Mathematik macht Freu(n)de
Kompetenzmaterialien

Univ.-Prof. Dr. Michael Eichmair
Dr. Lukas Riegler

ÖMG – LehrerInnenfortbildungstagung
6. April 2018

PH NÖ PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE NIEDERÖSTERREICH

universität wien

Kompetenzmaterialien

- Themenbereiche der Sekundarstufe II
- Übertritt: Schule – Universität
  Qualitätssicherung Studienclubs
- Zusammenarbeit von
  - Mathematik-Forschenden
  - Mathematik-Lehrenden
  - Mathematik-Lernenden

- Uneingeschränkter, kostenloser Download
  https://mathematikmachtfreunde.univie.ac.at
- Creative Commons Lizenz

Kompetenzhefte

- Kompetenzheft zur Vektorrechnung in der Ebene
- Für mich als Lehrperson zur Unterrichtsvorbereitung:
  „Wie könnte ich dieses Thema im Unterricht aufbauen?“
- Für interessierte SchülerInnen zur Wiederholung und Vertiefung eines Themas
- Diagnoseaufgaben & Orientierung an SRDP-Aufgaben

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

KOMPETENZHEFT ZUR VEKTORRECHNUNG IN DER EBENE

INHALTSVERZEICHNIS

1. AUFGABENSTELLUNGEN

Aufgabe 1.1. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \binom{-3}{2}$ und $\vec{b} = \binom{2}{4}$.
Bestimme die folgenden Vektoren rechnerisch und grafisch:

Arbeitsblätter

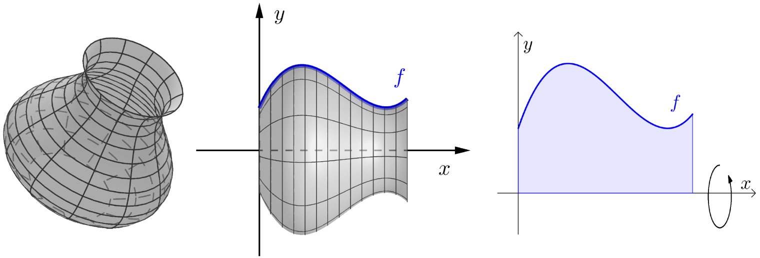
- Arbeitsblatt zum Rotationsvolumen

- Für mich als Lehrperson zur Unterrichtsgestaltung

Modellbildung

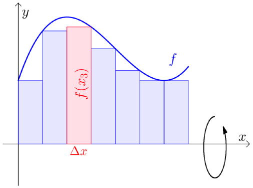
Welches Volumen hat die dargestellte Vase?

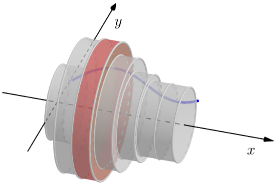
Du kannst leider kein Wasser einfüllen und nachmessen ...



Annäherung durch Rechtecke (2D) bzw. Drehzylinder (3D)

Wir zerlegen das Intervall in Teilintervalle mit gleicher Breite Δx.
Annäherung durch eine Untersumme wie beim bestimmten Integral:



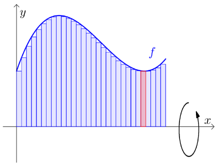


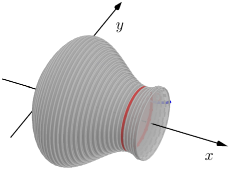
Volumen des markierten Drehzylinders: $V_3 =$ ________________

Gesamtvolumen: ________________________

Verfeinerung

Je feiner die Zerlegung ist, umso besser ist die Annäherung an das tatsächliche Volumen:

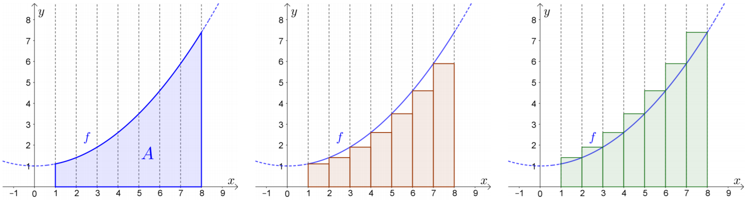




Arbeitsblätter

Annäherung durch Rechtecksfiguren

Unten siehst du den Graphen von $f(x) = 0{,}1 \cdot x^2 + 1$.
Wir wollen die Fläche A zwischen dem Graphen und der x-Achse im Intervall $[1; 8]$ abschätzen.
Dazu zerschneiden wir die Fläche in 7 gleich breite Streifen.
Die Fläche eines jeden Streifens schätzen wir mit Rechtecken nach unten und nach oben ab.



Wie groß ist die Fläche A also mindestens? Wie groß ist die Fläche A also höchstens?

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$								

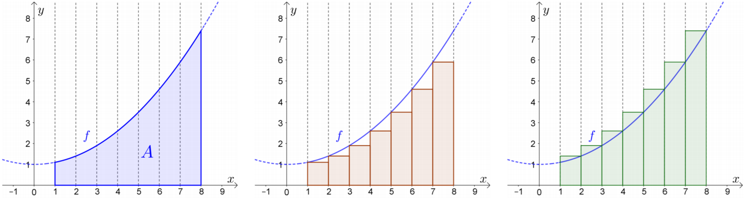
________________ $\leq A \leq$ ________________

Arbeitsblatt: Kulturtechnik Integration

Arbeitsblätter

Annäherung durch Rechtecksfiguren

Unten siehst du den Graphen von $f(x) = 0{,}1 \cdot x^2 + 1$.
Wir wollen die Fläche A zwischen dem Graphen und der x-Achse im Intervall $[1; 8]$ abschätzen.
Dazu zerschneiden wir die Fläche in 7 gleich breite Streifen.
Die Fläche eines jeden Streifens schätzen wir mit Rechtecken nach unten und nach oben ab.



Wie groß ist die Fläche A also mindestens? Wie groß ist die Fläche A also höchstens?

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	1,1	1,4	1,9	2,6	3,5	4,6	5,9	7,4

$$f(1) + f(2) + \dots + f(7) = 21 \leq A \leq f(2) + f(3) + \dots + f(8) = 27{,}3$$

Arbeitsblatt: Kulturtechnik Integration

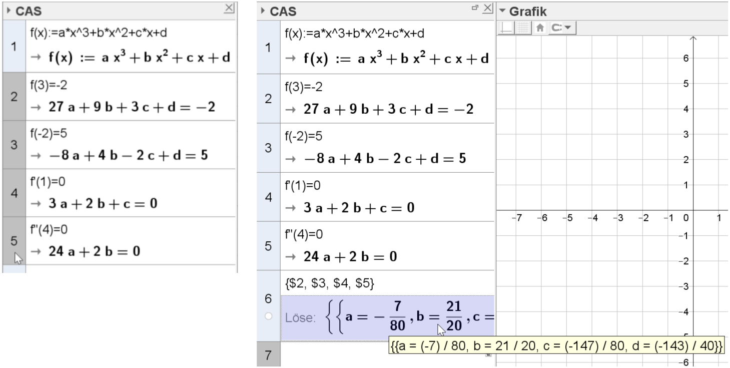
Technologieblätter

- Technologieeinsatz mit GeoGebra
- Technologieblatt zur umgekehrten Kurvendiskussion

Umgekehrte Kurvendiskussion mit GeoGebra lösen

1) Unter Ansicht die CAS-Ansicht öffnen. Die Funktionsgleichung und Gleichungen eingeben.

2) Das Gleichungssystem (Zeilen 2-5) mit der Maus markieren (Maustaste gedrückt halten). GeoGebra löst das Gleichungssystem mit Klick auf x= exakt oder mit Klick auf x≈ näherungsweise.



Modularer Aufbau der Kompetenzmaterialien

 „Das muss ich lernen…“

 „Das kann ich verstehen und erklären…“

 „Hier soll ich aktiv werden…“

 „Hier hilft mir Technologie beim Verstehen…“

 „Hier kommt ein Kochrezept…“

 „Hier kann ich mich herausfordern…“

Laplace–Experiment

Ein Zufallsexperiment heißt **Laplace-Experiment**, wenn es

1) nur endlich viele Ergebnisse gibt, also $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, und

2) jedes der endlich vielen Elementarereignisse gleich wahrscheinlich ist, also

$$P(\{\omega_i\}) = \underline{\hspace{2cm}} \qquad \text{für alle } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Arbeitsblatt: Zufallsexperimente

Quotientenregel

Quotientenregel: $$q(x) = \frac{a(x)}{b(x)} \quad \Longrightarrow \quad q'(x) = \frac{a'(x) \cdot b(x) - a(x) \cdot b'(x)}{b(x)^2}$$

Kompetenzheft: Differenzieren I

Laplace-Experiment?

Welche der folgenden Zufallsexperimente sind Laplace-Experimente?

1) Ein Wurf mit einem Laplace-Würfel. Das Ergebnis des Zufallsexperiments ist die Augenzahl.

$\Omega =$ ______________________

2) So lange einen Laplace-Würfel werfen, bis zum ersten Mal ein Sechser gewürfelt wird. Das Ergebnis ist die Anzahl der benötigten Würfe.

$\Omega =$ ______________________

3) Eine Schachtel enthält 3 schwarze und 2 weiße Kugeln. Eine Kugel wird blind gezogen. Das Ergebnis ist die Farbe der gezogenen Kugel.

$\Omega =$ ______________________

Arbeitsblatt: Zufallsexperimente

Laplace-Experiment?

Welche der folgenden Zufallsexperimente sind Laplace-Experimente?

1) Ein Wurf mit einem Laplace-Würfel. Das Ergebnis des Zufallsexperiments ist die Augenzahl.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Jedes Ergebnis ist gleich wahrscheinlich. $\Longrightarrow$ Laplace-Experiment

2) So lange einen Laplace-Würfel werfen, bis zum ersten Mal ein Sechser gewürfelt wird. Das Ergebnis ist die Anzahl der benötigten Würfe.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ Unendlich viele Ergebnisse möglich. $\Longrightarrow$ kein Laplace-Experiment

3) Eine Schachtel enthält 3 schwarze und 2 weiße Kugeln. Eine Kugel wird blind gezogen. Das Ergebnis ist die Farbe der gezogenen Kugel.

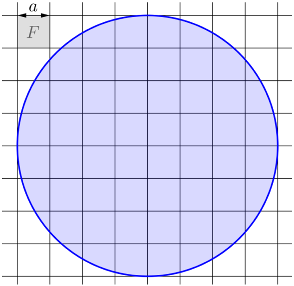
$\Omega = \{\text{Schwarz}, \text{Weiß}\}$ Schwarz ist wahrscheinlicher als Weiß. $\Longrightarrow$ kein Laplace-Experiment

Arbeitsblatt: Zufallsexperimente

Quadratur des Kreises?!

Wir beginnen mit etwas Vertrautem, nämlich dem Kreis.
Die Seitenlänge a eines einzelnen Quadrats im Raster unten ist $a =$ ________ cm.

Die Fläche F eines einzelnen Quadrats im Raster unten ist $F =$ ____________ cm^2.



Die Quadrate im Raster, die vollständig im Kreis enthalten sind, bilden eine Rechtecksfigur mit Fläche U.

$U =$ ____ $\cdot F =$ ____________ cm^2

U steht für **Untersumme**.

Die Quadrate im Raster, die mit dem Kreis überlappen, bilden eine Rechtecksfigur mit Fläche O.

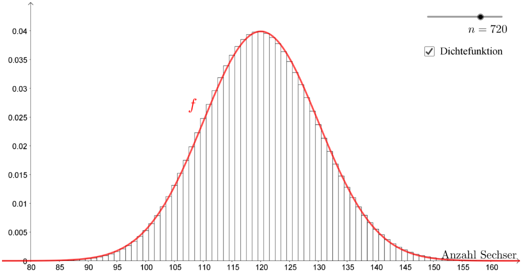
$O =$ ____ $\cdot F =$ ____________ cm^2

O steht für **Obersumme**.

Die Fläche A des Kreises liegt irgendwo zwischen der Untersumme und der Obersumme: $U \leq A \leq O$
Wie könntest du die Abschätzungen verbessern?

Arbeitsblatt: Kulturtechnik Integration

Bei $n = 720$ Würfen nimmt das Säulendiagramm von S_{720} die folgende Form an:



Markiere eine Fläche, deren Inhalt die WS für mindestens 130 Sechser und höchstens 140 Sechser ist.

Wir haben hier auch den Graphen einer ganz bestimmten Funktion f eingezeichnet.
Dieser Graph schmiegt sich an das glockenförmige Profil des Säulendiagramms.
Wie würdest du mit f diese Wahrscheinlichkeit näherungsweise berechnen?

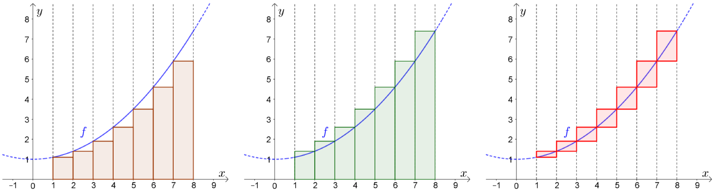
$$P(130 \leq S_{720} \leq 140) \approx$$

Arbeitsblatt: Normalverteilung

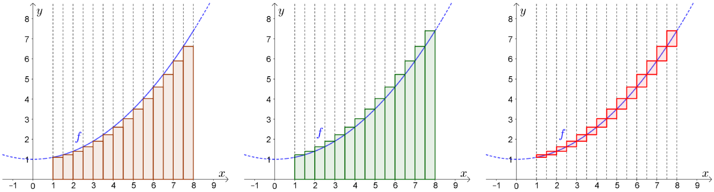
„Hier hilft mir Technologie beim Verstehen...“

Verfeinerung

Die **Untersumme** im linken Bild ist $U = 21$. Die **Obersumme** im mittleren Bild ist $O = 27{,}3$.
Die Gesamtfläche der gefärbten „Fehlerrechtecke“ im rechten Bild ist $E =$ __________ . *Error*



Wir verfeinern die Zerlegung, indem wir die Breite aller Rechtecke halbieren:



Ob wir wohl den Gesamtfehler beliebig klein machen können?

Roulette

Beim Roulette gibt es 37 durchnummerierte Felder mit den Zahlen von 0 bis 36. Davon sind 18 Felder rot, 18 Felder schwarz, und ein Feld ist grün. Das Casino bietet folgendes Spiel an:
Man setzt einen Einsatz auf „Rot“ oder „Schwarz“. Wenn die Kugel auf einem Feld mit der getippten Farbe landet, erhält man das Doppelte des Einsatzes zurück. Andernfalls verliert man den Einsatz.

Lukas setzt 37 € auf „Rot“. Die Zufallsvariable X gibt seinen Gewinn nach Abzug vom Einsatz an.

1) Trage die möglichen Werte von X und ihre Wahrscheinlichkeiten in die Tabelle ein.

2) Berechne den Erwartungswert von X.

x_i		
$P(X = x_i)$		

$E(X) =$

Interpretation des Erwartungswerts im Sachzusammenhang:
Wenn Lukas immer wieder 37 € auf „Rot“ setzt, dann sollte er auf lange Sicht einen durchschnittlichen Verlust von ________ pro Spiel erwarten.

Arbeitsblatt: Zufallsvariablen und Erwartungswert

Roulette

Beim Roulette gibt es 37 durchnummerierte Felder mit den Zahlen von 0 bis 36. Davon sind 18 Felder rot, 18 Felder schwarz, und ein Feld ist grün. Das Casino bietet folgendes Spiel an:
Man setzt einen Einsatz auf „Rot“ oder „Schwarz“. Wenn die Kugel auf einem Feld mit der getippten Farbe landet, erhält man das Doppelte des Einsatzes zurück. Andernfalls verliert man den Einsatz.

Lukas setzt 37 € auf „Rot“. Die Zufallsvariable X gibt seinen Gewinn nach Abzug vom Einsatz an.

1) Trage die möglichen Werte von X und ihre Wahrscheinlichkeiten in die Tabelle ein.

2) Berechne den Erwartungswert von X.

x_i	37 €	−37 €
$P(X = x_i)$	$\frac{18}{37}$	$\frac{19}{37}$

$$E(X) = 37\,€ \cdot \frac{18}{37} + (-37\,€) \cdot \frac{19}{37} = 18\,€ - 19\,€ = -1\,€$$

Interpretation des Erwartungswerts im Sachzusammenhang:
Wenn Lukas immer wieder 37 € auf „Rot“ setzt, dann sollte er auf lange Sicht einen durchschnittlichen Verlust von 1 € pro Spiel erwarten.

Arbeitsblatt: Zufallsvariablen und Erwartungswert

Sekantensteigung mit Technologieeinsatz

$f(x) = x^2$, $x_0 = 1$

h	1	0,5	0,1	0,01
Steigung				

Die Steigung der Sekanten scheint sich auf den Wert ____ hinzubewegen, wenn $h \to 0$.

$f(x) = x^3$, $x_0 = 1$

h	-1	$-0{,}5$	$-0{,}1$	$-0{,}01$
Steigung				

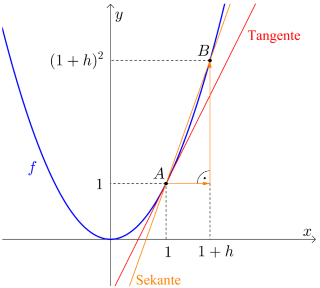
Die Steigung der Sekanten scheint sich auf den Wert ____ hinzubewegen, wenn $h \to 0$.

Tangente an eine Parabel

Welche Steigung hat $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 1$?

1) Steigung der Sekante durch die Punkte $A = (1 \mid f(1))$ und $B = (1 + h \mid f(1 + h))$:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} =$$



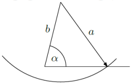
„Hier kommt ein Kochrezept..."

a) Eine Seitenlänge und zwei Winkel bekannt:

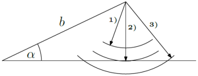
- Dritter Winkel mit Winkelsumme 180°.
- Seitenlängen mit Sinussatz.

b) Zwei Seitenlängen und jener Winkel, der der längeren Seite gegenüberliegt, bekannt:

- Zweiter Winkel mit Sinussatz. Dieser Winkel ist sicher spitz.
- Dritter Winkel mit Winkelsumme 180°.
- Dritte Seitenlänge mit Sinussatz.



c) Zwei Seitenlängen und jener Winkel, der der kürzeren Seite gegenüberliegt, bekannt:



1) Sinussatz $\rightsquigarrow$ DOMAIN Error $\implies$ keine Lösung.

2) Sinussatz $\rightsquigarrow$ $\beta = 90°$ $\implies$ eine Lösung.

3) Sinussatz $\rightsquigarrow$ spitzer Winkel β $\implies$ zwei Lösungen ($\beta_2 = 180° - \beta$).

d) Zwei Seitenlängen und der eingeschlossene Winkel bekannt:

- Dritte Seitenlänge mit Cosinussatz.
- Spitzer Winkel mit Sinussatz. Der Winkel gegenüber der kürzeren Seite ist sicher spitz.
- Dritter Winkel mit Winkelsumme 180°.

e) Drei Seitenlängen bekannt:

- Größter Winkel mit Cosinussatz.
- Zweiter Winkel mit Sinussatz oder Cosinussatz. Dieser Winkel ist sicher spitz.
- Dritter Winkel mit Winkelsumme 180°.

Arbeitsblatt: Allgemeines Dreieck

„Hier kann ich mich herausfordern…"

Ableitung von $f(x) = x^3$

Welche Steigung hat $f(x) = x^3$ an der Stelle x_0?

1) Steigung der Sekante durch die Punkte $A = (x_0 \mid f(x_0))$ und $B = (x_0 + h \mid f(x_0 + h))$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & \mathbf{1} & & & \\
 & & 1 & & \mathbf{2} & & 1 & & \\
 & 1 & & \mathbf{3} & & 3 & & 1 & \\
1 & & \mathbf{4} & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

2) Steigung der Tangente an der Stelle x_0:

$f'(x_0) =$

3) Die Ableitung der kubischen Funktion $f(x) = x^3$ ist $f'(x) =$ ________ .

Ableitung von $f(x) = x^n$

Michael erkennt ein Muster beim Differenzieren von Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Die Ableitung von $a(x) = x^{42}$ ist $a'(x) =$ ________ .

Kannst du erklären, warum das so ist?

Arbeitsblatt: Differentialquotient

Ableitung von $f(x) = x^3$

Welche Steigung hat $f(x) = x^3$ an der Stelle x_0?

1) Steigung der Sekante durch die Punkte $A = (x_0 \mid f(x_0))$ und $B = (x_0 + h \mid f(x_0 + h))$:

$$\frac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{h} = \frac{x_0^3 + 3 \cdot x_0^2 \cdot h + 3 \cdot x_0 \cdot h^2 + h^3 - x_0^3}{h} =$$
$$= \frac{h \cdot (3 \cdot x_0^2 + 3 \cdot x_0 \cdot h + h^2)}{h} =$$
$$= 3 \cdot x_0^2 + 3 \cdot x_0 \cdot h + h^2$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

2) Steigung der Tangente an der Stelle x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} (3 \cdot x_0^2 + 3 \cdot x_0 \cdot h + h^2) = 3 \cdot x_0^2$$

3) Die Ableitung der kubischen Funktion $f(x) = x^3$ ist $f'(x) = 3 \cdot x^2$.

Ableitung von $f(x) = x^n$

Michael erkennt ein Muster beim Differenzieren von Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Die Ableitung von $a(x) = x^{42}$ ist $a'(x) = 42 \cdot x^{41}$.

Kannst du erklären, warum das so ist?

Arbeitsblatt: Differentialquotient

- Studierende im Lehramt Mathematik
  Karwoche 2018: 270 SchülerInnen, 47 Coaches

- Unterrichtsvorbereitung mit Kompetenzheften
- Unterrichtsgestaltung mit Arbeitsblättern

Qualitätssicherung

Vielen herzlichen Dank für . . .

- Feedback von Mathematik-Forschenden
- Feedback von KollegInnen
- Feedback von Studierenden
- Feedback von SchülerInnen

Projekt-Homepage: https://mathematikmachtfreunde.univie.ac.at

E-Mail: lukas.riegler@tgm.ac.at