Rationale Zahlen und rationale Funktionen: Was ist ihnen gemeinsam? Wie werden sie dargestellt?

Franz Pauer, Florian Stampfer

Institut für Fachdidaktik
und
Institut für Mathematik

Universität Innsbruck

Lehrer/innen/fortbildungstag Wien 2018
6. April 2018

Probleme mit Meiers Apfelsaft

- Am Sonntag trinkt Herr Meier zusammen mit 6 Nachbarn insgesamt 2 Liter Apfelsaft, jeder Person wurde immer gleich viel eingeschenkt.

Probleme mit Meiers Apfelsaft

- Am Sonntag trinkt Herr Meier zusammen mit 6 Nachbarn insgesamt 2 Liter Apfelsaft, jeder Person wurde immer gleich viel eingeschenkt.
- Am Montag trinkt Herr Meier zusammen mit 10 Arbeitskollegen (keiner davon war auch am Sonntag dabei) insgesamt 3 Liter desselben Apfelsaftes, auch diesmal wurde jeder Person immer gleich viel eingeschenkt.

Probleme mit Meiers Apfelsaft

- Am Sonntag trinkt Herr Meier zusammen mit 6 Nachbarn insgesamt 2 Liter Apfelsaft, jeder Person wurde immer gleich viel eingeschenkt.
- Am Montag trinkt Herr Meier zusammen mit 10 Arbeitskollegen (keiner davon war auch am Sonntag dabei) insgesamt 3 Liter desselben Apfelsaftes, auch diesmal wurde jeder Person immer gleich viel eingeschenkt.
- Am Dienstag hat Herr Meier Magenschmerzen und geht zusammen mit einer weiteren Flasche seines Apfelsaftes zum Arzt. Im Labor wird festgestellt, dass 3 Promille des Flascheninhaltes nicht Saft, sondern Reinigungsmittel sind. Der Arzt erklärt, dass bis zu 1 ml dieses Reinigungsmittel unschädlich sind, mehr davon aber zu Beschwerden führen.

Probleme mit Meiers Apfelsaft

- Am Sonntag trinkt Herr Meier zusammen mit 6 Nachbarn insgesamt 2 Liter Apfelsaft, jeder Person wurde immer gleich viel eingeschenkt.
- Am Montag trinkt Herr Meier zusammen mit 10 Arbeitskollegen (keiner davon war auch am Sonntag dabei) insgesamt 3 Liter desselben Apfelsaftes, auch diesmal wurde jeder Person immer gleich viel eingeschenkt.
- Am Dienstag hat Herr Meier Magenschmerzen und geht zusammen mit einer weiteren Flasche seines Apfelsaftes zum Arzt. Im Labor wird festgestellt, dass 3 Promille des Flascheninhaltes nicht Saft, sondern Reinigungsmittel sind. Der Arzt erklärt, dass bis zu 1 ml dieses Reinigungsmittel unschädlich sind, mehr davon aber zu Beschwerden führen.
- Könnte das Reinigungsmittel der Grund für die Beschwerden von Herrn Meier sein? Muss er seine Gäste davon informieren?

Probleme mit Meiers Apfelsaft

- Wieviel Reinigungsmittel hat Herr Meier getrunken?

$$(\frac{2}{7} + \frac{3}{11}) \cdot \frac{3}{1000} = \frac{129}{77} \cdot \frac{1}{1000} > \frac{1}{1000},$$

also könnten Herrn Meiers Beschwerden vom Reinigungsmittel kommen.

Probleme mit Meiers Apfelsaft

- Wieviel Reinigungsmittel hat Herr Meier getrunken?

$$(\frac{2}{7} + \frac{3}{11}) \cdot \frac{3}{1000} = \frac{129}{77} \cdot \frac{1}{1000} > \frac{1}{1000},$$

  also könnten Herrn Meiers Beschwerden vom Reinigungsmittel kommen.

- Wieviel Reinigungsmittel haben seine Nachbarn am Sonntag getrunken?

$$\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{1000} = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{1000} < \frac{1}{1000}$$

Probleme mit Meiers Apfelsaft

- Wieviel Reinigungsmittel hat Herr Meier getrunken?
$$(\frac{2}{7} + \frac{3}{11}) \cdot \frac{3}{1000} = \frac{129}{77} \cdot \frac{1}{1000} > \frac{1}{1000},$$
also könnten Herrn Meiers Beschwerden vom Reinigungsmittel kommen.
- Wieviel Reinigungsmittel haben seine Nachbarn am Sonntag getrunken?
$$\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{1000} = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{1000} < \frac{1}{1000}$$
- Wieviel Reinigungsmittel haben seine Kollegen am Montag getrunken?
$$\frac{3}{11} \cdot \frac{3}{1000} = \frac{9}{11} \cdot \frac{1}{1000} < \frac{1}{1000}$$

Probleme mit Meiers Apfelsaft

- Wieviel Reinigungsmittel hat Herr Meier getrunken?

$$(\frac{2}{7} + \frac{3}{11}) \cdot \frac{3}{1000} = \frac{129}{77} \cdot \frac{1}{1000} > \frac{1}{1000},$$

  also könnten Herrn Meiers Beschwerden vom Reinigungsmittel kommen.
- Wieviel Reinigungsmittel haben seine Nachbarn am Sonntag getrunken?

$$\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{1000} = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{1000} < \frac{1}{1000}$$

- Wieviel Reinigungsmittel haben seine Kollegen am Montag getrunken?

$$\frac{3}{11} \cdot \frac{3}{1000} = \frac{9}{11} \cdot \frac{1}{1000} < \frac{1}{1000}$$

- Also haben seine Nachbarn und Kollegen keine Beschwerden zu befürchten.

Rationale Zahlen

Diese Aufgabe kann nur dann gelöst werden, wenn bekannt ist

- was rationale Zahlen (Bruchzahlen) sind

Rationale Zahlen

Diese Aufgabe kann nur dann gelöst werden, wenn bekannt ist

- was rationale Zahlen (Bruchzahlen) sind
- was die Summe und das Produkt von zwei rationalen Zahlen ist

Rationale Zahlen

Diese Aufgabe kann nur dann gelöst werden, wenn bekannt ist

- was rationale Zahlen (Bruchzahlen) sind
- was die Summe und das Produkt von zwei rationalen Zahlen ist
- was es bedeutet, dass eine rationale Zahl kleiner bzw. größer als eine andere ist

Rationale Zahlen

Diese Aufgabe kann nur dann gelöst werden, wenn bekannt ist

- was rationale Zahlen (Bruchzahlen) sind
- was die Summe und das Produkt von zwei rationalen Zahlen ist
- was es bedeutet, dass eine rationale Zahl kleiner bzw. größer als eine andere ist
- und welche Rechenregeln für rationale Zahlen gelten.

Endliche geometrische Reihen

Für $n \geq 1$ ist

- $$(1 + x + \cdots + x^n) \cdot (1 - x) = 1 - x^{n+1},$$

  also

Endliche geometrische Reihen

Für $n \geq 1$ ist

- $$(1 + x + \cdots + x^n) \cdot (1 - x) = 1 - x^{n+1},$$

  also

- $$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

  und

  $$\sum_{i=1}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 1 = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$$

Endliche geometrische Reihen

- Was ist die *rationale Funktion* $\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$?

Endliche geometrische Reihen

- Was ist die *rationale Funktion* $\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$?
- Was sind die Summe und das Produkt von zwei rationalen Funktionen?

Endliche geometrische Reihen

- Was ist die *rationale Funktion* $\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$?
- Was sind die Summe und das Produkt von zwei rationalen Funktionen?
- Welche Rechenregeln gelten für rationale Zahlen?

Was sind rationale Zahlen?

Was ist $\frac{2}{7}$?

- Es sollte eine Zahl z sein, die Lösung der Aufgabe
  „Finde eine Zahl z so, dass $7 \cdot z = 2$ ist“
  ist.

Was sind rationale Zahlen?

Was ist $\frac{2}{7}$?

- Es sollte eine Zahl z sein, die Lösung der Aufgabe
  „Finde eine Zahl z so, dass $7 \cdot z = 2$ ist“
  ist.
- Erste Idee: $\frac{2}{7} := (2, 7)$.

Was sind rationale Zahlen?

Was ist $\frac{2}{7}$?

- Es sollte eine Zahl z sein, die Lösung der Aufgabe
  „Finde eine Zahl z so, dass $7 \cdot z = 2$ ist“
  ist.
- Erste Idee: $\frac{2}{7} := (2, 7)$.
- Ist bei der Zahlbereichserweiterung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ erfolgreich:
  $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$, $i := (0, 1), 1 := (1, 0), a + ib = (a, b), (0, 1)^2 := (-1, 0)$.

Was sind rationale Zahlen?

Was ist $\frac{2}{7}$?

- Es sollte eine Zahl z sein, die Lösung der Aufgabe
  „Finde eine Zahl z so, dass $7 \cdot z = 2$ ist“
  ist.
- Erste Idee: $\frac{2}{7} := (2, 7)$.
- Ist bei der Zahlbereichserweiterung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ erfolgreich:
  $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$, $i := (0, 1), 1 := (1, 0), a + ib = (a, b), (0, 1)^2 := (-1, 0)$.
- Die Erweiterung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ oder von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Q}$ ist aber schwieriger:
  Es soll $\frac{2}{7} = \frac{4}{14} = \ldots$ sein, aber $(2, 7) \neq (4, 14)$!

Was sind rationale Zahlen?

Wichtig:

- Die rationale Zahl $\frac{a}{b}$ ist durch das Paar (a, b) von ganzen Zahlen (*Zähler* a, *Nenner* $b \neq 0$) eindeutig bestimmt.

Was sind rationale Zahlen?

Wichtig:

- Die rationale Zahl $\frac{a}{b}$ ist durch das Paar (a, b) von ganzen Zahlen (*Zähler* a, *Nenner* $b \neq 0$) eindeutig bestimmt.
- Aber: es gibt viele Paare (Zähler , Nenner), die dieselbe rationale Zahl darstellen.

Was sind rationale Zahlen?

Wichtig:

- Die rationale Zahl $\frac{a}{b}$ ist durch das Paar (a, b) von ganzen Zahlen (*Zähler* a, *Nenner* $b \neq 0$) eindeutig bestimmt.
- Aber: es gibt viele Paare (Zähler , Nenner), die dieselbe rationale Zahl darstellen.
- Es ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ genau dann, wenn $a \cdot d = b \cdot c$ ist.

Was sind rationale Zahlen?

- Eine rationale Zahl ist nicht ein Zahlenpaar, sondern eine Eigenschaft von Zahlenpaaren, ihr „Verhältnis“.

Was sind rationale Zahlen?

- Eine rationale Zahl ist nicht ein Zahlenpaar, sondern eine Eigenschaft von Zahlenpaaren, ihr „Verhältnis“.
- Zwei Paare (Zähler, Nenner) (a, b) und (c, d) haben genau dann das gleiche „Verhältnis“, wenn $a \cdot d = c \cdot b$ ist.

Was sind rationale Zahlen?

- Eine rationale Zahl ist nicht ein Zahlenpaar, sondern eine Eigenschaft von Zahlenpaaren, ihr „Verhältnis“.
- Zwei Paare (Zähler, Nenner) (a, b) und (c, d) haben genau dann das gleiche „Verhältnis“, wenn $a \cdot d = c \cdot b$ ist.
- Um zu vermittlen, was $\frac{2}{3}$ bedeutet, muss man mehrere Situationen zeigen, die durch das Zahlenpaar $(2, 3)$ (oder $(4, 6)$, ...) beschrieben können, denen allen das Verhältnis dieser zwei Zahlen gemeinsam ist: zum Beispiel
  2 Flaschen Saft und 3 Personen, oder
  ein Rechteck mit Fläche 2 dm^2, das in 3 gleich große Teile unterteilt ist, oder
  8 Stück einer in 12 gleiche Teile geschnittenen Torte,
  oder ... .

Was sind rationale Zahlen?

- In der Mathematik stellt man eine Eigenschaft oft als Menge aller Gegenstände, die diese Eigenschaft haben, dar: zum Beispiel die Farbe grün als die Menge aller grünen Gegenstände, oder $\frac{2}{3}$ als Menge aller Zahlenpaare (a, b) so, dass $3a = 2b$ ist:

$$\frac{2}{3} := \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, 3a = 2b\}$$

Was sind rationale Zahlen?

- In der Mathematik stellt man eine Eigenschaft oft als Menge aller Gegenstände, die diese Eigenschaft haben, dar: zum Beispiel die Farbe grün als die Menge aller grünen Gegenstände, oder $\frac{2}{3}$ als Menge aller Zahlenpaare (a, b) so, dass $3a = 2b$ ist:

$$\frac{2}{3} := \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, 3a = 2b\}$$

- $$\mathbb{Q} := \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

  Menge der rationalen Zahlen (oder Bruchzahlen)

Rechnen mit rationalen Zahlen

- $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} := \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

Rechnen mit rationalen Zahlen

- $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} := \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$
- $$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Rechnen mit rationalen Zahlen

- $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} := \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$
- $$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$
- Zur Definition von Summe und Produkt ist die folgende Eigenschaft ganzer Zahlen wichtig:
  aus $a \neq 0$ und $b \neq 0$ folgt $a \cdot b \neq 0$

Rechnen mit rationalen Zahlen

- $$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{b\cdot c}{b\cdot d}:=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$$
- $$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}:=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$
- Zur Definition von Summe und Produkt ist die folgende Eigenschaft ganzer Zahlen wichtig:
  aus $a \neq 0$ und $b \neq 0$ folgt $a \cdot b \neq 0$
- Wegen $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$ (falls $a \neq 0$ und $b \neq 0$) kann durch alle rationalen Zahlen $\neq 0$ dividiert werden:

$$\frac{c}{d}:\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\cdot\frac{b}{a}=\frac{b\cdot c}{a\cdot d}$$

Rechnen mit rationalen Zahlen

- $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} := \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$
- $$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$
- Zur Definition von Summe und Produkt ist die folgende Eigenschaft ganzer Zahlen wichtig:
  aus $a \neq 0$ und $b \neq 0$ folgt $a \cdot b \neq 0$
- Wegen $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$ (falls $a \neq 0$ und $b \neq 0$) kann durch alle rationalen Zahlen $\neq 0$ dividiert werden:
  $$\frac{c}{d} : \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b \cdot c}{a \cdot d}$$
- Zu beachten: Die Division von rationalen Zahlen ist die Umkehrung der Multiplikation.
  Die „Division mit Rest“ ist nur für ganze Zahlen definiert.

Rechenregeln für rationale Zahlen

- Mit rationalen Zahlen können alle vier Grundrechnungsarten ausgeführt werden (außer der Division durch 0).

Rechenregeln für rationale Zahlen

- Mit rationalen Zahlen können alle vier Grundrechnungsarten ausgeführt werden (außer der Division durch 0).
- Es gelten dabei die Rechenregeln eines *Körpers*:

Rechenregeln für rationale Zahlen

- Mit rationalen Zahlen können alle vier Grundrechnungsarten ausgeführt werden (außer der Division durch 0).
- Es gelten dabei die Rechenregeln eines *Körpers*:
  - man kann bei Addition und Multiplikation Klammern weglassen,

Rechenregeln für rationale Zahlen

- Mit rationalen Zahlen können alle vier Grundrechnungsarten ausgeführt werden (außer der Division durch 0).
- Es gelten dabei die Rechenregeln eines *Körpers*:
  - man kann bei Addition und Multiplikation Klammern weglassen,
  - es kommt nicht auf die Reihenfolge der Summanden oder Faktoren an

Rechenregeln für rationale Zahlen

- Mit rationalen Zahlen können alle vier Grundrechnungsarten ausgeführt werden (außer der Division durch 0).

- Es gelten dabei die Rechenregeln eines *Körpers*:
    - man kann bei Addition und Multiplikation Klammern weglassen,
    - es kommt nicht auf die Reihenfolge der Summanden oder Faktoren an
    - man darf herausheben und ausmultiplizieren,

Rechenregeln für rationale Zahlen

- Mit rationalen Zahlen können alle vier Grundrechnungsarten ausgeführt werden (außer der Division durch 0).
- Es gelten dabei die Rechenregeln eines *Körpers*:
  - man kann bei Addition und Multiplikation Klammern weglassen,
  - es kommt nicht auf die Reihenfolge der Summanden oder Faktoren an
  - man darf herausheben und ausmultiplizieren,
  - Addition bzw. Multiplikation können durch Subtraktion bzw. Division rückgängig gemacht werden,

Rechenregeln für rationale Zahlen

- Mit rationalen Zahlen können alle vier Grundrechnungsarten ausgeführt werden (außer der Division durch 0).
- Es gelten dabei die Rechenregeln eines *Körpers*:
  - man kann bei Addition und Multiplikation Klammern weglassen,
  - es kommt nicht auf die Reihenfolge der Summanden oder Faktoren an
  - man darf herausheben und ausmultiplizieren,
  - Addition bzw. Multiplikation können durch Subtraktion bzw. Division rückgängig gemacht werden,
  - etc.

Zifferndarstellung rationaler Zahlen

- Rationale Zahlen, deren Nenner eine Zehnerpotenz sein kann, wie
$$\frac{3}{10}, \frac{12}{100}, \frac{1}{250} = \frac{4}{1000}, \dots$$
heißen Dezimalzahlen.

Zifferndarstellung rationaler Zahlen

- Rationale Zahlen, deren Nenner eine Zehnerpotenz sein kann, wie

$$\frac{3}{10}, \frac{12}{100}, \frac{1}{250} = \frac{4}{1000}, \ldots$$

  heißen Dezimalzahlen.

- Dezimalzahlen werden auf einer Zeile durch Dezimalziffern und ein Komma (oder einen Punkt) dargestellt:

$$0.3 := \frac{3}{10}, 3.21 := \frac{321}{100}, 91.004 := \frac{91004}{1000}, \ldots$$

Zifferndarstellung rationaler Zahlen

- Rationale Zahlen, deren Nenner eine Zehnerpotenz sein kann, wie
$$\frac{3}{10}, \frac{12}{100}, \frac{1}{250} = \frac{4}{1000}, \ldots$$
heißen Dezimalzahlen.

- Dezimalzahlen werden auf einer Zeile durch Dezimalziffern und ein Komma (oder einen Punkt) dargestellt:
$$0.3 := \frac{3}{10}, 3.21 := \frac{321}{100}, 91.004 := \frac{91004}{1000}, \ldots$$

- Summe, Differenz und Produkt von Dezimalzahlen sind Dezimalzahlen. Alle ganzen Zahlen sind Dezimalzahlen.

Zifferndarstellung rationaler Zahlen

- Rationale Zahlen, deren Nenner eine Zehnerpotenz sein kann, wie
$$\frac{3}{10}, \frac{12}{100}, \frac{1}{250} = \frac{4}{1000}, \ldots$$
heißen Dezimalzahlen.

- Dezimalzahlen werden auf einer Zeile durch Dezimalziffern und ein Komma (oder einen Punkt) dargestellt:
$$0.3 := \frac{3}{10}, 3.21 := \frac{321}{100}, 91.004 := \frac{91004}{1000}, \ldots$$

- Summe, Differenz und Produkt von Dezimalzahlen sind Dezimalzahlen. Alle ganzen Zahlen sind Dezimalzahlen.

- Schlechte Nachricht: Nicht alle rationalen Zahlen sind Dezimalzahlen, zum Beispiel sind $\frac{1}{3}$ und $\frac{123}{11}$ keine Dezimalzahlen.

Zifferndarstellung rationaler Zahlen

- Gute Nachricht: Alle rationalen Zahlen können beliebig genau durch Dezimalzahlen angenähert werden.
  Zu jeder positiven rationalen Zahl $\frac{c}{d}$ und jeder natürlichen Zahl p gibt es eine eindeutig bestimmte Dezimalzahl $\frac{a}{10^p}$ so, dass

  $$0 \leq \frac{c}{d} - \frac{a}{10^p} < 10^{-p}$$

  ist.

Zifferndarstellung rationaler Zahlen

- Gute Nachricht: Alle rationalen Zahlen können beliebig genau durch Dezimalzahlen angenähert werden.
  Zu jeder positiven rationalen Zahl $\frac{c}{d}$ und jeder natürlichen Zahl p gibt es eine eindeutig bestimmte Dezimalzahl $\frac{a}{10^p}$ so, dass
  $$0 \leq \frac{c}{d} - \frac{a}{10^p} < 10^{-p}$$
  ist.

- Berechnung dieser Näherung (wenn Zähler und Nenner positiv sind):
  Dividiere $c \cdot 10^p$ mit Rest durch d:
  $c \cdot 10^p = a \cdot d + r$, $0 \leq r < d$.
  Dann ist $\frac{a}{10^p}$ die gesuchte Dezimalzahl.

Einführung rationaler Zahlen, wenn reelle Zahlen bekannt sind

- Einführung reeller Zahlen in der Sekundarstufe 1 oft als Punkte auf der *Zahlengeraden*, das ist eine Gerade, auf der zwei Punkte ausgewählt und mit 0 und 1 bezeichnet wurden.

Einführung rationaler Zahlen, wenn reelle Zahlen bekannt sind

- Einführung reeller Zahlen in der Sekundarstufe 1 oft als Punkte auf der *Zahlengeraden*, das ist eine Gerade, auf der zwei Punkte ausgewählt und mit 0 und 1 bezeichnet wurden.
- Punkte auf dieser Zahlengeraden: z. B. 2, -3, $\sqrt{2}$, π
  Das Volumen einer zylinderförmigen Dose mit Radius 1 dm und Höhe $\sqrt{2}$ dm ist

Einführung rationaler Zahlen, wenn reelle Zahlen bekannt sind

- Einführung reeller Zahlen in der Sekundarstufe 1 oft als Punkte auf der *Zahlengeraden*, das ist eine Gerade, auf der zwei Punkte ausgewählt und mit 0 und 1 bezeichnet wurden.
- Punkte auf dieser Zahlengeraden: z. B. 2, -3, $\sqrt{2}$, π
  Das Volumen einer zylinderförmigen Dose mit Radius 1 dm und Höhe $\sqrt{2}$ dm ist
- $\sqrt{2} \cdot \pi$ dm^3. Wie ist dieses Produkt definiert?

Einführung rationaler Zahlen, wenn reelle Zahlen bekannt sind

- Einführung reeller Zahlen in der Sekundarstufe 1 oft als Punkte auf der *Zahlengeraden*, das ist eine Gerade, auf der zwei Punkte ausgewählt und mit 0 und 1 bezeichnet wurden.
- Punkte auf dieser Zahlengeraden: z. B. 2, -3, $\sqrt{2}$, π
  Das Volumen einer zylinderförmigen Dose mit Radius 1 dm und Höhe $\sqrt{2}$ dm ist
- $\sqrt{2} \cdot \pi$ dm^3. Wie ist dieses Produkt definiert?
- Summe und Produkt von Punkten auf der Zahlengeraden werden geometrisch mit Hilfe von Bleistift, Lineal und Dreieck definiert.
  Annahme (in jedem Spezialfall konstruktiv nachprüfbar): Es gelten die Rechenregeln eines Körpers.

Einführung rationaler Zahlen, wenn reelle Zahlen bekannt sind

- Einführung reeller Zahlen in der Sekundarstufe 1 oft als Punkte auf der *Zahlengeraden*, das ist eine Gerade, auf der zwei Punkte ausgewählt und mit 0 und 1 bezeichnet wurden.
- Punkte auf dieser Zahlengeraden: z. B. 2, -3, $\sqrt{2}$, π
  Das Volumen einer zylinderförmigen Dose mit Radius 1 dm und Höhe $\sqrt{2}$ dm ist
- $\sqrt{2} \cdot \pi$ dm^3. Wie ist dieses Produkt definiert?
- Summe und Produkt von Punkten auf der Zahlengeraden werden geometrisch mit Hilfe von Bleistift, Lineal und Dreieck definiert. Annahme (in jedem Spezialfall konstruktiv nachprüfbar): Es gelten die Rechenregeln eines Körpers.
- Dann: Ganze Zahlen können als Punkte der Zahlengeraden betrachtet werden (mehrfache Addition von 1 bzw. -1).

Einführung rationaler Zahlen, wenn reelle Zahlen bekannt sind

- Einführung reeller Zahlen in der Sekundarstufe 1 oft als Punkte auf der *Zahlengeraden*, das ist eine Gerade, auf der zwei Punkte ausgewählt und mit 0 und 1 bezeichnet wurden.
- Punkte auf dieser Zahlengeraden: z. B. 2, -3, $\sqrt{2}$, π
  Das Volumen einer zylinderförmigen Dose mit Radius 1 dm und Höhe $\sqrt{2}$ dm ist
- $\sqrt{2} \cdot \pi$ dm^3. Wie ist dieses Produkt definiert?
- Summe und Produkt von Punkten auf der Zahlengeraden werden geometrisch mit Hilfe von Bleistift, Lineal und Dreieck definiert. Annahme (in jedem Spezialfall konstruktiv nachprüfbar): Es gelten die Rechenregeln eines Körpers.
- Dann: Ganze Zahlen können als Punkte der Zahlengeraden betrachtet werden (mehrfache Addition von 1 bzw. -1).
- Dann: Rationale Zahlen sind Quotienten von ganzen Zahlen (insbesondere Punkte einer Zahlengeraden).

Darstellung rationaler Zahlen als Grenzwerte von Folgen von Dezimalzahlen

In der Sekundarstufe 2, nach Einführung der Begriffe Folge, konvergente Folge, Grenzwert:

- Die Folge

  $$(0.3, 0.33, 0.333, \ldots, 0.333\ldots333, \ldots)$$

  ist wegen

Darstellung rationaler Zahlen als Grenzwerte von Folgen von Dezimalzahlen

In der Sekundarstufe 2, nach Einführung der Begriffe Folge, konvergente Folge, Grenzwert:

- Die Folge

$$(0.3, 0.33, 0.333, \ldots, 0.333\ldots333, \ldots)$$

  ist wegen

-

$$0.3 = 3 \cdot \frac{1}{10}, 0.33 = 3 \cdot (\frac{1}{10} + \frac{1}{100}), 0.333 = 3 \cdot (\frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3})$$

$$0.333\ldots333 = 3 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{10^i} = \frac{\frac{1}{10} - (\frac{1}{10})^{n+1}}{1 - \frac{1}{10}}$$

  eine konvergente geometrische Reihe.

Darstellung rationaler Zahlen als Grenzwerte von Folgen von Dezimalzahlen

In der Sekundarstufe 2, nach Einführung der Begriffe Folge, konvergente Folge, Grenzwert:

- Die Folge

$$(0.3, 0.33, 0.333, \ldots, 0.333\ldots333, \ldots)$$

  ist wegen

- $$0.3 = 3 \cdot \frac{1}{10}, 0.33 = 3 \cdot (\frac{1}{10} + \frac{1}{100}), 0.333 = 3 \cdot (\frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3})$$

$$0.333\ldots333 = 3 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{10^i} = \frac{\frac{1}{10} - (\frac{1}{10})^{n+1}}{1 - \frac{1}{10}}$$

  eine konvergente geometrische Reihe.

- Es ist

$$lim_{n\to\infty} 3 \cdot \frac{\frac{1}{10} - \frac{1}{10}^{n+1}}{1 - \frac{1}{10}} = 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

Darstellung rationaler Zahlen als Grenzwerte von Folgen von Dezimalzahlen

- Daher ist jede rationale Zahl Grenzwert einer Folge von Dezimalzahlen.

Darstellung rationaler Zahlen als Grenzwerte von Folgen von Dezimalzahlen

- Daher ist jede rationale Zahl Grenzwert einer Folge von Dezimalzahlen.
- Diese Folge ist aber nicht eindeutig bestimmt: Zum Beispiel ist 1 Grenzwert der Folge

$$(1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots),$$

aber auch Grenzwert der Folge

$$(0.9, 0.99, 0.999, \ldots, 0.999\ldots 999, \ldots).$$

Was sind rationale Funktionen?

Wir schreiben im weiteren Polynome (mit reellen Koeffizienten) mit Hilfe des Symbols x an, zum Beispiel sind

$$3x^4 - 2x^2 + 5x - 6,\ \pi x - \sqrt{3},\ x,\ 8$$

Polynome.
Wir können sie als Polynomfunktionen auffassen, dann steht x für die identische Funktion (Für alle reellen Zahlen t ist $x(t) = t$).

- Was ist die *rationale Funktion* $\frac{x^2}{x-1}$?

Was sind rationale Funktionen?

Wir schreiben im weiteren Polynome (mit reellen Koeffizienten) mit Hilfe des Symbols x an, zum Beispiel sind

$$3x^4 - 2x^2 + 5x - 6,\ \pi x - \sqrt{3},\ x,\ 8$$

Polynome.
Wir können sie als Polynomfunktionen auffassen, dann steht x für die identische Funktion (Für alle reellen Zahlen t ist $x(t) = t$).

- Was ist die *rationale Funktion* $\frac{x^2}{x-1}$?
- Sie sollte ein Element z einer Menge sein, die alle Polynome enthält und auf der Addition und Multiplikation definiert sind, das Lösung der Aufgabe
  „Finde z so, dass $(x-1) \cdot z = x^2$ ist"
  ist.

Was sind rationale Funktionen?

Wichtig:

- Die rationale Funktion $\frac{a}{b}$ ist durch das Paar von Polynomen (a, b) (*Zähler* a, *Nenner* $b \neq 0$) eindeutig bestimmt.

Was sind rationale Funktionen?

Wichtig:

- Die rationale Funktion $\frac{a}{b}$ ist durch das Paar von Polynomen (a, b) (*Zähler* a, *Nenner* $b \neq 0$) eindeutig bestimmt.
- Aber: es gibt viele Paare (Zähler , Nenner), die dieselbe rationale Funktion darstellen.

Was sind rationale Funktionen?

Wichtig:

- Die rationale Funktion $\frac{a}{b}$ ist durch das Paar von Polynomen (a, b) (*Zähler* a, *Nenner* $b \neq 0$) eindeutig bestimmt.
- Aber: es gibt viele Paare (Zähler , Nenner), die dieselbe rationale Funktion darstellen.
- Es ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ genau dann, wenn $a \cdot d = b \cdot c$ ist.

Was sind rationale Funktionen?

- $$\frac{x^2}{x-1} := \{(c,d) \mid c, d \text{ Polynome }, d \neq 0, (x-1) \cdot c = x^2 \cdot d\}$$

Was sind rationale Funktionen?

- $$\frac{x^2}{x-1} := \{(c,d) \mid c,d \text{ Polynome }, d \neq 0, (x-1)\cdot c = x^2 \cdot d\}$$
- $$\mathbb{R}(x) := \{\frac{a}{b} \mid a,b \text{ Polynome (mit reellen Koeff.) }, b \neq 0\}$$

  Menge der rationalen Funktionen (manchmal auch „Bruchterme“)

Rechnen mit rationalen Funktionen

a, b, c, d sind Polynome, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

- $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} := \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

Rechnen mit rationalen Funktionen

a, b, c, d sind Polynome, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

- $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} := \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$
- $$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Rechnen mit rationalen Funktionen

a, b, c, d sind Polynome, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

- $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} := \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$
- $$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$
- Zur Definition von Summe und Produkt ist die folgende Eigenschaft von Polynomen wichtig:
  aus $a \neq 0$ und $b \neq 0$ folgt $a \cdot b \neq 0$

Rechnen mit rationalen Funktionen

a, b, c, d sind Polynome, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

- $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} := \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$
- $$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$
- Zur Definition von Summe und Produkt ist die folgende Eigenschaft von Polynomen wichtig:
  aus $a \neq 0$ und $b \neq 0$ folgt $a \cdot b \neq 0$
- Wegen $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$ (falls $a \neq 0$ und $b \neq 0$) kann durch alle rationalen Funktionen $\neq 0$ dividiert werden:

$$\frac{c}{d} : \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b \cdot c}{a \cdot d}$$

Rechnen mit rationalen Funktionen

a, b, c, d sind Polynome, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

- $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} := \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$
- $$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$
- Zur Definition von Summe und Produkt ist die folgende Eigenschaft von Polynomen wichtig:
  aus $a \neq 0$ und $b \neq 0$ folgt $a \cdot b \neq 0$
- Wegen $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$ (falls $a \neq 0$ und $b \neq 0$) kann durch alle rationalen Funktionen $\neq 0$ dividiert werden:
  $$\frac{c}{d} : \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b \cdot c}{a \cdot d}$$
- Zu beachten: Die Division von rationalen Funktionen ist die Umkehrung der Multiplikation. Die „Division mit Rest von Polynomen“ ist nur für Polynome definiert.

Rechenregeln für rationale Funktionen

- Mit rationalen Funktionen können alle vier Grundrechnungsarten ausgeführt werden (außer der Division durch 0).

Rechenregeln für rationale Funktionen

- Mit rationalen Funktionen können alle vier Grundrechnungsarten ausgeführt werden (außer der Division durch 0).

- Es gelten dabei die Rechenregeln eines *Körpers*:
  man kann bei Addition und Multiplikation Klammern weglassen,
  es kommt nicht auf die Reihenfolge der Summanden oder Faktoren an,
  man darf herausheben und ausmultiplizieren,
  Addition bzw. Multiplikation können durch Subtraktion bzw. Division rückgängig gemacht werden,
  etc.

Laurentpolynome - das Analogon zu Dezimalzahlen

- Rationale Zahlen, deren Nenner eine Potenz von $x - 1$ sein kann, wie
$$\frac{3}{x-1}, \frac{x^5+1}{(x-1)^3}, \frac{1}{(x-1)^{10}}, \ldots$$
heißen *Laurentpolynome mit Entwicklungspunkt* 1.

Laurentpolynome - das Analogon zu Dezimalzahlen

- Rationale Zahlen, deren Nenner eine Potenz von $x - 1$ sein kann, wie
$$\frac{3}{x-1}, \frac{x^5+1}{(x-1)^3}, \frac{1}{(x-1)^{10}}, \ldots$$
heißen *Laurentpolynome mit Entwicklungspunkt* 1.

- Es könnte auch jede andere reelle Zahl als Entwicklungspunkt genommen werden. Wir betrachten im weiteren aber nur Laurentpolynome mit Entwicklungspunkt 1.

Laurentpolynome - das Analogon zu Dezimalzahlen

- Rationale Zahlen, deren Nenner eine Potenz von $x-1$ sein kann, wie
$$\frac{3}{x-1}, \frac{x^5+1}{(x-1)^3}, \frac{1}{(x-1)^{10}}, \ldots$$
heißen *Laurentpolynome mit Entwicklungspunkt* 1.

- Es könnte auch jede andere reelle Zahl als Entwicklungspunkt genommen werden. Wir betrachten im weiteren aber nur Laurentpolynome mit Entwicklungspunkt 1.

- Summe, Differenz und Produkt von Laurentpolynomen sind Laurentpolynome. Alle Polynome sind Laurentpolynome. Nicht jede rationale Funktion ist ein Laurentpolynom, zum Beispiel $\frac{1}{x^2+1}$ nicht.

Laurentpolynome - das Analogon zu Dezimalzahlen

- Jedes Polynom kann in der Form

$$\sum_{i=0}^{n} c_i(x-1)^i, \text{ mit } c_i \in \mathbb{R},$$

geschrieben werden (mehrfache Division mit Rest durch $x-1$).

Laurentpolynome - das Analogon zu Dezimalzahlen

- Jedes Polynom kann in der Form

$$\sum_{i=0}^{n} c_i(x-1)^i, \text{ mit } c_i \in \mathbb{R},$$

  geschrieben werden (mehrfache Division mit Rest durch $x-1$).

- Daher kann jedes Laurentpolynom in der Form

$$\sum_{i=-p}^{n} d_i(x-1)^i, \text{ mit } d_i \in \mathbb{R},$$

  geschrieben werden (Die Zahlen d_i sind die „Ziffern dieser rationalen Funktion zur Basis $x-1$“).

Interpretation rationaler Funktionen als Funktionen

- Mit Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ kann gerechnet werden:

  $$f + g \text{ ist die Funktion mit } (f+g)(t) := f(t) + g(t)$$

  $$f \cdot g \text{ ist die Funktion mit } (f \cdot g)(t) := f(t) \cdot g(t)$$

  Dabei gelten dieselben Rechenregeln wie für das Rechnen mit ganzen Zahlen.

Interpretation rationaler Funktionen als Funktionen

- Mit Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ kann gerechnet werden:

$$f + g \text{ ist die Funktion mit } (f+g)(t) := f(t) + g(t)$$

$$f \cdot g \text{ ist die Funktion mit } (f \cdot g)(t) := f(t) \cdot g(t)$$

  Dabei gelten dieselben Rechenregeln wie für das Rechnen mit ganzen Zahlen.

- Für eine Funktion f von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ bezeichnen wir mit

$$N(f) := \{ t \in \mathbb{R} \mid f(t) = 0 \}$$

  die Menge ihrer Nullstellen.

Interpretation rationaler Funktionen als Funktionen

- Mit Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ kann gerechnet werden:

$$f + g \text{ ist die Funktion mit } (f+g)(t) := f(t) + g(t)$$

$$f \cdot g \text{ ist die Funktion mit } (f \cdot g)(t) := f(t) \cdot g(t)$$

  Dabei gelten dieselben Rechenregeln wie für das Rechnen mit ganzen Zahlen.

- Für eine Funktion f von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ bezeichnen wir mit

$$N(f) := \{\, t \in \mathbb{R} \mid f(t) = 0 \,\}$$

  die Menge ihrer Nullstellen.

- Eine rationale Funktion $\frac{a}{b}$ kann durch

$$\frac{a}{b}(t) := \frac{a(t)}{b(t)}$$

  als reellwertige Funktion aufgefasst werden. Ihr Definitionsbereich ist aber nicht $\mathbb{R}$, sondern $\mathbb{R} \setminus N(b)$.

Interpretation rationaler Funktionen als Funktionen

- Zwei Probleme:
  Der Definitionsbereich hängt vom ausgewählten Nenner ab.
  Beim Rechnen mit diesen Funktionen sollten immer beide Summanden oder Faktoren sowie deren Summe und Produkt denselben Definitionsbereich haben.

Interpretation rationaler Funktionen als Funktionen

- Zwei Probleme:
  Der Definitionsbereich hängt vom ausgewählten Nenner ab.
  Beim Rechnen mit diesen Funktionen sollten immer beide Summanden oder Faktoren sowie deren Summe und Produkt denselben Definitionsbereich haben.

- Daher: Wir setzen diese Funktionen irgendwie auf ganz $\mathbb{R}$ fort.
  Dann fassen wir zwei Funktionen, deren Funktionswerte sich nur an endlich vielen Stellen unterscheiden, als gleich auf (betrachten also nicht Funktionen, sondern gewisse Äquivalenzklassen von Funktionen).

Brüche weiterer Funktionen

- Auf diese Weise können auch „Quotientenkörper“ von weiteren Mengen von Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die unter Addition und Multiplikation abgeschlossen sind, betrachtet werden, zum Beispiel:
  Brüche von allen Funktionen, deren Nullstellenmenge endlich ist (Polynomfunktionen und Exponentialfunktionen haben diese Eigenschaft)
  Brüche von allen Funktionen, deren Nullstellenmenge abzählbar ist (sin und cos haben diese Eigenschaft)

Brüche weiterer Funktionen

- Auf diese Weise können auch „Quotientenkörper“ von weiteren Mengen von Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die unter Addition und Multiplikation abgeschlossen sind, betrachtet werden, zum Beispiel:
  Brüche von allen Funktionen, deren Nullstellenmenge endlich ist (Polynomfunktionen und Exponentialfunktionen haben diese Eigenschaft)
  Brüche von allen Funktionen, deren Nullstellenmenge abzählbar ist (sin und cos haben diese Eigenschaft)

- Es ist nicht möglich, einen „Quotientenkörper“ der Menge aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ zu bilden: Es gibt Funktionen $f \neq 0$, $g \neq 0$ so, dass $f \cdot g = 0$ ist.
  Dann hätten die Brüche $\frac{1}{f}$ und $\frac{1}{g}$ Nenner ungleich 0, aber ihre Summe und ihr Produkt könnten dann nicht $f \cdot g = 0$ als Nenner haben.

Brüche weiterer Funktionen

- Auf diese Weise können auch „Quotientenkörper“ von weiteren Mengen von Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die unter Addition und Multiplikation abgeschlossen sind, betrachtet werden, zum Beispiel:
  Brüche von allen Funktionen, deren Nullstellenmenge endlich ist (Polynomfunktionen und Exponentialfunktionen haben diese Eigenschaft)
  Brüche von allen Funktionen, deren Nullstellenmenge abzählbar ist (sin und cos haben diese Eigenschaft)

- Es ist nicht möglich, einen „Quotientenkörper“ der Menge aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ zu bilden: Es gibt Funktionen $f \neq 0$, $g \neq 0$ so, dass $f \cdot g = 0$ ist.
  Dann hätten die Brüche $\frac{1}{f}$ und $\frac{1}{g}$ Nenner ungleich 0, aber ihre Summe und ihr Produkt könnten dann nicht $f \cdot g = 0$ als Nenner haben.

- Beispiel: f mit $f(t) := t - |t|$ und g mit $g(t) := t + |t|$,

$$(f \cdot g)(t) = (t - |t|)(t + |t|) = t^2 - |t|^2 = 0$$

Partialbruchzerlegung

- Wenn $ggT(a, b) = 1$ ist, können mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus u, v so berechnet werden, dass

$$u \cdot a + v \cdot b = 1$$

ist.

Partialbruchzerlegung

- Wenn $ggT(a, b) = 1$ ist, können mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus u, v so berechnet werden, dass

  $$u \cdot a + v \cdot b = 1$$

  ist.

- $$\frac{c}{a \cdot b} = \frac{c \cdot (u \cdot a + v \cdot b)}{a \cdot b} = \frac{c \cdot u}{b} + \frac{c \cdot v}{a}$$

Partialbruchzerlegung

- Wenn $ggT(a, b) = 1$ ist, können mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus u, v so berechnet werden, dass
$$u \cdot a + v \cdot b = 1$$
ist.
- $$\frac{c}{a \cdot b} = \frac{c \cdot (u \cdot a + v \cdot b)}{a \cdot b} = \frac{c \cdot u}{b} + \frac{c \cdot v}{a}$$
- Beipiel:
$$\frac{5}{8 \cdot 11} = \frac{15}{8} - \frac{20}{11} = -\frac{1}{8} + \frac{2}{11}$$

Partialbruchzerlegung

- Wenn $ggT(a, b) = 1$ ist, können mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus u, v so berechnet werden, dass
$$u \cdot a + v \cdot b = 1$$
ist.
- $$\frac{c}{a \cdot b} = \frac{c \cdot (u \cdot a + v \cdot b)}{a \cdot b} = \frac{c \cdot u}{b} + \frac{c \cdot v}{a}$$
- Beipiel:
$$\frac{5}{8 \cdot 11} = \frac{15}{8} - \frac{20}{11} = -\frac{1}{8} + \frac{2}{11}$$
- Beipiel:
$$\frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(x-1) \cdot (x^2+1)} = 2 - \frac{2}{x^2+1} - \frac{1}{x-1}$$

Anwendungen der Partialbruchzerlegung

- Integration rationaler Funktionen (falls Nenner als Produkt von Linearfaktoren gegeben ist)

Anwendungen der Partialbruchzerlegung

- Integration rationaler Funktionen (falls Nenner als Produkt von Linearfaktoren gegeben ist)
- Lösung von linearen Anfangswertaufgaben der Ordnung 2 mit Laplace-Transformation

Danke für die Aufmerksamkeit!
http://www.uibk.ac.at/mathematik/personal/pauer/

franz.pauer@uibk.ac.at