständnis

Instrumentelles Verständnis:

- „Regeln ohne Gründe“
- Kenntnis über Regeln und wie man sie anwendet
- algorithmische Verfahren und Techniken anwenden können **ohne Warum-Fragen** beantworten zu können

Relationales Verständnis:

- wissen, was man tut und warum
- **Warum-Fragen** beantworten können

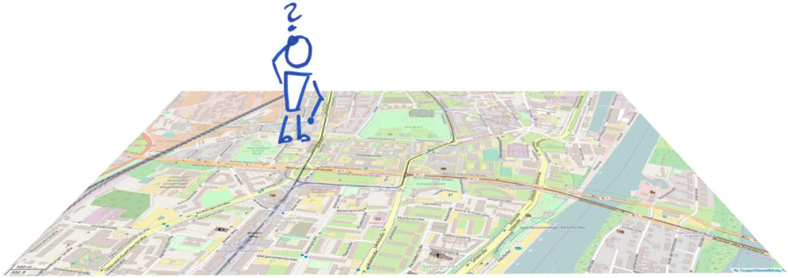
Beispiele für instrumentelles und relationales Verständnis

- **Instrumentell:**
  Ich kann die Ableitung einer Polynomfunktion mit Ableitungsregeln ausrechnen, weiß aber nicht, was die Ableitung eigentlich ist.

- **Relational:**
  Ich kann auch die Ableitung einer Polynomfunktion mit Ableitungsregeln ausrechnen, ich kann aber auch mit Hilfe von Graphen, dem Steigungsbegriff, dem Übergang vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten und anderem erklären, was die Ableitung ist.

Skemp: instrumentelles und relationales Verständnis

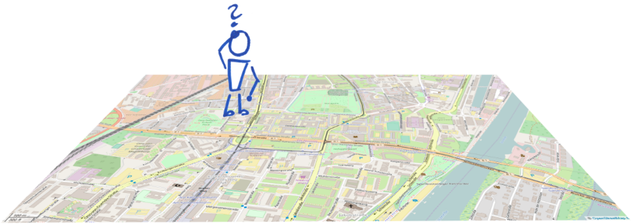
Beispiel: Mentales Straßennetz



- **Instrumentales Verständnis:** nach festem Plan von A nach B kommen.
  - schnell zu lernen, aber unflexibel
- **Relationales Verständnis:** durch die Stadt gehen, um ein mentales Straßennetz aufzubauen.
  - zeitaufwändig, aber fexibel

Skemp (1976): instrumentelles und relationales Verständnis

Beispiel: Mentales Straßennetz

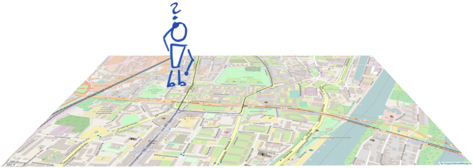


Wichtig: Auch für den Aufbau eines relationalen Verständnisses ist es notwendig, durch die Stadt zu **gehen**!

- Das heißt: Auch bei einer Schritt-für-Schritt-Befolgung einer Anleitung kann relationales Verständnis entstehen, wenn die Person dabei über Zusammenhänge nachdenkt,
- zum Beispiel durch Reflexion über den gegangenen Weg und seine Verbindungen zu anderen.

Skemp (1976): instrumentelles und relationales Verständnis

Beispiel: Mentales Straßennetz



Zentral sind mir daher **Warum-Fragen anzustoßen**:

- Warum gibt es in der Ableitung eine Nullstelle, wenn in der Funktion ein Extremum ist?
- Warum sagt die Integralfunktion etwas über den orientierten Flächeninhalt aus?
- Warum hängen wie unterschiedliche Darstellungen zusammen? Funktionsgraph, Terme und Gleichungen, Anschauung?
- Warum ...

Wie kann man im Analsisunterricht den Aufbau von relationalem Verständnis anstoßen?

Es gibt ganz unterschiedliche Wege dazu. In einem Projekt an Schulen in Graz und Villach sollte die Methode die folgenden Anforderungen erfüllen:

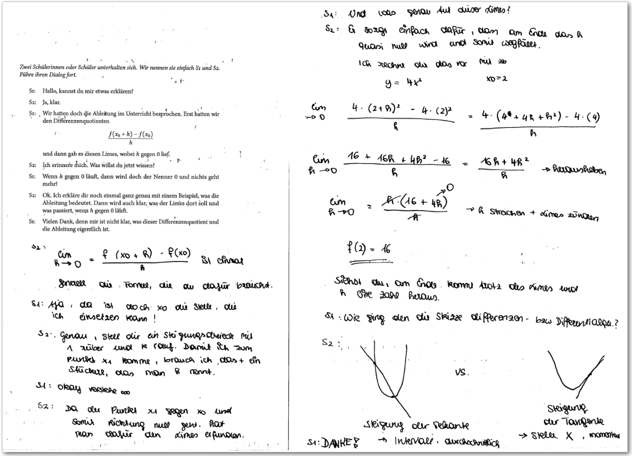
- Der Lernende sollte verbale Warum-Fragen stellen und beantworten können,
- dabei aber auch, wenn gewünscht, mathematische Terme, Gleichungen, Tabellen, Graphen aufschreiben können.
- Damit die Lehrkraft jede Schülerin und jeden Schüler im Blick haben konnte, sollte es eine Einzelarbeit sein.

$\rightarrow$ *Methode der erdachten Dialoge*

Ein Projekt zur Analysis mit erdachten Dialogen

Erdachte Dialoge im Mathematikunterricht

- Eine Schülerin oder ein Schüler schreibt einen Dialog zwischen zwei Protagonisten auf, die sich über eine mathematische Fragestellung unterhalten.



Zwei Schülerinnen oder Schüler unterhalten sich. Wir nennen sie einfach S1 und S2. Führe ihren Dialog fort.

S1: Hallo, kannst du mir etwas erklären?

S2: Ja, klar.

S1: Wir hatten doch die Ableitung im Unterricht besprochen. Erst hatten wir den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

und dann gab es diesen Limes, wobei h gegen 0 lief.

S2: Ich erinnere mich. Was willst du jetzt wissen?

S1: Wenn h gegen 0 läuft, dann wird doch der Nenner 0 und nichts geht mehr!

S2: Ok. Ich erkläre dir noch einmal ganz genau mit einem Beispiel, was die Ableitung bedeutet. Dann wird auch klar, was der Limes dort soll und was passiert, wenn h gegen 0 läuft.

S1: Vielen Dank, denn mir ist nicht klar, was dieser Differenzenquotient und die Ableitung eigentlich ist.

S2: $\lim\limits_{h \to 0} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ ist einmal genau die Formel, die du dafür brauchst.

S1: Aja, da ist doch x_0 die Stelle, die ich einsetzen kann!

S2: Genau, stell dir ein Steigungsdreieck mit 1 rüber und h rauf. Damit ich zum Punkt x_1 komme, brauch ich das + ein Stückerl, das man h nennt.

S1: Okay verstehe ...

S2: Da der Punkt x_1 gegen x_0 und somit Richtung null geht. Hat man dafür den Limes erfunden.

S1: Und was genau tut dieser Limes?

S2: Er sorgt einfach dafür, dass am Ende das h quasi null wird und somit wegfällt.

Ich rechne dir das vor mit

$y = 4x^2$ $\quad x_0 = 2$

$$\lim_{h \to 0} \frac{4\cdot(2+h)^2 - 4\cdot(2)^2}{h} = \frac{4\cdot(4 + 4h + h^2) - 4\cdot(4)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{16 + 16h + 4h^2 - 16}{h} = \frac{16h + 4h^2}{h} \to \text{herausheben}$$

$$\lim_{h \to 0} = \frac{\cancel{h}\cdot(16 + 4h)}{\cancel{h}} \to h \text{ streichen + Limes zünden}$$

$f(2) = 16$

Siehst du, am Ende kommt trotz des Limes und h eine Zahl heraus.

S1: Wie ging denn die Skizze Differenzen- bzw Differentialqu.?

S2:

S1: DANKE!

In der Praxis

- Es hat sich als hilfreich herausgestellt, einen **Anfangsdialog** fortsetzen zu lassen.

Unterschiedliche Themen sind möglich:

- Anfangsdialoge, die eine **Reflexion** über etwas Bekanntes anregen.
- Anfangsdialoge, die eine für die Schülerin oder den Schüler **neue mathematische Fragestellung** aufwerfen.

Beispiel: Anfangsdialog für den Analysisunterricht

Zwei Schülerinnen oder Schüler unterhalten sich. Wir nennen sie einfach S1 und S2. Führe ihren Dialog fort.

S1: Hallo, kannst du mir etwas erklären?

S2: Ja, klar.

S1: Wir hatten doch die Ableitung im Unterricht besprochen. Erst hatten wir den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

und dann gab es diesen Limes, wobei h gegen 0 lief.

S2: Ich erinnere mich. Was willst du jetzt wissen?

S1: Wenn h gegen 0 läuft, dann wird doch der Nenner 0 und nichts geht mehr!

S2: Ok. Ich erkläre dir noch einmal ganz genau mit einem Beispiel, was die Ableitung bedeutet. Dann wird auch klar, was der Limes dort soll und was passiert, wenn h gegen 0 läuft.

S1: Vielen Dank, denn mir ist nicht klar, was dieser Differenzenquotient und die Ableitung eigentlich ist.

Beispiel: Greta, 7. Klasse

Zwei Schülerinnen oder Schüler unterhalten sich. Wir nennen sie einfach S1 und S2. Führe ihren Dialog fort.

S1: Hallo, kannst du mir etwas erklären?

S2: Ja, klar.

S1: Wir hatten doch die Ableitung im Unterricht besprochen. Erst hatten wir den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

und dann gab es diesen Limes, wobei h gegen 0 lief.

S2: Ich erinnere mich. Was willst du jetzt wissen?

S1: Wenn h gegen 0 läuft, dann wird doch der Nenner 0 und nichts geht mehr!

S2: Ok. Ich erkläre dir noch einmal ganz genau mit einem Beispiel, was die Ableitung bedeutet. Dann wird auch klar, was der Limes dort soll und was passiert, wenn h gegen 0 läuft.

S1: Vielen Dank, denn mir ist nicht klar, was dieser Differenzenquotient und die Ableitung eigentlich ist.

S2: $\lim\limits_{h\to 0} = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ist einmal genau die Formel, die du dafür brauchst.

S1: Tja, da ist doch x_0 die Stelle, die ich einsetzen kann!

S2: Genau, stell dir ein Steigungsdreieck mit 1 rüber und k rauf. Damit ich zum Punkt x_1 komme, brauch ich das + ein Stückerl, das man h nennt.

S1: Okay verstehe ...

S2: Da der Punkt x_1 gegen x_0 und somit Richtung null geht. Hat man dafür den Limes erfunden.

S1: Und was genau tut dieser Limes?

S2: Er sorgt einfach dafür, dass am Ende das h quasi null wird und somit wegfällt.

Ich rechne dir das vor mit ~~zb~~

$y = 4x^2$ $\quad x_0 = 2$

$$\lim_{\to 0} \frac{4\cdot(2+h)^2 - 4\cdot(2)^2}{h} = \frac{4\cdot(4+4h+h^2)-4\cdot(4)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{16+16h+4h^2-16}{h} = \frac{16h+4h^2}{h} \rightarrow \text{herausheben}$$

$$\lim_{h\to 0} = \frac{\cancel{h}\cdot(16+4\overset{\to 0}{h})}{\cancel{h}} \rightarrow h \text{ streichen + Limes zünden}$$

$f(2) = 16$

Siehst du, am Ende kommt trotz des Limes und h eine Zahl heraus.

S1: Wie ging den die Skizze Differenzen- bzw Differentialqu.?

S2:

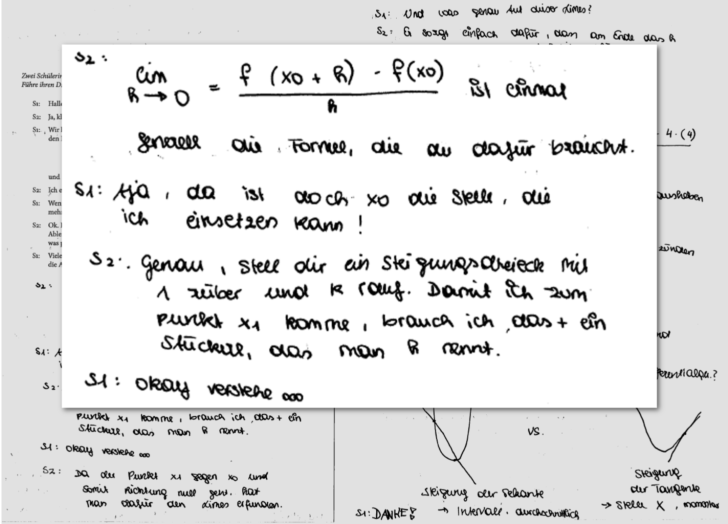
vs.

Steigung der Sekante → Intervall. durchschnittlich

Steigung der Tangente → Stelle X, momentan

S1: DANKE!

Beispiel: Greta, 7. Klasse



S2: $\lim\limits_{h \to 0} = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ ist einmal genau die Formel, die du dafür brauchst.

S1: Aja, da ist doch x_0 die Stelle, die ich einsetzen kann!

S2: Genau, stell dir ein Steigungsdreieck mit 1 rüber und h rauf. Damit ich zum Punkt x_1 komme, brauch ich das + ein Stückerl, das man h nennt.

S1: Okay verstehe ...

S2: Da der Punkt x_1 gegen x_0 und somit Richtung null geht. Hat man dafür den Limes erfunden.

S1: Und was genau tut dieser Limes?

S2: h sorgt einfach dafür, dass am Ende das h

Steigung der Sekante → Intervall, durchschnittlich

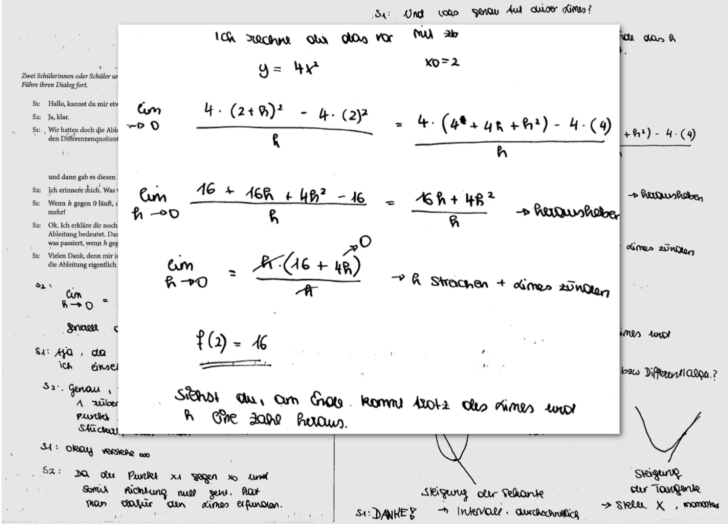
vs.

Steigung der Tangente → Stelle x, momentan

S1: DANKE!

Greta erklärt im Dialog, wie sie eine Formel versteht.

Beispiel: Greta, 7. Klasse



S1: Und was genau tut dieser Limes?

Ich rechne dir das vor mit ~~ab~~ xo = 2

$$y = 4x^2$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{4\cdot(2+h)^2 - 4\cdot(2)^2}{h} = \frac{4\cdot(4+4h+h^2) - 4\cdot(4)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{16+16h+4h^2-16}{h} = \frac{16h+4h^2}{h} \rightarrow \text{herausheben}$$

$$\lim_{h \to 0} = \frac{\cancel{h}\cdot(16+\overset{\to 0}{4h})}{\cancel{h}} \rightarrow h \text{ streichen + limes zünden}$$

$$f(2) = 16$$

Siehst du, am Ende kommt trotz des Limes und h eine Zahl heraus.

S1: okay verstehe ...

S2: Da der Punkt x1 gegen x0 und somit Richtung null geht, hat man dafür den Limes erfunden.

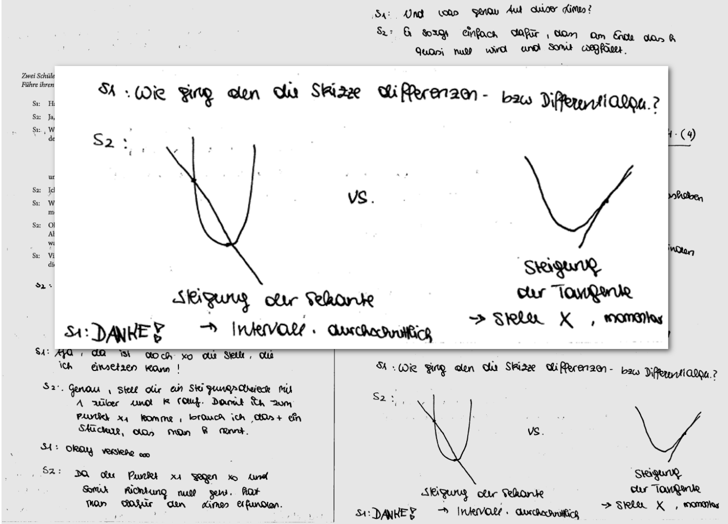
S1: DANKE!

Steigung der Sekante → Intervall, durchschnittlich

Steigung der Tangente → Stelle x, momentan

Greta führt Termumformungen durch.

Beispiel: Greta, 7. Klasse



Greta veranschaulicht die Sekanten- und Tangentensteigung.

In der Praxis: Einsatzmöglichkeiten

Sie können erdachte Dialoge immer dann einsetzen,

- wenn Ihnen wichtig ist, dass ein **Zusammenhang** oder ein **Begriff** von jedem verstanden worden ist.
  - Dabei kann das Schreiben des erdachten Dialoges dieses Verstehen anstoßen, bzw. festigen.
- wenn Sie möchten, dass sich jede Schülerin und jeder Schüler bei einem **neuen Gebiet** erst einmal selbst mit einer Fragestellung auseinandersetzt.

Das Besondere an erdachten Dialogen

- Immer wieder befragen sich die **Schülerin oder Schüler** selbst und antwortet auch auf sich selbst.
- Das ermöglicht, dass der Schreibende **Warum-Fragen** stellt und diese zu beantworten versucht.
- Ziel: Aufbau eines relationalem Verständnisses von mathematischen Begriffen und Zusammenhängen aufbauen.

- Darüber hinaus erhält die **Lehrkraft** durch den Einsatz erdachter Dialoge einen besonderen Einblick in die mathematischen Vorstellungen und Fähigkeiten jeder einzelnen Schülerin, bzw. jedes einzelnen Schülers.
- Teile von erdachten Dialogen können wieder in den Unterricht mit eingehen, zum Beispiel als gute Beispiele oder als Teil eines neuen Arbeitsblattes.

Das Analysis-Projekt

Im Schuljahr 2016/2017 an einem Gymnasium in Graz und im Schuljahr 2017/2018 an einem Gymansium in Villach wurden erdachte Dialoge im Analysisunterricht in insgesamt vier 7. Klassen und einer 8. Klasse eingesetzt.

Dabei passten die Lehrerinnen und Lehrer verschiedene Vorlagen von Anfangsdialogen an Ihren Unterricht an.

Zwei Beispiele...

Anfangsdialogsvorlagen, die die Lehrerinnen und Lehrer im Projekt an ihren Unterricht anpassten

Reflexionsaufgabe, um Unterschiede zu thematisieren

Zwei Schülerinnen oder Schüler unterhalten sich. Wir nennen sie einfach S1 und S2. Führen Sie ihren Dialog fort.

S1: Hallo, kannst du mir etwas erklären?

S2: Ja, natürlich. Was möchtest du wissen?

S1: Ich denke gerade über das nach, was wir in der Schule besprochen hatten. Kannst du mir sagen, was der Unterschied zwischen .... und .... ist?

S2: Mach' ich. Ich zeige dir einmal ein Beispiel. Daran kann ich es gut erklären.

S1: Vielen Dank! Sei aber gefasst darauf, dass ich viele Warum-Fragen stellen werde!

Anfangsdialogsvorlagen, die die Lehrerinnen und Lehrer im Projekt an ihren Unterricht anpassten

Entdeckungsaufgabe zu einer konkreten Aufgabe

Zwei Schülerinnen oder Schüler unterhalten sich. Wir nennen sie einfach S1 und S2. Führen Sie ihren Dialog fort.

S1: Guck mal, ich sitze gerade an dieser Aufgabe:

(Hier kommt eine konkrete Aufgabe hin.)

S1: Kannst du mir dabei helfen?

S2: Ja, natürlich. Was sind deine ersten Ideen dazu?

Beispiele von Anfangsdialogen aus dem Projekt

Anfangsdialog zum Differenzenquotienten (Reflexion):

Zwei Schülerinnen oder Schüler unterhalten sich. Wir nennen sie einfach S1 und S2. Führe ihren Dialog fort.

S1: Hallo, kannst du mir etwas erklären?

S2: Ja, natürlich. Was möchtest du wissen?

S1: Wir hatten doch im Unterricht den Differenzenquotienten in unterschiedlichen Anwendungsaufgaben besprochen. Ich kann ihn immer ausrechnen. Aber ihn dann im Kontext interpretieren und die richtigen Einheiten verwenden, da mache ich immer Fehler.

S2: Eigentlich kommt es da immer nur auf einige Schlüsselwörter drauf an, die Einheit des Ergebnisses kann man sich auch ganz leicht überlegen. Am besten zeige ich dir ein Beispiel. Daran kann ich es gut erklären.

S1: Vielen Dank! Sei aber gefasst darauf, dass ich viele Warum-Fragen stellen werde!

Beispiele von Anfangsdialogen aus dem Projekt

Anfangsdialog zur 1. und 2. Ableitung (Reflexion):

Zwei Schülerinnen oder Schüler unterhalten sich. Wir nennen sie einfach S1 und S2. Führe ihren Dialog fort.

S1: Hallo, kannst du mir etwas erklären?

S2: Ja, natürlich.

S1: Ich denke gerade über das nach, was wir in der Schule besprochen hatten. Kannst du mir sagen, was die 1. und was die 2. Ableitung bedeutet?

S2: Gerne. Was möchtest du genau wissen?

S1: Erst einmal, was so eine Ableitung eigentlich ist. Aber auch was sie mir über Eigenschaften der Funktion sagt.

S2: Du meinst: Monotonie, lokale Extremstellen, Krümmung, Wendestellen, Sattelstellen?

S1: Ja, genau!

S2: Okay, ich zeige dir einmal ein Beispiel. Am besten ein Polynom dritten Grades. Daran kann ich es gut erklären.

S1: Vielen Dank! Sei aber gefasst darauf, dass ich viele **Warum-Fragen** stellen werde! Ich will nicht nur wissen, wie etwas geht, sondern auch **warum** etwas mit etwas Anderem zusammenhängt.

Beispiele von Anfangsdialogen aus dem Projekt

Anfangsdialog zur Gleichung einer Tangente (Entdeckung):

Zwei Schülerinnen oder Schüler unterhalten sich. Wir nennen sie einfach S1 und S2. Führe ihren Dialog fort.

S1: Guck mal, ich sitze gerade an dieser Aufgabe, die ich ohne Hilfe von geogebra lösen muss:

> ***Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = x^3 - 5x^2 + 10$.***
> ***Gesucht ist die Gleichung der Tangente, die den Graphen von f an der Stelle $x = 5$ berührt.***

Kannst du mir dabei helfen? So etwas haben wir überhaupt noch nie gemacht....

S2: Ja, natürlich. Was sind deine ersten Ideen dazu?

S1: Ich soll wohl eine Geradengleichung aufstellen, das hab' ich schon verstanden. Aber ich kenne ja nur EINEN EINZIGEN Punkt von dieser Geraden, den Punkt (5 / f(5)). Das ist eindeutig zu wenig...... ?

Einblicke

Im Fokus: Die erdachten Dialoge über den Differenzenquotienten

Fragen:

1. Welche Warum-Fragen stellen die Schülerinnen und Schüler?
2. Wo kann auf instrumentelles oder relationales Verständnis geschlossen werden?
3. Welche Lernschwierigkeiten werden sichtbar?

Im Fokus: Die erdachten Dialoge über den Differenzenquotienten

Fragen:

1. **Welche Warum-Fragen stellen die Schülerinnen und Schüler?**
2. Wo kann auf instrumentelles oder relationales Verständnis geschlossen werden?
3. Welche Lernschwierigkeiten werden sichtbar?

Welche Warum-Fragen stellen die Schülerinnen und Schüler?

Erste Beobachtung: Sie stellen tatsächlich viele Warum-Fragen, greifen also die Aufforderung aus dem Anfangsdialog auf.

Inhalt der meisten Warum-Fragen:

- Warum-Fragen, die sich auf spezielle Fragen über Rechenwege beziehen.
- Warum-Fragen, die sich auf Begriffsklärung beziehen.
- Warum bezieht sich die mittlere Änderung auf einen Zeitraum und nicht einen Zeitpunkt?
- Warum werden Einheiten angegeben, wie sie angegeben werden?
- Warum ist der Differenzenquotient auch als Sekantenfunktion zu deuten?
- Warum-Fragen, die sich auf die Interpretation des Differenzenquotienten beziehen.
- Warum-Fragen, die eigentlich Wie-Fragen sind.

Warum-Fragen, die sich auf spezielle Fragen über Rechenwege beziehen

Ein(e) Schüler(in) schreibt:

S1: Ok aber warum rechne ich immer das größere minus das kleinere?

S2: Wenn es anders herum wär würdest du einen Minus Wert herausbekommen und eine Geschwindigkeit kann nicht kleiner 0 sein.

Ein(e) andere(r) Schüler(in) schreibt:

… entspricht im Kontext den zurückgelegten km.

S1: Warum muss ich die zurückgelegten km mithilfe einer Differenz berechnen?

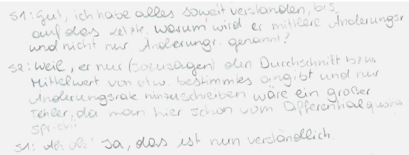
Warum-Fragen, die sich auf Begriffsklärung beziehen

Ein(e) Schüler(in) schreibt:

S1: Gut, ich habe soweit alles verstanden, bis auf das letzte. Warum wird er mittlere Änderungsr. und nicht nur Änderungsr. genannt?

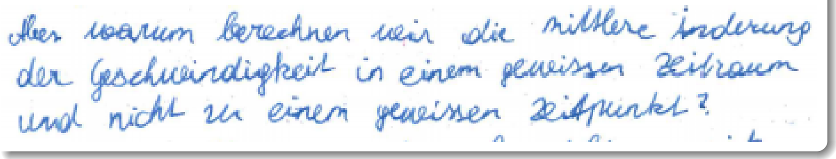
S2: Weil, er nur (sozusagen) den Durchschnitt bzw. Mittelwert von etw. bestimmtes angibt und nur Änderungsrate hinzuschreiben wäre ein großer Fehler, da man hier schon vom Differentialquotienzen spricht.

S1: Ah ok. Ja, das ist nun verständlich.


S1: Gut, ich habe alles soweit verstanden, bis
auf das letzte. Warum wird er mittlere Änderungsr
und nicht nur Änderungr. genannt?
S2: Weil, er nur (sozusagen) den Durchschnitt bzw.
Mittelwert von etw. bestimmtes angibt und nur
Änderungsrate hinzuschreiben wäre ein großer
Fehler, da man hier schon vom Differentialquotie
spricht.
S1: Ah ok! Ja, das ist nun verständlich.

Warum bezieht sich die mittlere Änderung auf einen Zeitraum und nicht einen Zeitpunkt?

Ein(e) Schüler(in) schreibt:


Aber warum berechnen wir die mittlere Änderung der Geschwindigkeit in einem gewissen Zeitraum und nicht zu einen gewissen Zeitpunkt?

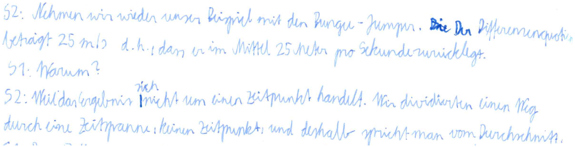
Warum bezieht sich die mittlere Änderung auf einen Zeitraum und nicht einen Zeitpunkt?

Ein(e) Schüler(in) schreibt:

S2: Nehmen wir wieder unser Beispiel mit den Bungee-Jumper. Der Differenzenquotient beträgt 25 m/s d.h. dass er im Mittel 25 Meter pro Seknunde zurücklegt.

S1: Warum?

S2: Weil das Ergebnis sich nicht um einen Zeitpunkt handelt. Wir dividieren einen Weg durch eine Zeitspanne: keinen Zeitpunkt und deshalb spricht man vom Durchschnitt.


S2: Nehmen wir wieder unser Beispiel mit den Bungee-Jumper. ~~Die~~ Der Differenzenquotient beträgt 25 m/s d.h., dass er im Mittel 25 Meter pro Sekunde zurücklegt.
S1: Warum?
S2: Weil das Ergebnis sich nicht um einen Zeitpunkt handelt. Wir dividierten einen Weg durch eine Zeitspanne: keinen Zeitpunkt, und deshalb spricht man vom Durchschnitt.

Warum ist der Differenzenquotient auch als Sekantenfunktion zu deuten?

Ein(e) Schüler(in) schreibt:

S1: Wir haben den Differenzenquotienten aber auch geometrisch gedeutet und dabei hat unser Lehrer gesagt, dass der Differenzenquotient gleich der Steigung der Sekantenfunktion ist. Aber warum und was bedeutet das eigentlich?

Warum werden Einheiten angegeben, wie sie angegeben werden?

Ein(e) Schüler(in) schreibt:

S2: Die Einheit musst du noch angeben. Das vollständige Ergebnis lautet: 25 m/s.

S1: Ich verstehe nicht wie du auf die Einheit kommst.

Ein(e) andere(r) Schüler(in) schreibt:

S1: Warum konnte ich nicht statt °C/h, h/°C schreiben?

S1. Warum könnte ich nicht statt °C/h, h/°c schreiben? … bzw. die

Warum-Fragen, die eigentlich Wie-Fragen sind

Ein(e) Schüler(in) schreibt:

S1: Warum kann man aus dem Differenzenquotient die Einheiten ablesen?

S2: Die Einheiten ergeben sich, indem du die Einheit des Zählers beibehaltest und durch die Einheit des Nenners dividierst. z.B. mittlerer Treibstoffverbrauch in l/km

Im Fokus: Die erdachten Dialoge über den Differenzenquotienten

Fragen:

1. Welche Warum-Fragen stellen die Schülerinnen und Schüler?
2. **Wo kann auf instrumentelles oder relationales Verständnis geschlossen werden?**
3. Welche Lernschwierigkeiten werden sichtbar?

Instrumentelles Verständnis ist einer solchen Stellen zu vermuten:

Ein(e) Schüler(in) schreibt:

S1: Ja, habe ich. Nur noch eine. Wie kann ich die Einheit bestimmen? Da habe ich auch immer große Schwierigkeiten.

S2: Das ist nicht so schwer. Allgemein solltest du wissen, dass man diesen Vorgang bei jedem Funktionstyp macht. Du nimmst die y-Achse durch die x-Achse. Wenn wir zu unserem vorherigen Beispiel zurückgehen, dann sind die km für Kilometer unsere y-Achse und die h für Stunde unsere x-Achse. Somit bekommst du die Einheit Kilometer pro Stunde => km/h.

S1: Was?! So einfach? Na wenigstens etwas. ☺

S2: Ja genau, so einfach geht das.

Dagegen ist relationales Verständnis eher hier zu vermuten:

Ein(e) Schüler(in) schreibt:

S1: Ich verstehe nicht wie du auf die Einheit kommst.

S2: Du dividierst ja den zurückgelegten Weg durch die benötigte Zeit. Daher die Einheit m/s.

S1: Ich verstehe es überhaupt nicht.

S2: Ich schreibe es dir auf. Die Rechnung lautet $\frac{5\cdot 4^2-5\cdot 1^2}{3}$. Wenn man die Rechnung oberhalb des Bruchstriches ausrechnet kommt man auf $\frac{75\,m}{3\,s}$.

...

Dagegen ist relationales Verständnis eher hier zu vermuten:

...

Wenn du 75 durch 3 dividierst kommst du auf 25 aber wenn du Meter durch Sekunden dividierst bekommst du kein Ergebnis. Deshalb musst du m/s hinschreiben.

S1: Also steht der Bruchstrich bei m/s für eine Division?

S2: Genau. Nehmen wir an die Einheiten wären Kilometer und Stunden. Was geschieht bei der Division?

S1: Die Kilometer werden durch die Stunden dividiert und die Einheit lautet km/h. Achso ist eh nicht so schwer. Und diese Regel funktioniert immer?

S2: Ja genau. Mit dieser Vorgehensweise solltest du keine Probleme mehr mit Einheiten haben.

Andere Beispiele von möglichen relationalem Verständnis:

- Erläuterungen, wie der Differenzenquotient mit der Sekantenfunktion zusammenhängt.
- Erläuterungen, warum sich der Differenzenquotient auf ein Zeitintervall und der Differentialquotient auf einen Zeitpunkt bezieht.

Instrumentelles oder relationales Verständnis

Relationales Verständnis ist an den Stellen zu vermuten,

- wo eine Schülerin oder Schüler nicht nur eine „Anleitung“ erklärt, wie etwas auszurechnen ist,
- sondern wo Zusammenhänge zwischen beispielsweise mathematischen Verschriftlichungen, verschiedenen Begriffen oder unterschiedlichen Darstellungen erläutert werden.

Im Fokus: Die erdachten Dialoge über den Differenzenquotienten

Fragen:

1. Welche Warum-Fragen stellen die Schülerinnen und Schüler?
2. Wo kann auf instrumentelles oder relationales Verständnis geschlossen werden?
3. **Welche Lernschwierigkeiten werden sichtbar?**

Lernschwierigkeiten

- Lernschwierigkeiten werden zum einen durch die Fragen sichtbar, die die Schülerinnen und Schüler selbst aufschreiben (und damit für relevant genug halten, dass sie aufgeschrieben werden sollten) und zum Teil auch beantworten.
  - Ein Beispiel ist das häufig genannte Vergessen des Wortes „durchschnittlich“ oder „mittlere“ im Zusammenhang mit dem Differenzenquotienten.
- Andere Lernschwierigkeiten werden dadurch sichtbar, dass ein Protagonist etwas nicht richtig sagt oder macht und es vom anderen Protagonisten nicht korrigiert wird.

Lernschwierigkeit: Beispiel „durchschnittliche" vergessen

Ein(e) Schüler(in) schreibt:

S2: Man rechnet mit dem Differenzenquotient die Veränderung der Wasserhöhe in Abhängigkeit von der Zeit aus. Das Wasser kann entweder steigen oder sinken.

- „Veränderung der Wasserhöhe" anstatt „durchschnittliche Veränderung der Wasserhöhe in einem Zeitintervall".

Lernschwierigkeit: Funktion passt nicht zum Beispiel

Ein(e) Schüler(in) schreibt:

> Ein Mann fährt mit dem Auto von Wien noch Villach, er fährt um 8 Uhr
> morgens weg und kommt um 12 Uhr mittags in Villach an. Er will
> berechnen wie schell er UNGEFÄHR in der 2. und 3. Stunde also von 9 Uhr
> bis 11 Uhr gefahren ist. Für den Weg wird ihm die Formel $w(t) = 5t^2$
> angegeben. Die Zeit wird in Stunden angegeben und der Weg in Kilometer.
> ... mittlere Geschwindigkeit in einer bestimmten Zeit-

- $w(t) = 5t^2$ beschreibt nicht wie jemand von Ort A nach Ort B fährt und dort auch wieder abbremst.
- Es kann auch nicht nur der Anfahrtsvorgang sein, weil sich der Schreibende auf das Zeitintervall zwischen der 2. und 3. Stunde bezieht.

Lernschwierigkeit: Interpretation im Kontext

Ein(e) Schüler(in) schreibt:

> Bei unserer Geschwindigkeitsfunktion zum Beispiel, ist die y-Achse mit m für Meter und die x-Achse mit s für Sekunde beschriftet, das bedeutet die Geschwindigkeit hat die Einheit Meter pro Sekunde, kurz m/s.

- „Geschwindigkeitsfunktion“ anstatt einer „Weg-Zeit-Funktion“.

Weitere Lernschwierigkeiten

- Begriffliche Ungenauigkeiten oder Verwechslungen.
  Zum Beispiel:
  - „Absolute Änderungsrate“ statt „momentaner Änderungsrate“ oder “absoluter Änderung“.
  - Differenzenquotient als „Steigung beliebiger Graphen“

Rückmeldungen der Schülerinnen und Schüler

Rückmeldungen der Schülerinnen und Schüler

Jede Schülerin und jeder Schüler beantworteten nach dem Schreiben ihres erdachten Dialoges die Frage:

- *Was ist mir während des Schreibens dieses Dialoges bewusst geworden?*

- Die Rückmeldungen waren überwiegen positiv (ca. 90%).
- Positive Rückmeldungen bezogen sich vor allem auf das Verständnis und das Erklären an sich.
- Negative Rückmeldungen nannten entweder die zu große Fülle der Fragestellungen (bei einem speziellen Anfangsdialog über die 1. und 2. Ableitung) oder dass die Methode dem entsprechenden nicht liegen würde.

Rückmeldungen zum Verständnis

Die häufigsten angesprochenen Themen:

- Wiederholung/Zusammenfassung des Stoffes als positiv empfunden
- Verständnis verbessert
- bewusst geworden, was man versteht oder nicht
- Wissen verinnerlicht

Beispiel: bewusst geworden, was man versteht oder nicht

Ein(e) Schüler(in) schreibt:

„Mir persönlich hat die Aufgabe sehr weiter geholfen. Beim Schreiben dieses Dialoges habe ich nicht nur den ganzen Stoff bezüglich Differenzenquotient noch einmal wiederholt, sondern mir ist auch bewusstgeworden, dass ich manche Sachen nicht sehr gut erklären kann und manches noch nicht ganz verstehe.“

Rückmeldungen zum Erklären

Die häufigsten angesprochenen Themen:

- in Worte fassen positiv
- Schwierigkeit, etwas zu erklären bewusst geworden

Beispiel: Schwierigkeit, etwas zu erklären bewusst geworden

Ein(e) Schüler(in) schreibt:

„Während des Schreibens meines Anfangsdialoges ist mir bewusst geworden, wie schwer es eigentlich Lehrer haben. Es fiel mir schwer, das Thema verständlich zu erklären denn zwischen ein Thema verstehen und es erklären zu können, liegen Welten. Ein Beispiel hatte ich ziemlich schnell gefunden und auch eine Idee wie ich es am besten erklären kann aber ich konnte es nicht in Worte fassen.“

Beispiel: instrumentell tun vs. relational verstehen?

Ein(e) Schüler(in) schreibt:

„Eine Aufgabe selbst zu lösen, ist in den meisten Fällen viel einfacher, da man sich nicht so viele Gedanken darübermacht, doch wenn man sie jemandem anderen erklärt, muss man sich selbst viel intensiver damit auseinandersetzen, damit man Erklärungen parat hat. In den meisten Fällen versteht man dadurch die Aufgabe selbst besser. Ich habe also auch den Eindruck, dass ich beim Verfassen des Dialogs etwas dazugelernt habe.“

Zusammenfassung

Zusammenfassung: Warum-Fragen anstoßen

- Mit den erdachten Dialogen wurden die Schülerinnen und Schüler angeregt, in besonderem Maße sich mit Warum-Fragen zur Analysis zu beschäftigen, diese selbst zu stellen und zu beantworten.
- In der Methapher der „mentalen Straßenkarte“ bezogen sich Warum-Fragen:
  - auf konkrete (Rechen-)Wege, warum zum Beispiel die Einheiten so angegeben werden, wie sie angegeben werden
  - und auf den Zusammenhang von „Orten auf der Karte“, wie beispielsweise den Zusammenhang zwischen Differenzenquotienten und Sekantenfunktion oder den Zusammenhang/Unterschied zwischen dem Differenzenquotienten und dem Differentialquotienten.

Zusammenfassung: Rückmeldungen

- Das Schreiben regte dazu an, sich bewusst zu werden, was verstanden worden ist und was nicht.
- Das Erklären wurde einerseits als Schwierigkeit gesehen (im Gegensatz zum Rechnen von Beispielen), andererseits aber auch zum Teil als Chance begriffen für das eigene Lernen.
- Nicht für jeden Schüler, für jede Schülerin ist dies die Methode der Wahl, aber es kann ein zusätzliches Instrument sein zum Vertiefen von analytischen Zusammenhängen und als weiteres Diagnosewerkzeug für die Lehrkraft.

Vielen Dank!

Literaturauswahl

Danckwerts, R., & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. München: Spektrum Akademischer Verlag.

Skemp, R. R. (1976). Relational Understandning and Instrumental Understanding, *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.

Weigand, H.-G. (2015). Begriffsbildung. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 255–278). Berlin/Heidelberg: Springer.

Wille, A. M. (2008). Aspects of the concept of a variable in imaginary dialogues written by students. In O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds.), *PME32, vol. 4* (pp. 417–424). Cinvestav-UMSNH, Mexico.

Wille, A. M. (2009). Selbst erdachte Dialoge. *mathematik lehren*, 156, 22–26.

Wille, A. M. (2017). Imaginary Dialogues in Mathematics Education, *Journal für Mathematik-Didaktik*, 38(1), 29-55.

Wille, A. M. (2017b). Mathe-Gespräche schreiben – Anfänge für erdachte Dialoge entwerfen, *mathematik lehren*, Heft 205, Dezember 2017, S. 31-34.